

BAB 5

PERBINCANGAN DAN KESIMPULAN

Pengenalan

Kajian ini bertujuan untuk mengenal pasti skim pembahagian nombor bulat yang dipunyai oleh murid Tahun Empat. Ia juga bertujuan untuk mengenal pasti cara subjek menggunakan skim yang mereka miliki untuk menyelesaikan masalah yang membabitkan pembahagian nombor bulat. Data bagi kajian ini dikumpulkan melalui lima sesi temu duga klinikal yang di jalankan dalam tempoh hampir tiga bulan. Setiap sesi temu duga dirakamkan secara audio dan video. Tujuh orang subjek kajian, yang dipilih oleh guru matematik masing-masing, ditemu duga seorang demi seorang.

Data dianalisis dalam empat peringkat. Pada peringkat pertama, rakaman video dan audio ditranskripan ke bentuk bertulis. Ini termasuk catatan dan lukisan subjek, catatan penemu duga, serta interaksi yang berlaku antara subjek dan penemu duga semasa rakaman dijalankan. Dalam peringkat kedua pula, protokol yang berkaitan dengan pemerihalalan tingkah laku subjek dihuraikan. Analisis merentasi subjek dilakukan dalam peringkat ketiga, manakala dalam peringkat terakhir pula skim yang telah dikenal pasti dihuraikan secara perinci.

Bab Lima menghuraikan skim pembahagian nombor bulat yang dipunyai oleh murid Tahun Empat. Selain itu, dapatan lain yang diperoleh, cadangan serta implikasi kepada pengajaran, dan kajian lanjutan juga dibincangkan.

Skim Pembahagian Nombor Bulat

Skim pembahagian nombor bulat yang dipunyai oleh tujuh orang murid Tahun Empat dikenal pasti melalui lima aktiviti, iaitu gambaran mental, perwakilan, makna, tafsiran dan penyelesaian masalah. Berikut adalah huraian ringkas tentang aktiviti tersebut.

Gambaran Mental

Gambaran mental adalah imej serta merta tentang sesuatu apabila subjek kajian menggunakan skim yang khusus dalam konteks tertentu. Gambaran mental subjek bagi pembahagian nombor bulat membabitkan dua aspek, iaitu perkataan bahagi dan ayat ‘enam bahagi dua’.

Perkataan Bahagi

Lima daripada tujuh orang subjek menggambarkan perkataan ‘bahagi’ dengan menulis simbol ‘÷’. Selain itu, tiga orang subjek

juga menulis simbol ‘ $\overline{)}$ ’ untuk menggambarkan perkataan bahagi. Seorang subjek juga menulis perkataan ‘bahagi’ selain menggunakan simbol ‘ \div ’.

Seorang subjek menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis simbol, ‘+’, ‘-’, ‘x’, dan ‘ \div ’. Selain itu, seorang subjek pula mempunyai gambaran yang berbeza daripada rakannya. Dia menulis nombor 12, 10, 13, 14, 15, dan 16. Subjek tersebut juga menyatakan bahawa dia terbayang semua nombor kecuali 0 apabila perkataan ‘bahagi’ disebut. Selain itu, subjek tersebut juga menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis perkataan ‘gula-gula’, ‘pisau’, ‘guli’, dan ‘ikan’, yang menurutnya adalah objek yang boleh dibahagi.

Ringkasan

Gambaran mental yang dipunyai oleh murid tentang perkataan ‘bahagi’ adalah berbentuk simbol matematik yang menandakan operasi bahagi, nombor tertentu yang terlibat dalam aktiviti pembahagian, dan benda konkrit yang boleh dibahagi. Bagaimanapun, perkataan ‘bahagi’ tidak mencetuskan gambaran yang membabitkan aktiviti membahagi sesuatu benda atau himpunan benda. Seterusnya, gambaran yang dominan bagi perkataan ‘bahagi’ ialah simbol matematik yang menandakan operasi bahagi.

Ayat Enam Bahagi Dua

Pada umumnya, subjek menggambarkan ayat 'enam bahagi dua' dengan menggunakan simbol dan lukisan. Enam daripada tujuh subjek menggambarkan ayat 'enam bahagi dua' dengan menulis ayat simbol $6 \div 2$. Selain itu, empat orang subjek juga menulis $2 \overline{)6}$ bagi menggambarkan ayat 'enam bahagi dua'. Dua orang subjek menggambarkan ayat tersebut melalui lukisan dengan menggunakan idea pengukuran. Misalnya, seorang melukis enam biji limau dan durian yang dihimpunkan dalam tiga kumpulan bersaiz dua, manakala seorang lagi subjek pula melukis gambar gula-gula, pisau, pensel, guli, ikan, lilin, pokok, baju, dan seluar yang juga menggunakan idea pengukuran.

Ringkasan

Gambaran mental yang dipunyai oleh subjek tentang ayat 'enam bahagi dua' adalah berbentuk ayat matematik membabitkan simbol bahagi, dan secara figuratif yang menggunakan idea pengukuran. Gambaran yang dominan bagi ayat 'enam bahagi dua' adalah ayat matematik yang membabitkan penggunaan simbol bahagi.

Perwakilan

Aktiviti perwakilan membabitkan tiga komponen, iaitu mewakilkan ayat bahagi yang diberi dengan menggunakan bahan yang disediakan, mentafsirkan gambar rajah yang diberikan, dan membandingkan ayat bahagi dan ayat tolak yang diwakilkan dengan menggunakan bahan konkrit yang disediakan. Idea yang digunakan oleh subjek semasa mengendalikan ketiga-tiga aktiviti tersebut dihuraikan melalui tiga bahagian yang berikut, iaitu perwakilan ayat bahagi, perwakilan gambar rajah dan perwakilan penolakan berulang.

Perwakilan Ayat Bahagi

Perwakilan ayat bahagi membabitkan pembahagian tanpa baki dan pembahagian dengan baki. Satu kotak yang mengandungi lebih kurang lima puluh biji butang disediakan untuk kegunaan subjek. Bagi ayat bahagi tanpa baki, lima subjek mewakilkan ayat $a \div b$ dengan membentuk kumpulan-kumpulan yang bersaiz b , dengan menggunakan butang yang disediakan. Sebagai contoh, bagi $12 \div 4$, subjek membentuk tiga kumpulan yang bersaiz empat. Seorang subjek pula menggunakan idea pemetakan dan membentuk b kumpulan yang sama saiz bagi ayat tersebut. Sebagai contoh, bagi ayat $12 \div 4$, subjek membentuk empat kumpulan bersaiz tiga. Selain itu, dua orang subjek menggunakan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan bagi

mewakili ayat bahagi $a \div b$. Mereka membentuk sebanyak b kumpulan butang yang sama saiz dengan menggunakan idea pemetakan dan membentuk kumpulan butang yang bersaiz b yang sejajar dengan idea pengukuran. Seorang subjek menggunakan idea penolakan berulang bagi menunjukkan pembahagian. Subjek tersebut mengeluarkan sebanyak c kumpulan bersaiz b , bagi ayat bahagi $a \div b$. Selain itu, subjek tersebut juga menunjukkan bagaimana b kumpulan bersaiz c dikeluarkan dari a .

Empat orang subjek menggunakan idea pengukuran dan menulis ayat matematik $a \div b = c$ bagi mewakili c kumpulan bersaiz b . Seorang subjek pula menggunakan idea pemetakan untuk menulis ayat matematik $a \div b = c$ bagi mewakili b kumpulan bersaiz c yang dibentuknya. Sementara itu, dua orang subjek menggunakan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan untuk menulis ayat matematik $a \div b = c$ dan $a \div c = b$ bagi mewakili c kumpulan bersaiz b yang mereka bentuk.

Subjek yang menggunakan idea pemetakan berpendapat bahawa bilangan kumpulan yang dibentuk bergantung pada pembahagi, manakala lima subjek lain yang menggunakan idea pengukuran pula berpendapat bahawa pembahagi dalam sesuatu ayat bahagi mewakili saiz kumpulan yang dibentuk. Dua orang subjek menjelaskan bahawa pembahagi boleh mewakili kedua-dua saiz kumpulan ataupun bilangan kumpulan.

Bagi perbandingan antara ayat matematik $a \div b = c$ dan $a \div c = b$, lima orang subjek menganggap bahawa kedua-dua persamaan tersebut tidak sama sebab pembahagi dan hasil bahagi bagi kedua-dua persamaan tersebut adalah berbeza. Sebagai contoh, ayat $12 \div 3 = 4$ ditafsirkan sebagai tidak sama dengan ayat $12 \div 4 = 3$. Sementara itu, dua subjek pula menganggap kedua-dua persamaan $a \div b = c$ dan $a \div c = b$ adalah sama sebab pembahagi dan hasil bahagi bagi kedua-dua persamaan itu boleh bertukar ganti. Sebagai contoh, bagi ayat matematik $12 \div 4 = 3$ dan $12 \div 3 = 4$, angka 3 dan 4 boleh bertukar ganti.

Bagi pembahagian yang menghasilkan baki, dua subjek berpendapat bahawa hanya kumpulan yang mempunyai saiz yang sama dengan pembahagi sahaja diambil kira sebagai penyelesaiannya. Sebagai contoh, bagi ayat $8 \div 3$, yang mempunyai dua kumpulan bersaiz tiga dan satu kumpulan bersaiz dua, hanya kumpulan yang bersaiz tiga sahaja diambil kira sebagai jawapannya. Menurut mereka lagi, kumpulan yang bersaiz selain daripada pembahagi hendaklah diabaikan. Lima orang subjek pula berpendapat bahawa penyelesaian bagi ayat matematik $a \div b$ yang menghasilkan baki sebanyak d perlu ditulis sebagai c baki d . Sebagai contoh, bagi ayat $8 \div 3$, jawapannya ditulis sebagai '2 baki 2'. Seorang subjek juga menggunakan idea penolakan berulang dengan mengeluarkan c kumpulan bersaiz b dan b kumpulan bersaiz c .

Ringkasan

Terdapat empat penafsiran yang berbeza tentang ayat bahagi tanpa baki, iaitu penafsiran membabitkan idea pengukuran, penafsiran membabitkan idea pemetakan, dan penafsiran membabitkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan, dan penafsiran membabitkan idea penolakan berulang. Bagi ayat bahagi tanpa baki, penafsiran membabitkan idea pengukuran adalah dominan. Berikut adalah huraian ringkas ketiga-tiga penafsiran yang diberikan oleh subjek.

Ayat Bahagi Tanpa Baki

a. Penafsiran membabitkan idea pengukuran:

Ayat $a \div b$ ditafsirkan sebagai pembentukan bilangan kumpulan tertentu yang mana saiz setiap kumpulan adalah 'b'. Sebagai contoh, bagi ayat $12 \div 4$, sebanyak tiga kumpulan bersaiz empat dibentuk oleh subjek kajian.

b. Penafsiran membabitkan idea pemetakan:

Ayat $a \div b$ ditafsirkan sebagai pembentukan sebanyak 'b' kumpulan yang mempunyai saiz yang sama. Sebagai contoh, bagi ayat $12 \div 4$, empat kumpulan bersaiz tiga dibentuk oleh subjek kajian.

c. Penafsiran membabitkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan:

Ayat $a \div b$ ditafsirkan menggunakan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan. Sebagai contoh, bagi ayat $12 \div 4$, subjek membentuk empat kumpulan bersaiz tiga dan tiga kumpulan bersaiz empat.

d. Penafsiran membabitkan idea penolakan berulang:

Ayat $a \div b$ ditafsirkan menggunakan idea penolakan berulang. Sebagai contoh, bagi ayat $12 \div 4$, subjek mengeluarkan empat sebanyak tiga kali.

Bagi ayat bahagi dengan baki pula, terdapat empat penafsiran yang berbeza, iaitu penafsiran mengabaikan baki, penafsiran yang mengambil kira baki dengan menggunakan idea pengukuran, penafsiran yang mengambil kira baki dengan menggunakan idea pemetakan, dan penafsiran mengambil kira baki dengan menggunakan idea penolakan berulang. Bagi ayat bahagi dengan baki didapati penafsiran yang mengambil kira baki dengan menggunakan idea pengukuran adalah dominan. Berikut adalah huraian ringkas bagi ketiga-tiga penafsiran subjek.

Ayat bahagi yang mempunyai baki

e. Penafsiran yang mengabaikan baki:

Ayat $a \div b$ yang mempunyai baki 'd' ditafsirkan menggunakan idea pengukuran tanpa mengambil kira baki dengan membentuk kumpulan tertentu yang bersaiz 'b'. Sebagai contoh, bagi ayat $8 \div 3$, dua kumpulan yang bersaiz tiga dibentuk oleh subjek kajian

f. Penafsiran yang mengambil kira baki dengan menggunakan idea pengukuran:

Ayat $a \div b$ yang mempunyai baki 'd' ditafsirkan dengan membentuk kumpulan tertentu yang bersaiz 'b'. Sebagai contoh, bagi ayat $8 \div 3$, dua kumpulan yang bersaiz tiga dibentuk. Dua objek lagi yang tinggal di ambil kira sebagai baki.

g. Penafsiran yang mengambil kira baki dengan menggunakan idea pemetakan:

Ayat $a \div b$ ditafsirkan dengan membentuk sebanyak 'b' kumpulan. Kumpulan yang mempunyai saiz kurang daripada kumpulan yang lain diambil kira sebagai baki. Sebagai

contoh, bagi ayat $8 \div 3$, sebanyak tiga kumpulan dibentuk yang mana dua daripadanya bersaiz tiga, manakala satu kumpulan lagi bersaiz dua. Kumpulan yang bersaiz dua diambil kira sebagai baki.

h. Penafsiran yang mengambil kira baki dengan menggunakan idea penolakan berulang

Ayat $a \div b$ ditafsirkan dengan mengeluarkan sebanyak c kumpulan yang bersaiz b dan mengeluarkan b kumpulan bersaiz c . Sebagai contoh, bagi ayat $8 \div 3$, sebanyak dua kumpulan bersaiz tiga dikeluarkan dari lapan. Dua yang tinggal diambil kira sebagai baki.

Perwakilan gambar rajah

Aktiviti bagi perwakilan gambar rajah membabitkan dua bahagian, iaitu tafsiran subjek terhadap gambar rajah yang disediakan, dan tafsiran serta perbandingan antara ayat-ayat matematik yang ditulis oleh subjek bagi mewakili gambar rajah yang disediakan. Bagi aktiviti ini, tiga keping gambar rajah disediakan, yang mana dua daripadanya berbentuk diskret dan sekeping lagi berbentuk selanjar. Salah satu daripada dua gambar rajah diskret mempunyai lima belas

biji bola yang dikumpulkan dalam lima kumpulan bersaiz tiga. Manakala, sebuah gambar rajah pula mempunyai enam belas ekor kura-kura yang dikumpulkan dalam empat kumpulan bersaiz empat. Gambar rajah selanjar pula terdiri daripada dua puluh satu jalur yang diagihkan kepada tiga bahagian yang sama saiz.

Bagi kedua-dua gambar rajah diskret dan gambar rajah selanjar yang dikemukakan, dua orang subjek mewakilkannya dengan menulis ayat matematik $a \div b = c$, di mana b merupakan saiz kumpulan, manakala c pula merupakan bilangan kumpulan yang terdapat pada gambar rajah tersebut. Sebagai contoh, bagi gambar rajah yang mempunyai lima belas bola yang diagihkan kepada lima kumpulan bersaiz tiga, subjek menulis ayat matematik $15 \div 3 = 5$. Subjek lain berpendapat bahawa kedua-dua persamaan $a \div b = c$ dan $a \div c = b$ boleh mewakili gambar rajah yang mempunyai b kumpulan bersaiz c ; iaitu bagi contoh di atas subjek menulis ayat $15 \div 3 = 5$ dan $15 \div 5 = 3$.

Bagi aktiviti perbandingan antara ayat matematik $a \div b = c$ dan $a \div c = b$, lima daripada tujuh subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat matematik tersebut tidak sama sebab pembahagi dan hasil bahagi pada kedua-dua persamaan itu adalah berbeza. Sebaliknya, dua orang subjek pula berpendapat bahawa kedua-dua ayat matematik tersebut adalah sama dan boleh merujuk gambar rajah yang sama sebab pembahagi dan hasil bahagi boleh bertukar ganti.

Bagi ayat matematik $a \div b = c$ yang ditulis oleh subjek bagi mewakili gambar rajah yang diberikan, lima daripada tujuh subjek berpendapat bahawa b merujuk saiz kumpulan, dan c pula merujuk bilangan kumpulan. Sebagai contoh, bagi ayat $21 \div 7 = 3$, angka 7 merujuk saiz kumpulan manakala 3 pula merujuk bilangan kumpulan. Seorang subjek pula berpendapat bahawa c merujuk saiz dan b merujuk bilangan kumpulan, manakala dua orang lagi berpendapat kedua-dua b atau c boleh merujuk sama ada saiz atau bilangan kumpulan.

Ringkasan

Terdapat dua penafsiran yang berbeza bagi gambar rajah yang mempunyai 'c' kumpulan bersaiz 'b', iaitu penafsiran yang membabitkan penulisan ayat matematik $a \div b = c$, dan penafsiran yang membabitkan ayat matematik $a \div b = c$ dan $a \div c = b$. Majoriti subjek menggunakan penafsiran yang pertama bagi mewakili gambar rajah yang mempunyai 'c' kumpulan bersaiz 'b'. Berikut adalah huraian ringkas tentang kedua-dua penafsiran tersebut.

a. Penafsiran yang membabitkan penulisan ayat matematik $a \div b = c$:

Gambar rajah diskret dan selanjar yang mempunyai 'c' kumpulan bersaiz 'b' ditafsirkan dengan menulis ayat

matematik $a \div b = c$, menggunakan idea pengukuran. Sebagai contoh, bagi gambar rajah yang mempunyai lima belas biji bola yang dikumpulkan dalam lima bulatan bersaiz tiga, subjek menulis $15 \div 3 = 5$.

b. Penafsiran yang membabitkan penulisan ayat matematik $a \div b = c$ dan $a \div c = b$:

Gambar rajah diskret dan selanjar yang mempunyai 'c' kumpulan bersaiz 'b' ditafsirkan dengan menulis kedua-dua ayat matematik $a \div b = c$, dan $a \div c = b$, menggunakan idea pengukuran dan pemetakan. Contohnya, bagi lima belas bola yang dikumpulkan dalam lima bulatan bersaiz tiga, subjek menulis $15 \div 3 = 5$ dan $15 \div 5 = 3$.

Penafsiran kedua melibatkan dua idea yang berbeza, iaitu penafsiran bahawa ayat matematik $a \div b = c$ tidak sama dengan $a \div c = b$, dan penafsiran bahawa ayat matematik $a \div b = c$ adalah sama dengan ayat matematik $a \div c = b$. Majoriti subjek menafsirkan bahawa ayat matematik $a \div b = c$ tidak sama dengan ayat matematik $a \div c = b$. Berikut adalah huraian ringkas bagi kedua-dua penafsiran yang dibuat oleh subjek.

c. *Penafsiran bahawa ayat $a \div b = c$ adalah tidak sama dengan ayat $a \div c = b$:*

Ayat $a \div b = c$ ditafsirkan sebagai tidak sama dengan ayat $a \div c = b$, sebab nilai 'b' dan 'c' adalah berbeza. Sebagai contoh, ayat matematik $15 \div 3 = 5$ mempunyai saiz kumpulan sebanyak tiga berbanding dengan ayat $15 \div 5 = 3$, yang bersaiz lima.

d. *Penafsiran bahawa ayat $a \div b = c$ adalah sama dengan ayat $a \div c = b$:*

Ayat $a \div b = c$ ditafsirkan sebagai sama dengan ayat $a \div c = b$ sebab kedua-dua ayat $a \div b = c$ dan $a \div c = b$ boleh mewakili gambar yang mempunyai 'c' kumpulan bersaiz 'b' atau gambar rajah yang mempunyai 'b' kumpulan bersaiz 'c'. Sebagai contoh, ayat matematik $15 \div 5 = 3$ dan $15 \div 3 = 5$, boleh mewakili gambar rajah yang mempunyai lima kumpulan bersaiz tiga.

Penolakan Berulang

Aktiviti bagi penolakan berulang membabitkan dua komponen, iaitu perwakilan ayat bahagi dan ayat tolak yang diberi dengan menggunakan bahan yang disediakan, dan perbandingan antara susunan yang dibentuk bagi kedua-dua ayat bahagi dan ayat tolak. Bagi aktiviti ini, satu kotak yang mengandungi lebih kurang empat puluh batang penyedut minuman disediakan.

Semua subjek berpendapat bahawa susunan yang mereka bentuk dengan menggunakan penyedut minuman bagi ayat matematik $a \div b = c$ adalah sama dengan susunan yang diperoleh bagi penolakan b secara berulang daripada a sebanyak c kali. Selain itu, seorang subjek pula berpendapat bahawa susunan yang beliau bentuk bagi ayat matematik $a \div c = b$ juga adalah sama dengan penolakan b secara berulang daripada a sebanyak c kali. Enam daripada tujuh subjek berpendapat bahawa saiz b yang terdapat dalam ayat matematik $a \div b = c$ adalah sama dengan saiz b yang terdapat dalam $a - b$ dan nilai c yang terdapat dalam ayat matematik $a \div b = c$ adalah sama dengan bilangan penolakan yang dilakukan. Seorang lagi subjek pula berpendapat bahawa saiz b dalam $a \div b = c$ sama dengan saiz b dalam $a - b$ atau bilangan penolakan bagi $a - c$. Menurutnya lagi, nilai c yang terdapat dalam ayat $a \div b = c$ adalah sama dengan bilangan penolakan bagi $a - b$ yang dilakukan atau saiz c dalam $a - c$.

Ringkasan

Terdapat dua penafsiran bagi perbandingan antara susunan yang dibentuk bagi penolakan berulang dan susunan yang dilakukan bagi pembahagian. Penafsiran yang diberikan oleh subjek adalah saiz 'b' bagi $a \div b$ adalah sama dengan saiz 'b' dalam $a - b$ secara berulang tetapi tiada kaitan dengan bilangan penolakan berulang $a - c$, dan saiz 'b' bagi $a \div b$ sama adalah sama dengan saiz 'b' dalam $a - b$ secara berulang atau bilangan penolakan bagi $a - c$ secara berulang. Dalam konteks ini, penafsiran saiz 'b' dalam $a \div b$ adalah sama dengan saiz 'b' yang terdapat dalam $a - b$ secara berulang adalah dominan. Berikut adalah huraian ringkas bagi kedua-dua penafsiran yang diberikan oleh subjek.

- a. Penafsiran bahawa saiz 'b' dalam $a \div b$ adalah sama dengan 'b' dalam $a - b$ secara berulang tetapi tiada kaitan dengan bilangan penolakan berulang $a - c$:*

Saiz 'b' yang terdapat dalam susunan pembahagian $a \div b$ ditafsirkan sebagai sama dengan saiz 'b' yang terdapat dalam penyusunan yang dibentuk bagi ayat $a - b$. Sebagai contoh, bagi ayat $20 \div 5$, saiz setiap kumpulan yang dibentuk adalah lima dan nilai ini sama dengan saiz kumpulan yang dibentuk setiap kali $20 - 5$ dilakukan.

b. Penafsiran bahawa saiz 'b' yang terdapat dalam $a \div b$ adalah sama dengan 'b' dalam $a - b$ dan sama dengan bilangan penolakan $a - c$:

Saiz 'b' yang terdapat dalam susunan pembahagian $a \div b$ ditafsirkan sebagai sama dengan saiz 'b' yang terdapat dalam penyusunan yang dibentuk bagi ayat $a - b$. Ia juga adalah sama dengan bilangan kali 'c' ditolak daripada 'a' sehingga tinggal sifar. Sebagai contoh, bagi ayat $20 \div 5$, saiz setiap kumpulan yang dibentuk adalah lima dan nilai ini sama dengan saiz kumpulan yang dibentuk setiap kali 5 ditolak daripada 20. Ia juga ditafsirkan sebagai sama dengan bilangan tiga ditolak daripada dua puluh.

Makna

Aktiviti makna atau masalah berkotak menggunakan sebuah kotak yang dinamakan 'kotak ajaib'. Masalah berkotak ini pula, membabitkan dua aktiviti, iaitu menentukan proses yang berlaku di dalam kotak yang disediakan dan menentukan nombor yang akan keluar selepas melalui proses pembahagian. Bagi aktiviti ini, sebuah kotak yang mempunyai dua tingkap kecil yang dinamakan A dan B disediakan. Dua keping kad yang mempunyai nombor tertentu

dimasukkan secara berturut-turut ke dalam kotak tersebut melalui tingkap A, dan satu nombor yang lain dikeluarkan melalui tingkap B.

Bagi aktiviti pertama, semua subjek dapat menentukan proses yang berlaku di dalam kotak berdasarkan nombor yang dimasukkan ke dalam kotak dan nombor yang dikeluarkan dari kotak. Mereka menamakan kotak itu sebagai 'bahagi' berdasarkan proses yang berlaku di dalamnya. Subjek juga menunjukkan proses yang berlaku di dalam kotak tersebut secara lukisan. Melalui lukisan yang ditunjuk oleh subjek, didapati hanya seorang subjek yang mewakili nombor kedua yang dimasukkan ke dalam lubang A sebagai bilangan kumpulan, dan nombor yang keluar melalui B sebagai saiz kumpulan. Subjek tersebut menggunakan idea pemetakan semasa mentafsirkan proses yang berlaku di dalam kotak itu. Selain itu, seorang subjek pula menunjukkan kedua-dua cara, iaitu dengan menggunakan idea pengukuran dan pemetakan. Lima orang subjek mewakili nombor kedua yang masuk kotak sebagai saiz kumpulan, manakala nombor yang keluar melalui lubang B pula diwakilkan sebagai bilangan kumpulan, iaitu dengan menggunakan idea pengukuran.

Bagi pembahagian yang menghasilkan baki, seorang orang subjek berpendapat bahawa hanya nombor bulat sahaja yang akan keluar melalui lubang B. Oleh itu, bagi ayat $a \div b$ yang menghasilkan jawapan c dan baki d , hanya c yang akan keluar melalui lubang B. Empat orang subjek pula berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah c dan d , iaitu hasil bahagi dan

baki. Subjek lain menjelaskan bahawa tidak ada sebarang nilai yang akan keluar melalui lubang B kerana kedua-dua nombor yang masuk melalui lubang A menghasilkan baki dalam pembahagian.

Enam orang subjek menulis persamaan $a \div b = c$ bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Seorang subjek mewakili operasi yang berlaku dengan menulis dua persamaan, iaitu $a \div b = c$ dan $a \div c = b$. Selain itu, semua subjek berpendapat bahawa a bahagi a adalah satu ($a \div a = 1$), dan a dibahagi dengan satu adalah a, ($a \div 1 = a$).

Bagi operasi yang membabitkan puluh dan ratus, semua subjek berpendapat bahawa $a0 \div a0 = 1$, $a0 \div 1 = a0$, $a00 \div 1 = a00$, $a00 \div a00 = 1$ dan $a00 \div a = 100$, dimana 'a' mewakili nombor bulat. Sebagai contoh, $20 \div 20 = 1$, $20 \div 1 = 20$, $200 \div 1 = 200$, $200 \div 200 = 1$, dan $200 \div 2 = 100$. Selain itu, subjek juga berpendapat $a0 \div b = c0$ dan $a00 \div b = c00$ berdasarkan $a \div b = c$. Sebagai contoh, $60 \div 3 = 20$ dan $600 \div 3 = 200$ berdasarkan $6 \div 3 = 2$.

Ringkasan

Terdapat tiga penafsiran yang berbeza bagi ayat bahagi tanpa baki, iaitu penafsiran membabitkan idea pengukuran, penafsiran membabitkan idea pemetakan, dan penafsiran yang membabitkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan. Bagi ayat bahagi tanpa

baki, penafsiran membabitkan idea pengukuran adalah penafsiran dominan. Berikut adalah penjelasan tentang ketiga-tiga penafsiran:

a. Penafsiran membabitkan idea pengukuran:

Nombor yang memasuki dan keluar dari kotak ditafsirkan secara idea pengukuran. Subjek menulis ayat matematik dan melukis gambar rajah merujuk nombor yang memasuki dan keluar kotak yang disediakan. Sebagai contoh bagi proses di mana nombor 14 dan 2 memasuki kotak, subjek menulis ayat $14 \div 2 = 7$. Subjek juga melukis empat belas bola kecil yang dibulatkan dalam kumpulan bersaiz dua.

b. Penafsiran membabitkan idea pemetakan:

Nombor yang memasuki dan keluar dari kotak ditafsirkan secara idea pemetakan. Subjek menulis ayat matematik dan melukis gambar rajah merujuk nombor yang memasuki dan keluar kotak yang disediakan. Sebagai contoh bagi proses di mana nombor 14 dan 2 memasuki kotak, subjek menulis ayat $14 \div 7 = 2$, serta melukis empat belas bola kecil yang dibulatkan dalam dua kumpulan bersaiz tujuh.

c. Penafsiran membabitkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan:

Nombor yang memasuki dan keluar dari kotak ditafsir dengan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan. Sebagai contoh bagi proses di mana nombor 14 dan 2 memasuki kotak, subjek menulis ayat matematik $14 \div 7 = 2$ dan $14 \div 7 = 2$. Subjek juga melukis empat belas bola kecil yang dibulatkan dalam dua kumpulan bersaiz tujuh dan empat belas bola yang dibulatkan dalam tujuh kumpulan bersaiz dua.

Bagi ayat bahagi yang mempunyai baki, $a \div b = c$ baki d , tiga penafsiran yang berbeza diberikan oleh subjek, iaitu penafsiran bahawa tiada jawapan yang akan keluar melalui lubang B, penafsiran bahawa hanya 'c' yang akan keluar melalui lubang B, dan penafsiran bahawa 'c' akan keluar bersama-sama dengan 'd'. Bagi pembahagian yang mempunyai baki, majoriti subjek mentafsirkan bahawa tiada jawapan yang akan keluar melalui lubang B. Berikut adalah huraian ringkas bagi ketiga-tiga penafsiran tersebut.

d. Penafsiran bahawa tiada jawapan yang akan keluar melalui lubang B:

Bagi 'a' dan 'b' yang memasuki kotak dan menghasilkan jawapan 'c' baki 'd' dalam pembahagian, tiada jawapan ditafsirkan akan keluar melalui lubang B. Sebagai contoh, bagi nombor 8 dan 3 yang dimasukkan ke dalam kotak, subjek mentafsirkan bahawa tiada sebarang nombor yang akan keluar melalui lubang B.

e. Penafsiran bahawa hanya 'c' yang akan keluar melalui B:

Bagi 'a' dan 'b' yang memasuki kotak dan menghasilkan jawapan 'c' baki 'd' dalam pembahagian, hanya 'c' ditafsirkan akan keluar melalui lubang B. Sebagai contoh, bagi nombor 8 dan 3 yang memasuki kotak, subjek mentafsirkan hanya angka 2 yang akan keluar melalui lubang B.

f. Penafsiran bahawa 'c' dan baki 'd' akan keluar akan keluar melalui lubang B:

Bagi 'a' dan 'b' yang memasuki kotak dan menghasilkan jawapan 'c' baki 'd' dalam pembahagian, 'c' dan baki 'd'

ditafsirkan akan keluar melalui tingkap B. Sebagai contoh, bagi nombor 8 dan 3 yang memasuki kotak, subjek mentafsirkan angka 2 dan baki 2 akan keluar melalui tingkap yang dilabelkan sebagai B.

Tafsiran

Aktiviti tafsiran membabitkan dua komponen. Bagi aktiviti pertama, subjek diminta menulis ayat darab berdasarkan ayat bahagi yang diberi; dan menulis ayat bahagi berdasarkan ayat darab yang diberi. Dalam aktiviti pertama, empat ayat bahagi dan empat ayat darab dikemukakan kepada subjek untuk ditafsirkan. Dalam aktiviti kedua pula, subjek diminta mentafsirkan ayat bahagi dan ayat darab yang membabitkan angka sifar dan satu.

Dalam aktiviti pertama, tiga orang subjek mewakili ayat matematik $a \div b = c$ dengan menulis ayat darab $c \times b = a$. Empat orang subjek pula menulis dua ayat darab, iaitu $c \times b = a$ dan $b \times c = a$ bagi mewakili ayat matematik $a \div b = c$.

Apabila diminta mewakili ayat matematik bahagi dan darab secara lukisan seorang subjek berpendapat bahawa b merujuk bilangan kumpulan, manakala c pula adalah saiz kumpulan. Selain itu, seorang subjek berpendapat bahawa b atau c boleh mewakili saiz

kumpulan atau bilangan kumpulan. Subjek lain yang menggunakan idea pengukuran menjelaskan bahawa b mewakili saiz kumpulan manakala c mewakili bilangan kumpulan.

Bagi ayat matematik yang menghasilkan baki, iaitu $a \div b = c$ baki d , dua subjek berpendapat bahawa hanya c perlu ditulis semasa menulis ayat darab. Mereka menulis $b \times c = a$ dan mengabaikan d . Dua orang subjek pula berpendapat bahawa $b \times c$ baki $d = a$ perlu ditulis bagi mewakili pembahagian yang mempunyai baki. Subjek lain pula berpendapat baki d juga perlu diambil kira semasa menulis ayat darab, tetapi tidak dapat menunjukkan ayat darab tersebut.

Dalam aktiviti kedua, tiga orang subjek berpendapat bahawa 'sifar' bahagi dengan a menghasilkan jawapan sifar, ($0 \div a = 0$), sebab menurut mereka sifar bermaksud tiada nilai untuk dibahagi. Seorang subjek pula berpendapat bahawa 'sifar' bahagi dengan a , ($0 \div a$), tidak boleh diselesaikan sebab sifar tidak mempunyai sebarang nilai. Subjek lain menjelaskan bahawa semua operasi yang melibatkan sifar adalah sifar, maka 'sifar' bahagi a adalah sifar ($0 \div a = 0$).

Bagi ayat $a \div 0$ pula, lima orang subjek berpendapat bahawa a bahagi sifar adalah sifar, ($a \div 0 = 0$), sebab menurut mereka, operasi yang membabitkan sifar adalah sifar. Selain itu, dua orang subjek pula, berpendapat bahawa a bahagi sifar adalah a ($a \div 0 = a$) sebab sifar dalam persamaan tersebut bermaksud 'a tidak dibahagi'.

Selain itu, semua subjek berpendapat bahawa a bahagi dengan a adalah satu ($a \div a = 1$) dan a bahagi dengan satu adalah a ($a \div 1 = a$). Subjek juga berpendapat bahawa ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi. Bagi ayat $a \times 0$, seorang subjek berpendapat bahawa darab dengan sifar bermaksud tidak didarab. Beliau memberikan jawapan $a \times 0 = a$, kerana nombor yang tidak didarab akan menghasilkan nombor itu sendiri. Subjek lain berpendapat $a \times 0 = 0$ kerana operasi darab yang membabitkan sifar adalah sifar.

Ringkasan

Terdapat dua penafsiran bagi ayat matematik $a \div b = c$, iaitu penafsiran dengan menulis ayat darab $c \times b = a$, dan penulisan ayat darab $c \times b = c$ dan $b \times c = a$. Majoriti subjek hanya menulis ayat $c \times b = a$. Berikut adalah huraian ringkas tentang penafsiran yang diberikan oleh subjek.

a. Penafsiran dengan menulis ayat darab $c \times b = a$:

Ayat bahagi $a \div b = c$ yang dikemukakan ditafsirkan dengan menulis ayat darab $c \times b = a$. Sebagai contoh, bagi ayat bahagi matematik $28 \div 4 = 7$, penafsiran yang diberikan oleh subjek adalah $7 \times 4 = 28$

b. *Penafsiran dengan menulis ayat darab* $c \times b = a$,
 dan $b \times c = a$

Ayat bahagi $a \div b = c$, ditafsirkan dengan menulis ayat darab $c \times b = a$ dan ayat $b \times c = a$. Sebagai contoh, bagi ayat bahagi matematik $28 \div 4 = 7$, penafsiran yang diberikan oleh subjek adalah $7 \times 4 = 28$, dan $4 \times 7 = 28$.

Bagi ayat matematik yang membabitkan 0 dan 1, penafsiran yang berikut diberikan oleh subjek. ('a' mewakili nombor bulat):

- i. $0 \div a = 0$
- ii. $0 \div a$ tidak boleh diselesaikan kerana tiada nilai untuk dibahagi
- iii. $a \div 0 = a$
- iv. $a \div 0 = 0$, kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar
- v. $a \times 0 = a$, kerana darab dengan sifar bermaksud tidak didarab

- vi. $a \times 0 = 0$, kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar

- vii. $a \div 1 = a$ dan $a \div a = 1$

Penyelesaian Masalah

Dalam aktiviti penyelesaian masalah yang membabitkan pembahagian tanpa baki dan pembahagian yang menghasilkan baki, dua keping gambar rajah yang berbentuk diskret dan selanjar dikemukakan kepada subjek. Subjek diminta membahagi lukisan yang terdapat pada kedua-dua gambar rajah tersebut berdasarkan pembahagi yang disebut oleh pengkaji.

Pembahagian Tanpa Baki

Bagi kedua-dua gambar rajah diskret dan selanjar yang dikemukakan, subjek memberikan penyelesaian yang sama. Bagi pembahagian $a \div b$, seorang subjek, yang menggunakan idea pemetakan berpendapat bahawa 'a' perlu dibahagi kepada 'b' kumpulan yang sama saiz. Dia membahagi gambar rajah yang diberi dengan memastikan bilangan kumpulan yang terbentuk adalah sama dengan 'b'. Selain itu, seorang subjek yang menggunakan kedua-dua

idea pula berpendapat bahawa bagi pembahagian $a \div b$, 'b' boleh mewakili saiz kumpulan atau bilangan kumpulan. Enam orang subjek pula yang menggunakan idea pengukuran berpendapat bahawa bagi pembahagian $a \div b$, 'b' merujuk saiz kumpulan. Mereka membulatkan kumpulan yang bersaiz 'b' pada gambar rajah yang diberi.

Ringkasan

Terdapat tiga kaedah penyelesaian yang digunakan oleh subjek bagi menyelesaikan ayat bahagi tanpa baki. Kaedah yang digunakan adalah penyelesaian yang membabitkan idea pengukuran, penyelesaian yang membabitkan idea pemetakan, dan penyelesaian yang membabitkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan. Bagi ayat bahagi tanpa baki, penyelesaian membabitkan idea pengukuran adalah dominan. Berikut adalah huraian ringkas bagi ketiga-tiga kaedah yang digunakan oleh subjek.

a. Penyelesaian membabitkan idea pengukuran.

Bagi pembahagian yang membabitkan ' $\div b$ ' subjek melukis bulatan yang bersaiz 'b'. Sebagai contoh, apabila subjek diminta untuk bahagi empat, subjek membulatkan guli-guli yang terdapat pada gambar rajah dengan memastikan setiap bulatan mempunyai empat guli.

b. Penyelesaian membabitkan idea pemetakan.

Bagi pembahagian yang membabitkan ' $\div b$ ', subjek mengagihkan objek yang terdapat dalam gambar rajah kepada 'b' bahagian. Sebagai contoh, apabila subjek diminta untuk bahagi empat, subjek membahagikan guli-guli yang terdapat pada gambar rajah kepada empat bahagian.

c. Penyelesaian membabitkan idea pengukuran dan pemetakan.

Bagi pembahagian yang membabitkan ' $\div b$ ', subjek melukis bulatan yang bersaiz 'b' dan juga mengagihkan kepada 'b' bahagian. Sebagai contoh, apabila subjek diminta untuk bahagi empat, subjek membulatkan guli-guli yang terdapat pada gambar rajah dengan memastikan setiap bulatan mempunyai empat guli, dan mengagihkan guli-guli tersebut kepada empat bahagian.

Pembahagian Yang Menghasilkan Baki

Bagi pembahagian yang menghasikan baki, enam orang subjek berpendapat bahawa saiz setiap kumpulan yang dibentuk perlu sama dengan pembahagi. Mereka membulatkan kumpulan yang bersaiz 'b'

pada gambar rajah yang diberi. Seorang subjek pula berpendapat bahawa pembahagi merujuk bilangan kumpulan yang sama saiz yang boleh dibentuk. Subjek tersebut gagal menunjukkan sebarang pembahagian bagi ayat matematik yang diberi.

Seorang subjek menganggap bahawa bagi $a \div b = c$ baki d , 'b' dan 'c' boleh mewakili samada saiz kumpulan atau bilangan kumpulan. Dia menunjukkan kedua-dua kaedah pembahagian, iaitu yang mempunyai kumpulan bersaiz sama dengan pembahagi dan yang mempunyai bilangan kumpulan yang sama dengan pembahagi. Selain itu, dua orang subjek berpendapat bahawa hanya kumpulan yang mempunyai saiz yang sama dengan pembahagi sahaja diambil kira sebagai penyelesaiannya. Menurut mereka lagi, kumpulan yang mempunyai saiz selain dari 'b' hendaklah diabaikan. Manakala, subjek lain pula berpendapat bahawa penyelesaian bagi pembahagian ayat $a \div b$ yang menghasilkan jawapan 'c' dan baki 'd' adalah c baki d . Mereka menggunakan idea pengukuran dan membulatkan kumpulan bersaiz 'b'. Gambar yang tidak bersaiz 'b' dikira sebagai baki.

Ringkasan

Terdapat tiga kaedah penyelesaian yang digunakan oleh subjek bagi pembahagian yang mempunyai baki, iaitu penyelesaian yang mengabaikan baki, penyelesaian yang mengambil kira baki, dan tiada penyelesaian. Dalam konteks ini, pembahagian yang mengambil kira

baki adalah dominan. Berikut adalah huraian ringkas bagi ketiga-tiga kaedah penyelesaian yang digunakan oleh subjek:

d. Penyelesaian mengabaikan baki

Bagi pembahagian dengan baki, penyelesaian dilakukan dengan menggunakan idea pengukuran. Hanya kumpulan yang bersaiz sama dengan pembahagi sahaja diambil kira sebagai jawapan. Sebagai contoh, bagi $36 \div 5$, hanya kumpulan yang bersaiz lima sahaja diambil kira sebagai jawapan. Ayat matematik bagi $a \div b = c$ baki d , ditulis sebagai $36 \div 5 = 7$ sahaja.

e. Penyelesaian mengambil kira baki

Bagi pembahagian dengan baki, penyelesaian dilakukan dengan menggunakan idea pengukuran. Jawapan ditulis dengan mengambil kira baki. Sebagai contoh, bagi $36 \div 5$, kumpulan bersaiz lima dibentuk. Jawapan ditulis sebagai $36 \div 5 = 7$ baki 1.

f. Tiada penyelesaian

Subjek cuba diselesaikan dengan menggunakan idea pemetakan. Oleh kerana sukar untuk membahagi 'a' kepada 'b' bahagian, subjek gagal menyelesaikan masalah yang diberi dan berpendapat bahawa soalan tersebut tidak boleh diselesaikan. Sebagai contoh, bagi $36 \div 5$, subjek tidak dapat membahagi tiga puluh enam guli kepada lima bahagian.

Tafsiran Bahagi Sebagai Skim

Umumnya, tafsiran tentang bahagi yang dibuat oleh subjek boleh dikelaskan mengikut dua bahagian yang utama, iaitu ayat matematik dan gambar rajah. Ayat matematik membabitkan tafsiran yang dibuat oleh subjek terhadap ayat bahagi tanpa baki dan ayat bahagi dengan baki yang diberikan oleh pengkaji. Manakala gambar rajah pula membabitkan tafsiran subjek terhadap gambar rajah berbentuk diskrit dan selanjur yang disediakan oleh pengkaji. Subjek mentafsir ayat matematik yang diberi kepada mereka dengan menggunakan empat kaedah yang utama, iaitu melukis gambar rajah, mewakili ayat tersebut dengan menggunakan bahan maujud, membandingkan ayat itu dengan ayat tolak, dan menulis ayat darab berdasarkan ayat bahagi tersebut. Manakala, gambar rajah pula ditafsir dengan menggunakan dua kaedah, iaitu menulis ayat matematik

berdasarkan gambar rajah yang diberi dan menanda pada gambar rajah yang beri mengikut pembahagian yang perlu dilakukan oleh subjek. Jadual 9 yang berikut merumuskan secara ringkas aktiviti penafsiran subjek terhadap bahagi.

Berdasarkan tafsiran terhadap tugas yang diberi kepada subjek dalam lima konteks yang berbeza sebanyak empat skim telah dikenal pasti, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, skim penolakan berulang, dan skim songsangan kepada darab. Berikut adalah penjelasan bagi keempat-empat skim tersebut.

Jadual 10:

Aktiviti Penafsiran Terhadap Bahagi

Asas	Aktiviti Penafsiran
Ayat matematik i. tanpa baki ii. dengan baki	Melukis gambar rajah
	Mewakilkkan dengan menggunakan bahan maujud
	Membandingkan dengan ayat tolak
	Menulis ayat darab
Gambar rajah i. diskret ii. selanjar	Menulis ayat matematik
	Menanda pada gambar rajah yang disediakan berdasarkan pembahagian yang perlu mereka dilakukan

Skim pengukuran

Skim pengukuran membabitkan pembahagian yang dibuat menggunakan idea pengukuran di mana bagi ayat $a \div b = c$, 'b' merupakan saiz kumpulan yang dibentuk, manakala 'c' pula merupakan bilangan kumpulan bersaiz 'b' yang dapat dihasilkan. Skim ini digunakan oleh majoriti subjek dalam semua aktiviti yang dikemukakan kepada mereka. Sebagai contoh, bagi $12 \div 4 = 3$, subjek membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Berikut adalah urutan peristiwa yang ditunjuk oleh subjek bagi skim pengukuran.

- Pencetus: Situasi membabitkan ayat matematik $a \div b$, di mana 'b' diasimilasikan sebagai bilangan objek yang perlu dikumpulkan dalam satu longgokan.
- Tindakan: Menghitung sebanyak 'a' butang daripada satu kotak yang mengandungi lebih kurang lima puluh biji butang.
Membentuk kumpulan-kumpulan kecil yang bersaiz 'b'.
Menghitung bilangan kumpulan yang dapat dibentuk sebagai penyelesaian bagi $a \div b$.
- Hasil: c, iaitu bilangan kumpulan bersaiz b yang dapat dibentuk

Bagi mewakili pembahagian $a \div b$, subjek menggunakan idea pengukuran iaitu, membentuk sebanyak 'c' kumpulan yang bersaiz 'b' dengan menggunakan butang-butang yang disediakan. Jawapan bagi pembahagian tersebut pula, diperoleh dengan menghitung bilangan kumpulan bersaiz 'b' yang beliau dapat

dibentuk. Sebagai contoh, bagi ayat $12 \div 4$, subjek membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Selain itu, subjek juga melukis 'c' kumpulan yang mempunyai 'b' objek di dalamnya. Penyelesaian bagi $a \div b$ juga diperoleh dengan menghitung bilangan kumpulan bersaiz 'b' yang dilukis. Sebagai contoh, bagi $12 \div 4$, subjek melukis tiga kumpulan yang mempunyai empat objek di dalamnya. Berikut adalah sebahagian daripada petikan PW121, yang menjelaskan kaedah yang digunakan oleh subjek, iaitu dengan idea pengukuran.

Petikan 1: Sedutan Petikan PW121

P: (Menunjukkan kad yang tertulis $12 \div 4$) Boleh Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini?

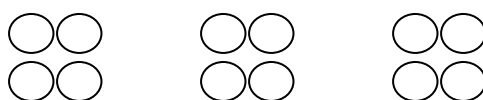
S: Dua belas bahagi empat.

P: Kenapa kata dua belas bahagi empat?

S: Dua belas bahagi empat dapat tiga (Subjek menunjukkan angka-angka pada ayat $12 \div 4$ semasa menjawab).

P: Boleh tak Sufian tunjuk dengan butang-butang ni macam mana dua belas bahagi empat?

S: (Subjek mengira dua belas dan kemudian menyusun butang-butang tersebut dalam tiga kumpulan):



P: Kenapa Sufian kata ini dua belas bahagi empat?

S: Ada empat - empat (Subjek menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan semasa menyebut empat)

P: Dua belas pada ayat tadi rujuk pada apa di sini (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).

S: Semua.

P: Yang ini (menunjukkan angka '4' pada ayat bahagi?)

S: Empat butang (menunjukkan empat butang yang telah dikumpulkan).

P: Ada berapa kumpulan di sini?

S: Tiga.

P: Tiga tu apa ?

- S: Jawapan dia.
 P: Jawapan bagi apa?
 S: Jawapan dua belas bahagi empat.
 P: Kenapa Sufian susun macam ni (menunjukkan empat butang yang dikumpulkan)?
 S: Senang nampak.
 P: Kenapa Sufian letak empat butang sekali seperti ini (menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan)?
 S: Sebab bahagi empat.

Subjek juga menggunakan idea yang sama bagi pembahagian yang menghasikan baki. Bagi ayat $a \div b = c$ baki d , subjek membentuk 'c' kumpulan bersaiz 'b'. Baki 'd' yang terdapat dalam pembahagian itu dikira sebagai 'baki' ataupun diabaikan. Sedutan sebahagian petikan PW222a yang berikut menggambarkan idea pengukuran yang digunakan oleh subjek.

Petikan 2: Sedutan Petikan PW222a

- P: Cuba baca yang ini. (Menunjukkan kad yang tertulis ayat ' $8 \div 3$ ').
 S: Lapan bahagi tiga.
 P: Boleh tunjuk dengan butang-butang ini (menunjukkan tiga puluh enam biji butang) bagi lapan bahagi tiga?
 S: (Subjek mengira dan menyusun butang-butang tersebut seperti di bawah):



- P: Boleh beritahu cikgu apa yang Aimi buat?
 S: Lapan bahagi tiga (subjek menunjukkan susunannya).
 P: Kenapa yang ni ada dua yang lain ada tiga? (Menunjukkan dua butang yang diasingkan)
 S: Tak cukup.
 P: Apa yang tak cukup?

S: Butang tu tak cukup.
 P: Tak cukup berapa?
 S: Tiga.
 P: Tiga? Sepatutnya ada berapa?
 S: Tiga.
 P: Kenapa mesti ada tiga?
 S: Sebab lapan bahagi tiga.

Dalam mewakili $8 \div 3$, kebanyakan subjek membentuk kumpulan bersaiz tiga dengan menggunakan butang yang disediakan. Subjek hanya menghitung kumpulan yang bersaiz tiga sahaja sebagai penyelesaian, manakala butang yang tidak dapat membentuk satu kumpulan dikira sebagai baki, atau diabaikan. Selain itu, subjek juga melukis lapan bola dan membulatkan setiap tiga bola merujuk $8 \div 3$. Dua biji bola lagi yang tidak dibulatkan diambil kira sebagai baki.

Bagi gambar rajah yang diberikan, subjek mentafsir dengan menanda pada gambar rajah tersebut, membentuk kumpulan berdasarkan pembahagian yang perlu dilakukan. Berikut adalah urutan peristiwa bagi skim pengukuran yang digunakan oleh subjek.

Pencetus: Situasi membabitkan angka 'b' yang terdapat selepas perkataan 'bahagi', diasimilasikan sebagai bilangan guli yang perlu ditanda dalam satu kumpulan.

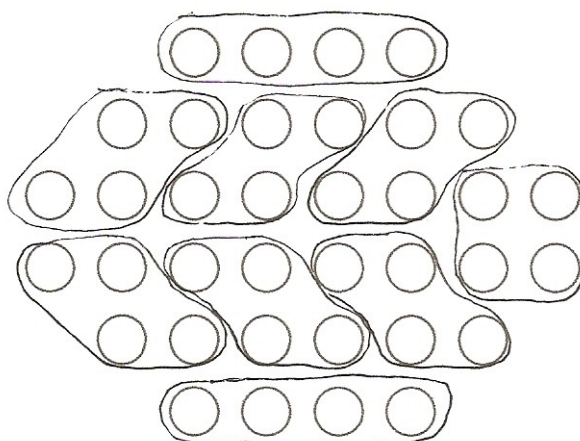
Tindakan: Menghitung bilangan guli yang terdapat pada gambar rajah.
 Menghitung sebanyak 'b' guli dan membulatkannya.
 Menghitung bilangan kumpulan bersaiz 'b' yang dapat dibentuk sebagai penyelesaian bagi 'bahagi b'.

Hasil: c kumpulan bersaiz b

Bagi mewakili ayat ‘bahagi b’ subjek membulatkan sebanyak ‘b’ guli pada gambar rajah yang disediakan oleh pengkaji berdasarkan pembahagian yang perlu dilakukan. Sebagai contoh, bagi ‘bahagi empat’, subjek membentuk bulatan bersaiz empat pada gambar rajah yang diberi. Jawapan pula diperolehi dengan menghitung bilangan bulatan yang dapat dibentuk. Sedutan sebahagian daripada petikan PM751a yang berikut menggambarkan cara subjek menggunakan idea pengukuran sebagai skim.

Petikan 3 : Sedutan Petikan PM751a

- P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Di sini ada gambar guli. Cikgu nak Nurul bahagi empat guli-guli ini?
 S: (Subjek menghitung guli-guli tersebut secara senyap agak lama.).
 P: Bahagi empat ...boleh lukis pada gambar tu.
 S: (Subjek melukis pada gambar yang beri seperti berikut):



- P: Dah siap?
 S: (Subjek mengangguk).
 P: Ada berapa guli semua sekali?
 S: (Subjek menghitung dan menjawab). Tiga puluh enam.
 P: Macam mana Nurul tahu ada tiga puluh enam?

S: Kira.

P: Tiga puluh enam bahagi empat dapat berapa?

S: (Subjek membuat pembahagian panjang dan menjawab).
Sembilan.

$$\begin{array}{r} \overline{) 36} \\ - 36 \\ \hline 0 \end{array}$$

P: Kalau rujuk pada gambar rajah, mana jawapannya?

S: (Subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang telah dilukisnya).

P: Ada berapa kesemuanya?

S: Sembilan.

P: Ada berapa guli dalam setiap bulatan?

S: Empat.

P: Kenapa Nurul kumpulkan empat guli?

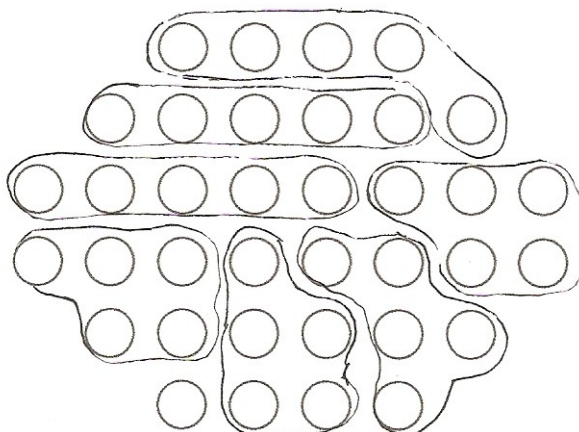
S: Sebab bahagi empat.

Bagi ayat yang menghasilkan baki, subjek juga menggunakan kaedah yang sama, iaitu membentuk bulatan yang bersaiz 'b'. Sebagai contoh, apabila pengkaji menyebut, 'bahagi lima', subjek membentuk bulatan bersaiz lima, dan memberikan jawapan sebagai tujuh dengan mengabaikan baki. Sedutan sebahagian petikan PM652 yang berikut menunjukkan cara subjek menggunakan idea pengukuran dalam menyelesaikan masalah yang diberi.

Petikan 4: Sedutan Petikan PM651

P: Sekarang boleh tak Afiq bahagi lima?

S: (Subjek membulatkan gambar rajah yang diberi seperti berikut):



P: Dah bahagi lima?

S: Dah.

P: Boleh bertahu cikgu, kenapa Afiq kumpulkan lima guli dalam satu kumpulan?

S: Sebab yang ini nak bahagi lima. Kena kumpul lima guli

P: Di sini ada satu guli yang Afiq tak bulatkan. Kenapa agaknya? (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan)?

S: Yang tu lebih. Baki.

P: Baki macam mana?

S: Semua guli bahagi lima ada baki satu.

P: Semua ada berapa?

S: Tiga puluh enam.

P: Tiga puluh enam boleh bahagi lima tak?

S: Boleh. (Subjek menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} \overline{) 36} \\ \underline{- 35} \\ \overline{) 1} \end{array}$$

Bagi menunjukkan bagaimana tiga puluh enam guli dibahagi lima, subjek membentuk tujuh bulatan bersaiz lima. Beberapa orang subjek mengabaikan baki yang terhasil, manakala subjek lain menyebutnya sebagai tujuh baki satu. Dalam menyelesaikan masalah

yang diberi kebanyakan subjek menggunakan idea pengukuran sebagai skim.

Skim Pemetakan

Skim pemetakan membabitkan pembahagian yang dibuat menggunakan idea pemetakan dimana bagi ayat $a \div b = c$, 'c' merupakan saiz kumpulan yang dibentuk, manakala 'b' pula merupakan bilangan kumpulan bersaiz 'c' yang dapat dihasilkan. Skim ini digunakan oleh tiga orang subjek dalam semua aktiviti yang disediakan untuk mereka. Sebagai contoh, bagi $12 \div 4 = 3$, subjek membentuk empat kumpulan bersaiz tiga. Berikut merupakan urutan peristiwa yang ditunjuk oleh subjek bagi skim pemetakan.

Pencetus: Situasi membabitkan ayat matematik $a \div b$, dimana b diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan yang perlu dibentuk.

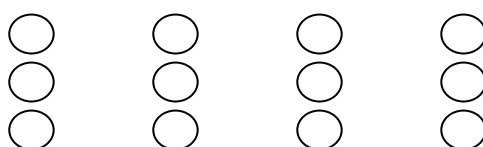
Tindakan: Menghitung sebanyak 'a' butang daripada satu kotak yang mengandungi lebih kurang lima puluh biji butang.
Mengagihkan butang-butang tersebut kepada 'b' bahagian
Menghitung bilangan butang yang terdapat dalam setiap kumpulan sebagai penyelesaian bagi $a \div b$.

Hasil: c iaitu bilangan objek yang terdapat dalam setiap kumpulan

Tiga orang subjek mewakili $a \div b$ dengan menggunakan idea pemetakan di mana sebanyak 'b' kumpulan yang mempunyai saiz objek sama dibentuk. Sebagai contoh, bagi $12 \div 4$, subjek membentuk empat kumpulan yang mempunyai tiga objek di dalamnya. Hasil bahagi ayat matematik tersebut diperoleh dengan menghitung bilangan objek yang terdapat dalam setiap kumpulan. Sedutan sebahagian petikan PW321 yang berikut menunjukkan cara subjek menggunakan idea pemetakan sebagai skim bagi penyelesaian masalah yang diberi.

Petikan 5: Sedutan Petikan PW321

- P: (Menunjukkan kad yang tertulis $12 \div 4$) Boleh Azam beritahu apa yang tertulis pada kad ini?
 S: Dua belas bahagi empat.
 P: Dua belas bahagi empat. Kenapa kata dua belas bahagi empat?
 S: (Sambil ketawa). Ini kan dua belas bahagi empat.
 P: Boleh Azam tunjuk bagaimana dua belas bahagi empat menggunakan butang-butang ni (memberikan satu kotak butang)?
 S: (Subjek menghitung dua belas dan kemudian menyusun seperti berikut):



- P: Dah siap?
 S: Dah.
 P: Boleh Azam jelaskan apa yang Azam buat ni?
 S: Dua belas ... bahagi empat, ada empat. (Subjek menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan semasa menyebut empat)

P: Dua belas pada ayat ini (menunjukkan ayat $12 \div 4$) rujuk pada apa dalam susunan ni (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).

S: Semua butang.

P: Ini (menunjukkan angka '4' pada ayat bahagi?)

S: Empat baris (menunjukkan empat kumpulan yang telah disusun).

P: Ada berapa butang dalam setiap kumpulan?

S: Tiga.

P: Kenapa Azam letak tiga butang dalam setiap kumpulan?

S: Sebab dua belas nak letak dalam empat baris.

P: Kenapa tak letak empat butang dalam satu baris?

S: Tak boleh. Nanti tak cukup untuk empat baris.

P: Mesti letak empat baris ke?

S: Ya, sebab bahagi empat.

Dalam petikan di atas, subjek hanya menggunakan idea pemetakan bagi menyelesaikan masalah $12 \div 4$. Subjek juga berpendapat bahawa empat butang tidak boleh diletakkan dalam satu baris kerana menurut subjek, bagi soalan yang membabitkan 'bahagi empat', objek yang disediakan perlu dikumpulkan dalam empat bahagian. Secara umum, bagi ayat bahagi $a \div b$ subjek yang menggunakan idea pemetakan, membentuk 'b' kumpulan bersaiz sama.

Skim penolakan berulang

Skim penolakan berulang membabitkan pembahagian yang dibuat menggunakan idea penolakan yang dilakukan secara berulang. Bagi ayat $a \div b = c$, sebanyak 'b' dikeluarkan secara berulang-ulang daripada 'a' sehingga kesemua 'a' habis digunakan. Di

sini 'c' merupakan bilangan penolakan berulang yang dilakukan. Penolakan berulang boleh juga dilakukan dengan menolak sebanyak 'c' daripada 'a' secara berulang. Skim ini digunakan oleh semua subjek dalam satu aktiviti yang disediakan oleh pengkaji untuk mereka. Dalam aktiviti lain, kebanyakan subjek hanya menggunakan skim pengukuran atau skim pemetakan sahaja. Sebagai contoh, bagi $20 \div 5$, subjek mengeluarkan lima objek secara berulang daripada dua puluh. Berikut merupakan urutan peristiwa yang ditunjuk oleh subjek bagi skim penolakan berulang.

- Pencetus: Situasi membabitkan ayat matematik $a \div b$, dimana b diasimilasikan sebagai bilangan objek yang perlu dikeluarkan daripada 'a'.
- Tindakan: Menghitung sebanyak 'a' penyedut minuman daripada satu pek penyedut minuman yang disediakan oleh pengkaji.
Menghitung dan mengeluarkan sebanyak 'b' penyedut minuman daripada himpunan 'a'.
Mengulang penolakan sehingga kesemua 'a' digunakan
Menghitung bilangan penolakan yang dilakukan sehingga kesemua 'a' digunakan.
- Hasil: c iaitu bilangan penolakan yang dilakukan

Subjek mewakili $a \div b$ dengan menggunakan idea penolakan berulang di mana sebanyak 'b' objek dikeluarkan secara berulang daripada 'a'. Sebagai contoh, bagi $17 \div 6$, subjek mengeluarkan enam objek secara berulang sehingga objek yang tinggal kurang daripada enam. Hasil bahagi ayat matematik tersebut

diperoleh dengan menghitung bilangan penolakan yang dilakukan. Sedutan sebahagian daripada Petikan PW528 yang berikut menunjukkan cara subjek menggunakan idea penolakan berulang sebagai skim bagi menyelesaikan masalah yang diberi.

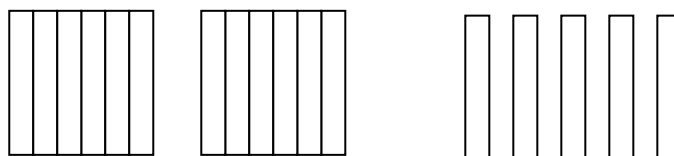
Petikan 6: Sedutan Petikan PW528

P: Cuba Syahirah baca (menunjukkan kad yang tertulis $17 \div 6$)?

S: Tujuh belas bahagi enam.

P: Boleh tunjuk ayat tu macam tadi?

S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?

S: Dua kumpulan ada enam penyedut minuman, dan lima baki (menunjukkan lima penyedut minuman yang diletakkan berasingan).

P: Jawapannya apa?

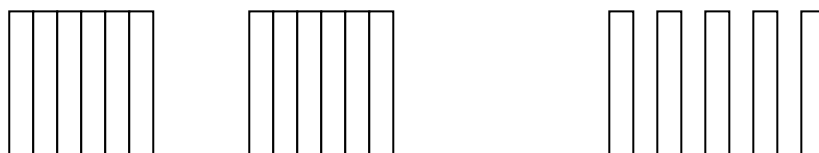
S: Dua baki lima.

P: Sekarang, cuba baca yang ini (menunjukkan ayat $17 - 6$)?

S: Tujuh belas tolak enam.

P: Boleh tunjuk ayat tadi dengan penyedut minuman yang lain?

S: (Subjek mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang dan mengumpulkannya secara berasingan):



P: Dah siap?

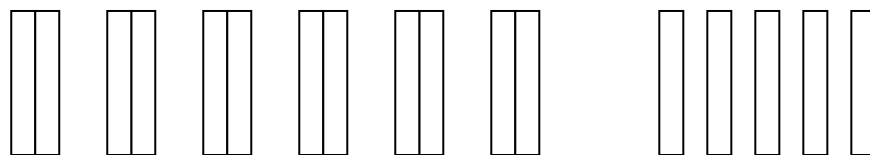
S: Dah.

P: Syahirah tolak berapa?

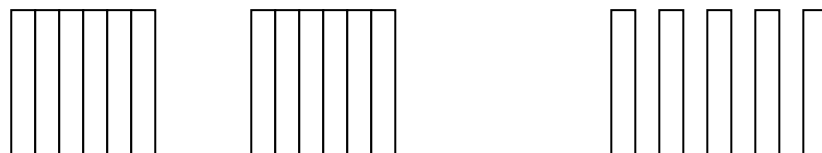
S: Enam.

P: Berapa kali Syahirah keluarkan enam?

- S: Dua kali, yang ini baki (menunjukkan lima penyedut minuman yang diasingkan).
 P: Kenapa Syahirah kata itu baki?
 S: Sebab ada lima saja.
 P: Kumpulan lain ada berapa?
 S: Kumpulan lain ada enam.
 P: Apa kaitan susunan untuk bahagi dengan tolak?
 S: Sama.
 P: Sama macam mana? Apa kaitan bahagi dengan tolak?
 S: Ayat bahagi sama dengan ayat tolak enam dua kali.
 P: Syahirah ada cara lain nak tunjuk ayat bahagi tadi?
 S: (Subjek mengangguk dan menyusun seperti berikut):



- P: Ada berapa kumpulan?
 S: Enam.
 P: Kenapa buat enam kumpulan?
 S: Sebab tujuh belas bahagi enam.
 P: Jawapannya?
 S: Dua baki lima.
 P: Yang mana baki?
 S: Yang ini (menunjukkan lima penyedut minuman).
 P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh belas bahagi enam?
 S: ...Cara tolak.
 P: Boleh tunjuk cara tolak?
 S: (Subjek menunjukkan seperti berikut):



- P: Ada berapa kumpulan?
 S: Dua kumpulan yang ada enam penyedut minuman lima lagi baki.
 P: Yang ni sama tak dengan tadi?
 S: Susunan tak sama, tapi bahagi enam sama dengan tolak.
 P: Tolak berapa?
 S: Tolak enam.
 P: Berapa kali tolak enam?
 S: Dua kali.

Dalam petikan di atas, subjek membentuk dua kumpulan bersaiz enam bagi mewakili $17 \div 6$. Subjek juga menjelaskan bahawa lima penyedut minuman yang tinggal merupakan baki. Selain itu, subjek juga menunjukkan secara penolakan iaitu; tujuh belas tolak enam dengan mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang daripada tujuh belas penyedut yang asal. Selain itu, subjek juga membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan lima penyedut minuman lagi diasingkan sebagai baki. Subjek berpendapat bahawa susunan yang beliau bentuk bagi mewakili ayat bahagi $17 \div 6$ adalah sama dengan susunan yang terhasil apabila enam penyedut minuman dikeluarkan secara berulang sebanyak dua kali.

Selain itu, subjek juga menunjukkan satu lagi susunan bagi mewakili tujuh belas bahagi enam iaitu, dengan membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan lima penyedut minuman diasingkan sebagai baki. Bagaimanapun, bagi mewakili ayat tolak subjek membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan lima penyedut minuman sebagai baki. Subjek berpendapat walaupun bentuk susunan tidak sama tetapi ayat bahagi boleh diwakili dengan penolakan secara berulang.

Skim songsangan kepada darab

Skim songsangan kepada darab membabitkan penafsiran pembahagian sebagai songsangan kepada ayat darab. Bagi ayat $a \div b = c$, 'a' ditafsirkan sebagai hasil darab, manakala 'b' dan 'c' ditafsir sebagai pendarab. Skim ini digunakan oleh semua subjek dalam satu aktiviti yang disediakan oleh pengkaji untuk mereka. Sebagai contoh, bagi ayat $28 \div 4$, subjek menentukan hasil bahagi ayat tersebut terlebih dahulu, dan kemudian menulis ayat darab $7 \times 4 = 28$. Berikut merupakan urutan peristiwa yang ditunjuk oleh subjek bagi skim songsangan kepada darab.

Pencetus: Situasi membabitkan ayat matematik $a \div b$, dimana a diasimilasikan sebagai hasil darab, manakala b pula diasimilasikan sebagai pendarab.

Tindakan: Membahagi 'a' kepada 'b' untuk menentukan nilai 'c'
Menulis 'c' dan 'b' sebagai pendarab.
Melengkapkan ayat darab dengan menyamakannya dengan 'a'.

Hasil: $c \times b = a$

Subjek menafsirkan $a \div b$ dengan menggunakan idea songsangan kepada darab, di mana 'b' ditafsir sebagai pendarab manakala, 'a' ditafsir sebagai hasil darab. Sebagai contoh, bagi $28 \div 4$, subjek menentukan hasil bahagi dengan melukis gambar rajah. Hasil bahagi ayat matematik tersebut kemudian digunakan sebagai

pendarab dan menulis ayat darab $7 \times 4 = 28$. Subjek juga menulis ayat darab $4 \times 7 = 28$ apabila diminta untuk menulis ayat darab dengan cara lain. Sedutan petikan yang berikut memaparkan bagaimana subjek mentafsirkan ayat bahagi sebagai songangan kepada ayat darab.

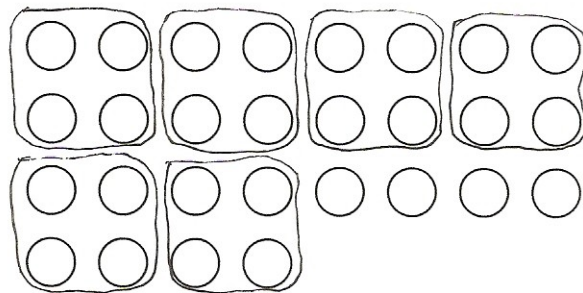
Petikan 7: Sedutan Petikan TA541

P: Cuba Syahirah baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis $28 \div 4$)?

S: Dua puluh lapan bahagi empat.

P: Boleh Syahirah jelaskan macam mana dua puluh lapan bahagi empat. Boleh lukis?

S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ini apa? Bola?

S: Ya.

P: Boleh jelaskan lukisan Syahirah ni?

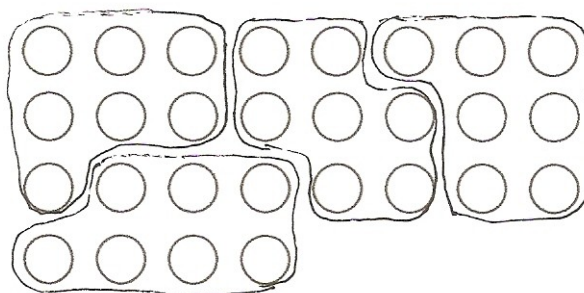
S: Dua puluh lapan bahagi empat. Ada empat bola dalam satu kumpulan.

P: Kenapa kumpulkan empat bola?

S: Sebab nak bahagi empat. Buat empat kumpulan pun boleh.

P: Empat kumpulan? Boleh tunjuk?

S: (Subjek melukis seperti berikut):



- P: Yang ini bahagi empat juga ke?
 S: Ya, bahagi empat atau bahagi tujuh.
 P: Kenapa bahagi tujuh?
 S: Sebab satu kumpulan ada tujuh bola.
 P: Gambar tadi boleh wakili bahagi tujuh?
 S: Boleh.
 P: Baik, dua puluh lapan bahagi empat sama dengan berapa?
 S: Tujuh.
 P: Kenapa tujuh?
 P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat $28 \div 4$) merujuk pada apa pada lukisan Syahirah?
 S: Empat bola (menunjukkan lukisan pertama) atau empat kumpulan (menunjukkan lukisan kedua).
 P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat.
 S: Tak ada.
 P: Kedua-dua lukisan Syahirah tadi sama tak?
 S: Lukisan lain tapi untuk soalan yang sama.
 P: Baik, sekarang boleh Syahirah tulis ayat darab daripada ayat bahagi $28 \div 4$
 S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

- P: Kenapa Syahirah menulis seperti ini?
 S: Sebab ada empat bola dan ada tujuh kumpulan. Empat kali tujuh sama dengan dua puluh lapan.
 P: Tujuh ni (menunjukkan tujuh pada $4 \times 7 = 28$) rujuk pada apa dalam lukisan Syahirah?
 S: Di sini (menunjukkan lukisan pertama) kumpulan, di sini (menunjukkan lukisan kedua) bola (menunjukkan satu kumpulan).
 P: Macam mana pula dengan yang ini (menunjukkan empat pada ayat $4 \times 7 = 28$)
 S: Di sini (menunjukkan lukisan pertama) bola, di sini (menunjukkan lukisan kedua) kumpulan.
 P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
 S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

- P: Ayat ini sama tak dengan ayat tadi?
 S: Tak sama tapi untuk dua-dua lukisan.
 P: Boleh guna untuk dua-dua lukisan?
 S: Ya.
 P: Kenapa Syahirah kata boleh guna untuk dua-dua lukisan?
 S: Sebab yang ini (menunjukkan lukisan pertama) ada tujuh kumpulan satu kumpulan ada empat bola, jumlah dua puluh lapan. Yang ini pun (menunjukkan lukisan kedua) ada empat kumpulan satu kumpulan ada tujuh. Jumlah dua puluh lapan.
 P: Apa kaitan bahagi dengan darab?
 S: Terbalik. Songsang.
 P: Boleh jelaskan?
 S: Dua puluh lapan ni (menunjukkan ayat $28 \div 4 = 7$) jadi jawapan tujuh darab empat. Tujuh ni menunjukkan ayat $7 \times 4 = 28$) jadi jawapan di sini (menunjukkan ayat $28 \div 4 = 7$)

Dalam sedutan petikan di atas, subjek mentafsir ayat $28 \div 4$ dengan melukis tujuh kumpulan bersaiz empat. Subjek juga melukis satu lagi gambar rajah yang mempunyai empat kumpulan bersaiz tujuh. Subjek juga berpendapat bahawa walaupun kedua-dua lukisan beliau berbeza, kedua-duanya mewakili ayat bahagi yang sama

Subjek juga menulis ayat darab $4 \times 7 = 28$ dan $7 \times 4 = 28$ merujuk lukisannya. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisannya boleh mewakili ayat-ayat darab yang ditulisnya.

Bagi ayat $28 \div 7$ pula, subjek menjelaskan dengan menggunakan kedua-dua lukisan yang dilukisnya bagi mewakili ayat $28 \div 4$. Subjek juga menjelaskan kaitan dua puluh lapan bahagi tujuh dengan kedua-dua lukisannya. Selain itu, subjek juga menulis dua ayat darab bagi ayat bahagi $28 \div 7$. Kedua-dua ayat darab tersebut adalah 4

$x 7 = 28$ dan $7 x 4 = 28$. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya adalah sama dengan dua ayat darab yang ditulisnya bagi mewakili ayat bahagi $28 \div 4$. Subjek juga berpendapat bahawa ayat darab adalah songsangan bagi ayat bahagi dan sebaliknya.

Dapatan Lain

Dalam mengenal pasti skim pembahagian nombor bulat bagi murid Tahun Empat, serta cara mereka menggunakan skim tersebut bagi menyelesaikan masalah, beberapa dapatan bercirikan skim pembahagian telah di kenal pasti. Berikut adalah dapatan lain yang diperoleh melalui kajian yang dijalankan.

- a. *Kebanyakan subjek menggunakan idea pengukuran sahaja bagi menyelesaikan masalah yang diberi.*

Majoriti subjek kajian didapati menggunakan idea pengukuran dalam penyelesaian masalah yang diberi kepada mereka. Subjek juga didapati hanya menunjukkan idea pengukuran dengan susunan yang berbeza apabila mereka diminta untuk menunjukkan cara berlainan bagi suatu pembahagian yang ditunjukkan oleh subjek. Sebagai contoh dalam aktiviti kelima yang membabitkan pembahagian tiga puluh enam guli kepada empat, kebanyakan subjek hanya

menunjukkan idea pengukuran dengan susunan yang berbeza. Demikian juga dalam aktiviti gambaran mental, kebanyakan subjek juga mempunyai gambaran mental berideakan pengukuran. Walaupun subjek mempunyai pelbagai objek sebagai gambaran mental bagi 'enam bahagi dua', namun kesemuanya menunjukkan idea pengukuran. Dapatan ini agak bercanggah dengan pandangan beberapa pengkaji dari Barat yang mendapati idea pemetakan lebih digemari oleh murid berbanding dengan idea pengukuran kerana idea pemetakan lebih mudah (Anghileri & Johnson, 1988; Bell, Fischbein, & Greer, 1984; Tirosh, & Graeber, 1989).

b. Subjek menghadapi kesukaran menggunakan idea pemetakan bagi pembahagian yang membabitkan baki.

Subjek yang menggunakan idea pemetakan secara umumnya menghadapi kesukaran menyelesaikan masalah yang membabitkan baki. Sebagai contoh, bagi penyelesaian masalah $36 \div 5$, subjek menghadapi kesukaran untuk mengagihkan tiga puluh enam guli kepada lima bahagian yang mempunyai saiz yang sama. Subjek juga mengalami masalah yang sama bagi pembahagian $36 \div 7$ di mana subjek yang menggunakan idea pemetakan perlu mengagihkan tiga puluh enam guli kepada tujuh kumpulan yang sama saiz. Masalah tersebut tidak dialami oleh subjek yang menggunakan idea pengukuran.

- c. *Hanya seorang subjek dapat menunjukkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan dalam semua aktiviti.*

Kebanyakan subjek di dapati menggunakan hanya satu idea sama ada pengukuran atau pemetakan dalam menyelesaikan masalah yang diberikan kepada mereka. Namun seorang subjek didapati menggunakan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan dalam kesemua aktiviti yang diberikan kepadanya tanpa diminta oleh pengkaji. Sedutan petikan PW521a dan PM551a yang berikut menjelaskan bagaimana subjek menggunakan kedua-dua idea dalam menyelesaikan masalah yang disediakan untuk beliau.

Petikan 1: Sedutan Petikan PW521a

- P: (Menunjukkan kad yang tertulis $12 \div 4$) Boleh Syahirah baca apa yang tertulis pada kad ini?
 S: Dua belas bahagi empat.
 P: Kenapa kata dua belas bahagi empat?
 S: Ini dua belas, (subjek menunjukkan nombor 12 pada kad), ini bahagi, (subjek menunjukkan simbol bahagi), ini empat (subjek menunjukkan angka empat sambil menjawab).
 P: Boleh tak Syahirah tunjuk dengan butang-butang ni apa yang tertulis dalam kad ini?
 S: Nak tunjuk dua belas bahagi empat?
 P: Ya, boleh tunjuk dengan butang-butang ni?
 S: (Subjek mengira dua belas dan kemudian menyusun butang-butang tersebut dalam tiga kumpulan)



- P: Dah siap ke?
 S: Ya
 P: Kenapa Syahirah kata ini dua belas bahagi empat?
 S: Sebab dah bahagi kepada empat (Subjek menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan semasa menyebut

empat). Macam ni pun boleh. (subjek menyusun semula dengan meletakkan tiga butang dalam satu kumpulan)



P: Boleh bagi tau apa yang baru Syahirah buat tadi?

S: Ini pun dua belas bahagi empat.

Petikan 2: Sedutan Petikan PM551a

P: Ini tiga puluh enam bahagi berapa?

S: Bahagi empat. Bahagi sembilan pun boleh.

P: Bahagi sembilan pun boleh? Gambar ini boleh digunakan untuk wakili tiga puluh enam bahagi sembilan?

S: Boleh.

P: Macam mana dengan gambar tadi? Boleh mewakili tiga puluh enam bahagi sembilan juga? (menunjukkan gambar rajah yang telah dilukiskan oleh subjek sebelumnya).

S: Boleh, sebab tiga puluh enam bahagi empat, sembilan. Kalau bahagi sembilan, dapat empat (Subjek menjawab sambil menulis yang berikut pada kertas):

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \overline{) 36} \\ \underline{- 36} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 9 \overline{) 36} \\ \underline{- 36} \\ 0 \end{array}$$

P: Jadi, sama tak kedua-dua gambar rajah tu?

S: Sama ... bentuk saja lain.

P: Bentuk mana yang lain?

S: Bentuk-bentuk ni (subjek menjawab sambil menunjukkan kumpulan-kumpulan yang telah dibulatkan).

P: Kalau bentuk-bentuknya berbeza, macam mana dengan guli di dalamnya?

S: Bentuk saja berbeza, guli dalam dia sama.

P: Sekarang, boleh tak Syahirah tulis ayat bahagi untuk kedua-dua gambar rajah tadi?

S: Macam ni ke (subjek menulis ayat di bawah pada kertas yang diberi)?

$$36 \div 4 = 9$$

P: Ya.

S: (Subjek menulis dua persamaan berikut pada kedua-dua kertas gambar rajah):

$$36 \div 4 = 9$$

$$36 \div 9 = 4$$

P: Boleh beritahu cikgu apa yang Syahirah tulis tu?

S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan. Tiga puluh enam bahagi sembilan sama dengan empat.

Dalam petikan di atas, subjek menunjukkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan dalam salah satu aktiviti yang diberikan oleh pengkaji tanpa diminta oleh pengkaji. Subjek juga mewakili dua persamaan bahagi bagi gambar rajah yang sama, iaitu $36 \div 4 = 9$ dan $36 \div 9 = 4$. Subjek tersebut juga menunjukkan kedua-dua idea pengukuran dan pemetakan dalam aktiviti lain yang diberikan oleh pengkaji.

d. Hanya seorang subjek menunjukkan penolakan berulang dalam kebanyakan aktiviti selain aktiviti 'penolakan berulang' yang disediakan untuk subjek.

Daripada tujuh orang subjek yang ditemu duga, hanya seorang subjek dapat menunjukkan penolakan berulang dalam kebanyakan aktiviti yang disediakan untuk beliau. Subjek tersebut menjelaskan bahawa pembahagian boleh juga dilakukan secara penolakan.

Walaupun pengkaji menyediakan aktiviti bagi mengaitkan penolakan secara berulang dengan bahagi, namun hanya seorang subjek yang menunjukkan penolakan berulang dalam aktiviti lain selain daripada aktiviti yang dikhususkan bagi penolakan berulang. Sedutan petikan berikut menjelaskan cara subjek menggunakan idea penolakan berulang bagi menyelesaikan masalah yang diberikan.

Petikan 3: Sedutan Petikan PW521b

P: Kenapa Syahirah kata ini dua belas bahagi empat?

S: Sebab dah bahagi kepada empat (Subjek menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan semasa menyebut empat). Macam ni pun boleh. (subjek menyusun semula dengan meletakkan tiga butang dalam satu kumpulan).



P: Boleh bagi tau apa yang baru Syahirah buat tadi?

S: Ini pun dua belas bahagi empat.

P: Apa beza dengan yang tadi?

S: Sini ada empat kumpulan. Satu kumpulan ada tiga butang. Tadi tiga kumpulan, satu kumpulan ada empat butang.

P: Dua belas pada ayat tadi rujuk pada apa di sini (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).

S: Semua butang.

P: Yang ini (menunjukkan angka '4' pada ayat bahagi)?

S: Empat kumpulan (menunjukkan empat butang yang telah dikumpulkan).

P: Satu kumpulan ada berapa butang?

S: Tiga.

P: Tiga tu menunjukkan apa?

S: Jawapan dua belas bahagi empat.

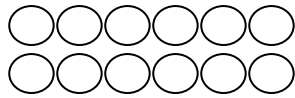
P: Ada cara lain nak tunjuk dua belas bahagi empat?

S: ... Tolak pun boleh. (Subjek mendiamkan diri untuk beberapa ketika dan kemudian menjawab).

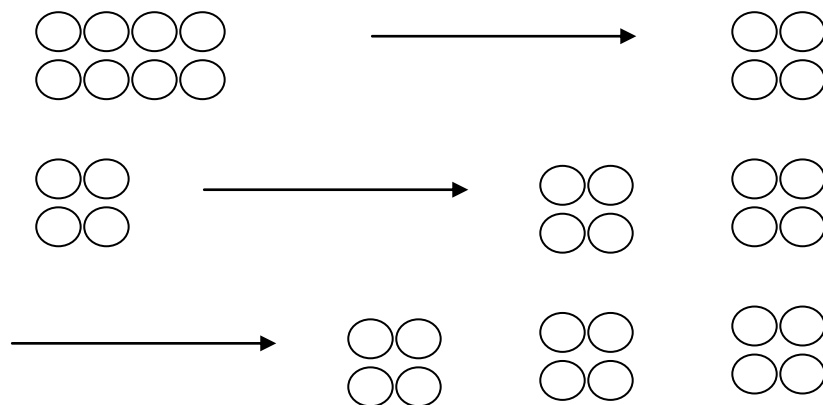
P: Tolak?

S: Ya.

- P: Boleh Syahirah tunjuk dengan butang-butang ni (menunjukkan butang-butang yang terdapat dalam bekas)?
 S: Boleh. (Subjek mengira dua belas butang, menyusunnya sambil menjelaskan perlakuan beliau):



(Subjek mengeluarkan butang dalam kumpulan empat daripada dua belas butang yang letakkan di tepi sebelah kiri).



- S: Dua belas tolak empat tiga kali (subjek menjelaskan sambil mengeluarkan empat butang daripada dua belas butang sebanyak tiga kali)
 P: Dua belas tolak empat tiga kali sama dengan apa?
 S: Sama dengan dua belas bahagi empat.
 P: Susunan ni (menunjukkan susunan yang baru dibuat oleh subjek) sama tak dengan susunan yang Syahirah buat tadi?
 S: Sama.

Subjek tersebut menjelaskan bagaimana pembahagian boleh dilakukan secara penolakan berulang tanpa diminta oleh pengkaji. Dalam aktiviti tersebut subjek diminta untuk menunjukkan 'dua belas bahagi empat' dengan butang, penyedut minuman, dan kertas yang

disediakan. Subjek telah menyusun dua belas butang dengan menggunakan idea pengukuran dan pemetakan pada awalnya selain daripada menggunakan idea penolakan berulang bagi soalan yang sama. Subjek tersebut juga menunjukkan pembahagian secara idea penolakan berulang dalam beberapa aktiviti lain. Subjek lain didapati hanya menggunakan idea penolakan berulang dalam satu aktiviti yang disediakan untuk mereka selepas diminta oleh pengkaji.

Implikasi Kajian

Berdasarkan dapatan daripada kajian tentang skim pembahagian nombor bulat bagi murid Tahun Empat ini, beberapa implikasi boleh dibuat. Bahagian ini menjelaskan implikasi tersebut yang membabitkan implikasi kepada pengajaran dan implikasi kepada kajian lanjutan.

Implikasi Kepada Pengajaran

Dalam kajian yang dijalankan ke atas lapan orang murid Tahun Empat, empat skim yang utama telah dikenal pasti, iaitu skim pengukuran, skim pemetakan, skim penolakan berulang, dan skim songsangan kepada darab. Operasi 'bahagi' mula diperkenalkan kepada murid sekolah rendah semasa murid berada di Tahun Dua. Bahagian ini membincangkan bagaimana guru dapat meningkatkan pengajaran

mereka yang berlandaskan pendekatan konstruktivisme radikal dalam operasi bahagi yang dianggap sebagai operasi yang paling sukar jika dibandingkan dengan operasi 'tambah', 'tolak' dan 'darab'.

Satu implikasi dari dapatan kajian tentang pembahagian nombor bulat bagi murid Tahun Empat membabitkan penggunaan idea pengukuran oleh kebanyakan subjek dalam menyelesaikan masalah yang diberi. Lima daripada tujuh orang subjek kajian hanya menggunakan idea pengukuran dalam menyelesaikan kebanyakan masalah yang disediakan untuk mereka. Dalam konteks ini, guru perlu menunjukkan pelbagai kaedah bagaimana pembahagian boleh dilakukan. Guru juga boleh menunjukkan tentang perbezaan dan kesamaan idea pengukuran dan pemetakan dalam suatu pembahagian. Penulis-penulis buku yang kebanyakannya terdiri daripada guru perlu mempelbagaikan contoh-contoh tentang operasi bahagi dalam buku mereka. Ini adalah supaya pemikiran murid tidak menghalu kepada satu arah sahaja dan murid dapat menggunakan idea pengukuran dan idea pemetakan apabila berhadapan dengan operasi bahagi.

Implikasi lain membabitkan gambaran mental yang dipunyai oleh subjek. Majoriti subjek hanya mempunyai gambaran berupa simbol bahagi, iaitu simbol ' \div ' dan simbol ' $\overline{)}$ '. Dalam konteks ini, guru seharusnya mempelbagaikan maksud perkataan bahagi itu sendiri. Contohnya, guru boleh meminta murid-muridnya melakonkan pembahagian sesuatu objek atau wang. Guru juga perlu

membanyakan lagi gambar-gambar yang membawa maksud ‘bahagi’ selain daripada gambar-gambar yang terdapat dalam buku teks.

Implikasi seterusnya membabitkan dapatan kajian yang menunjukkan bahawa hanya seorang subjek yang dapat mengaitkan operasi bahagi dengan operasi tolak. Majoriti subjek hanya mengetahui perkaitan antara operasi bahagi dan operasi bahagi apabila salah satu aktiviti yang disediakan untuk mereka mengaitkan kedua-dua operasi tersebut. Dalam konteks ini, guru perlu memainkan peranan bagi menjelaskan kaitan operasi bahagi dengan operasi tolak. Guru juga seharusnya mempelbagaikan alat bantu mengajar mereka agar murid dapat memahami perkaitan antara operasi bahagi dan operasi tolak, selain daripada kaitan operasi bahagi dengan operasi darab. Penulis-penulis buku teks juga seharusnya memasukkan maklumat tentang kaitan operasi bahagi dengan operasi tolak di dalam buku-buku mereka agar guru tidak lupa menjelaskan tentang perkaitan tersebut.

Kesimpulannya, guru perlu lebih kreatif dalam mengajar topik ‘bahagi’ ketika murid tersebut di tahap Tahun Dua lagi. Ernest, P. (2000), Freiberg, H. J. dan Driscoll, A. (2000), dan Hopkins, C. (2004), juga telah menggariskan beberapa panduan bagi mengubah sikap murid terhadap matematik, dalam buku mereka. Antara panduan yang mereka huraikan buku mereka adalah supaya matematik dijadikan satu subjek yang menyeronokkan murid dengan menggunakan lebih banyak bahan maujud dalam pengajaran. Oleh

yang demikian, guru matematik perlu lebih kreatif dalam menggunakan bahan maujud terutama semasa mengajar tajuk 'bahagi', supaya murid lebih memahami 'apakah bahagi'.

Guru juga seharusnya lebih memahami sikap murid-murid beliau terhadap matematik terutama dalam topik 'bahagi'. Maka, guru perlu mempelbagaikan pengajaran beliau dan meningkatkan aktiviti pengkayaan agar pemahaman murid-murid terhadap operasi bahagi menjadi lebih luas lagi. Ini adalah supaya murid tidak lagi menganggap operasi bahagi sebagai operasi yang sukar berbanding dengan operasi tambah, tolak dan darab.

Implikasi Kepada Kajian Lanjutan

Kajian ini dijalankan bagi mengenal pasti skim pembahagian nombor bulat yang dipunyai oleh murid Tahun Empat, serta cara murid tersebut menggunakan skim yang mereka miliki untuk menyelesaikan masalah yang membabitkan pembahagian nombor bulat. Kajian lanjut perlu dijalankan bagi menjawab beberapa persoalan seperti, 'Apakah skim pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh murid Tahun Tiga', dan 'Apakah skim pembahagian nombor bulat yang dipunyai oleh pelajar sekolah menengah?'. Kajian lanjut juga perlu dijalankan ke atas murid Tahun Lima untuk mengenal pasti bagaimana skim pembahagian berkembang. Selain itu, kajian lanjut terhadap murid Tahun Lima juga dapat mengenal pasti perbezaan

skim pembahagian yang mereka miliki berbanding dengan skim pembahagian yang telah dikenal pasti melalui kajian ini.

Melalui kajian yang dijalankan ke atas tujuh orang subjek ini didapati kebanyakan subjek menggunakan skim pengukuran dalam menyelesaikan masalah yang disediakan untuk mereka. Kajian perlu dijalankan untuk menentukan sama ada idea pengukuran masih menjadi keutamaan bagi murid Tahun Lima dan pelajar sekolah menengah. Selain itu, dalam kajian ini di dapati hanya seorang dapat menjelaskan idea penolakan berulang dalam kebanyakan aktiviti yang disediakan. Oleh itu kajian lanjut perlu dijalankan bagi mengenal pasti sama ada idea penolakan berulang digunakan oleh murid Tahun Lima dan pelajar sekolah menengah. Idea songsangan kepada darab juga digunakan oleh hanya setelah diminta oleh pengkaji. Kajian perlu dilakukan ke atas murid Tahun Lima dan pelajar sekolah menengah untuk mengenal pasti sama ada idea songsangan kepada darab digunakan oleh pelajar tersebut.

Kajian ini dijalankan secara teknik temu duga klinikal bagi mengenal pasti skim pembahagian nombor bulat yang dipunyai oleh murid Tahun Empat. Teknik temu duga klinikal mampu menjawab beberapa persoalan asas tentang pembahagian nombor bulat, namun persoalan bagaimana murid dapat membina skim yang mereka miliki itu masih belum dijawab. Sehubungan itu, teknik eksperimen mengajar dianggap lebih sesuai bagi mengenal pasti cara subjek membina skim yang mereka punyai, seperti yang dilakukan oleh

pengkaji Selter (1997) . Maka, kajian lanjut perlu dijalankan menggunakan teknik eksperimen mengajar bagi mengenal pasti bagaimana skim pembahagian nombor bulat dibina.