LAMPIRAN

LAMPIRAN A

PERMASALAHAN TEMU DUGA

TEMU DUGA PERTAMA

Gambaran Mental

Masalah 1.1

1. Apabila saya sebut 'bahagi', apa yang mula-mula sekali terlintas di fikiran adik? (Jika murid tidak menjawab, kemukakan soalan 1a. Jika murid dapat menceritakan sesuatu kemukakan soalan

   seterusnya).

   1a. Kalau saya sebut 'kereta', boleh adik beritahu saya apa yang mula- mula sekali adik bayangkan?

   1b. Apa lagi yang boleh adik ceritakan tentang kereta? (Sekiranya murid dapat menceritakan sesuatu tentang kereta, ulang soalan 1. Jika murid tidak menjawab kemukakan soalan 1c.)

   1c. Jika saya sebut 'dua' apa yang adik dapat gambarkan?

   1d. Apa lagi yang adik boleh ceritakan tentang 'dua'? (Jika murid dapat menceritakan sesuatu, kemukakan soalan 1.)

2. Apa lagi yang dapat adik gambarkan tentang 'bahagi'?
3. Apa lagi? (Ulang soalan 3 sehingga murid tidak dapat memberikan sebarang penerangan lagi).
4. Boleh adik beri contoh bagi 'bahagi' yang biasa adik gunakan?

5. Ada lagi contoh lain?
6. Ada lagi? (Ulang soalan 6. sehingga murid tidak dapat memberikan penerangan lain).

Masalah 1.2

1. Jika saya sebut 'enam bahagi dua', apa yang mula-mula terlintas di fikiran adik? (Sekiranya, murid jawab sesuatu teruskan ke soalan 2. Jika murid tidak menjawab, kemukakan soalan 1a).
   1a. Jika saya sebut enam biji epal, apa yang terlintas di fikiran adik? Boleh adik lukiskan?
   1b. Sekarang, jika saya sebut enam biji epal di bahagi dua orang, apa pula yang terlintas di fikiran adik? Adik boleh tunjuk secara melukis? (Jika murid dapat menceritakan sesuatu atau melukis sesuatu, ulang soalan 1).
2. Apa lagi gambaran lain yang terlintas di fikiran adik apabila di sebut enam bahagi dua?
3. Apa lagi?
4. Ada gambaran lain tak bagaimana enam boleh bahagi dua? (Sekiranya murid kata tiada ulang langkah-langkah di atas bagi 'lapan bahagi empat'. Jika murid kata ada, kemukakan soalan seterusnya).
5. Kalau ada boleh adik tunjuk dengan melukis pada kertas?

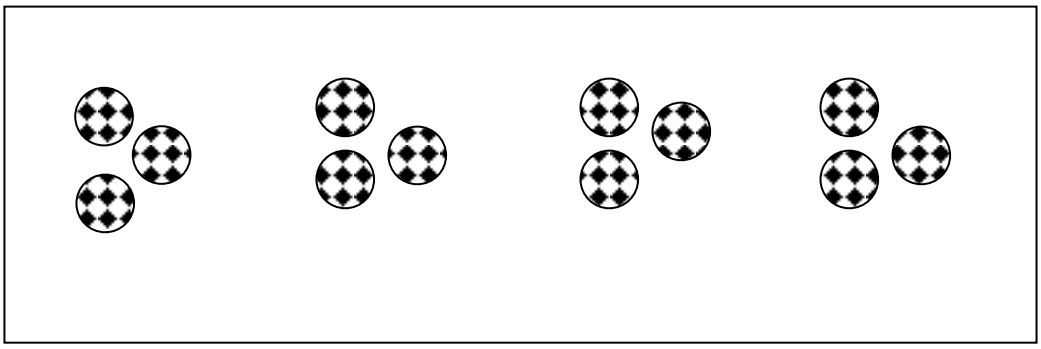
6. Boleh adik terangkan apa yang adik lukiskan? (Ulang langkah-langkah di atas bagi ‘lapan bahagi empat’).

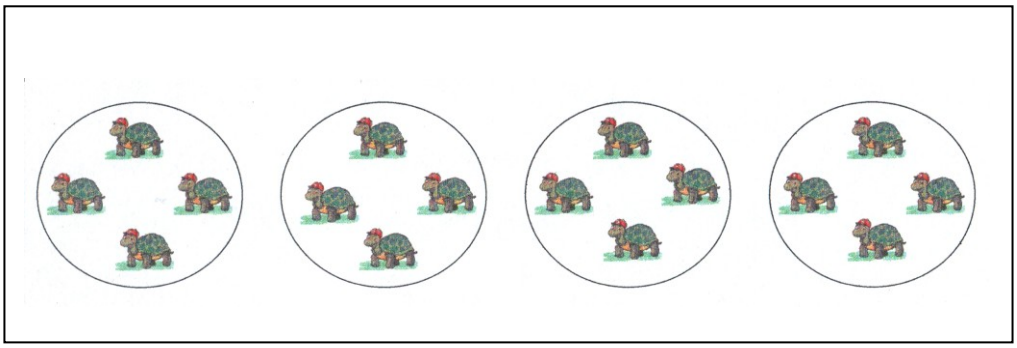
TEMU DUGA KEDUA

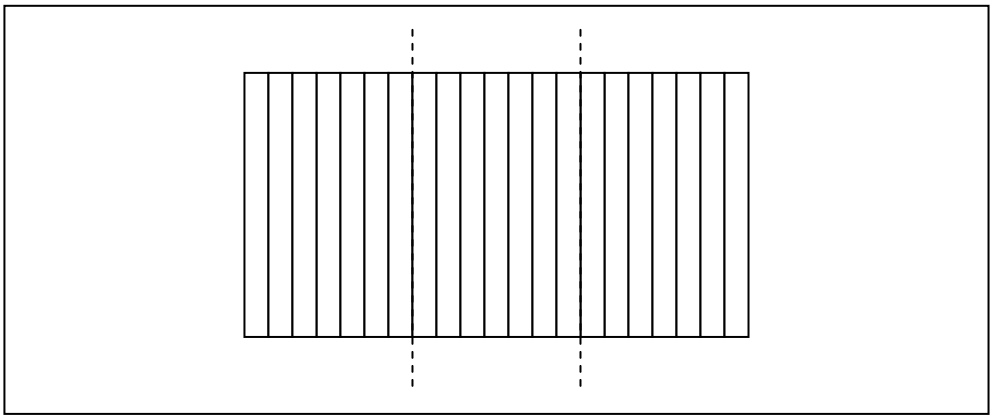
Perwakilan

Masalah 2.1

1. (Murid dibekalkan pensel, kertas, satu kotak butang dan satu kotak penyedut minuman). Kad yang tertulis '12 ÷ 4' diletakkan di hadapan murid). Cuba baca apa yang tertulis pada kad ini.
2. (Sekiranya murid dapat membaca ayat bahagi yang terdapat pada kad tersebut, kemukakan soalan seterusnya). Boleh adik tunjukkan kepada saya apa yang tertulis pada kad ini? Adik boleh gunakan bahan-bahan yang ada di sini.
3. Boleh adik terangkan daripada lukisan (atau perwakilan benda maujud) adik, bagaimana dua belas bahagi empat?
4. Selain daripada cara tadi, ada tak cara lain bagaimana adik hendak jelaskan apa yang adik baca pada kad tadi? Adik boleh gunakan bahan-bahan lain yang terdapat di sini.
5. Ada lagi cara lain? (Sekiranya murid tidak dapat menunjukkan cara lain, ulang langkah di atas bagi kad '12 ÷ 6', '12 ÷ 2', '12 ÷ 3', '8 ÷ 3', '8 ÷ 5', '7 ÷ 7' dan '7 ÷ 1' pula).







Rajah 2: Gambar rajah bagi masalah 2.2

Masalah 2.2

1. (Kad yang mempunyai gambar lima belas biji bola ditunjukkan kepada murid). Cuba tengok kad ini. Boleh adik buat cerita

bahagi berdasarkan gambar ini? (Jika murid dapat membuat sebarang cerita bahagi berkenaan gambar tersebut, teruskan ke soalan seterusnya. Jika tidak kemukakan soalan 1a.)

1a. Boleh adik beritahu ada berapa kumpulan bola dalam gambar ini?

1b. Sekarang boleh adik buat cerita bahagi bagi gambar ini? Adik boleh gantikan bola yang terdapat dalam gambar ini dengan benda-benda lain.

2. Kenapa adik berkata demikian?
3. Boleh adik buat cerita lain daripada gambar tadi?
4. Sekarang boleh adik tulis ayat bahagi dengan menggunakan nombor tentang cerita adik tadi?
5. Kenapa adik tulis demikian?
6. Ada cara lain untuk menulis ayat bahagi bagi gambar tadi?
7. Ada lagi? (Jika murid tidak dapat menunjukkan cara lain, kemukakan kad lain yang mempunyai enam belas kura-kura, dan kad yang mempunyai dua puluh satu jalur berbentuk selanjar. Ulang langkah-langkah 1 hingga 7).

Masalah 2.3

1. (Menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5). Boleh adik baca apa yang tertulis pada kad ini?

2. Boleh adik tunjuk macam mana ayat bahagi pada kad tu. Adik boleh gunakan bahan-bahan yang ada di sini.
3. Boleh adik terangkan daripada lukisan (atau perwakilan bahan maujud) bagaimana dua puluh bahagi lima?
4. Selain daripada cara tadi ada tak cara lain bagaimana adik hendak jelaskan apa yang tertulis pada kad tadi? Adik boleh gunakan bahan-bahan lain yang terdapat di sini.
5. Ada lagi cara lain?
6. (Menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5). Boleh adik baca apa yang tertulis pada kad ini?
7. Boleh adik tunjuk macam mana ayat bahagi pada kad tu. Adik boleh gunakan bahan-bahan yang ada di sini.
8. Boleh adik terangkan daripada lukisan (atau perwakilan bahan maujud) bagaimana dua puluh bahagi lima?
9. Selain daripada cara tadi ada tak cara lain bagaimana adik hendak jelaskan apa yang tertulis pada kad tadi? Adik boleh gunakan bahan-bahan lain yang terdapat di sini.
10. Cuba bandingkan dengan ayat bahagi. Apa kaitan ayat bahagi dengan ayat tolak?
11. Kenapa adik berkata demikian?
12. Ada lagi cara lain? (Sekiranya murid tidak dapat menunjukkan cara lain, ulang langkah-langkah di atas dengan ayat-ayat '17 ÷ 6' dan '17 – 6').

TEMU DUGA KETIGA

Masalah Berkotak

Masalah 3.1

1. (Menunjukkan sebuah kotak yang mempunyai bukaan kecil di kedua-dua sisinya dan bukaan tersebut dinamakan A dan B). Adik perhatikan betul-betul apa yang saya lakukan. Apabila kad bernombor 14 dan 2 dimasukkan ke dalam kotak melalui A, kad bernombor 7 akan keluar dari kotak ini. Apabila kad bernombor 10 dan 5 dimasukkan melalui A, kad bernombor 2 akan keluar melalui tingkap B, dan apabila kad 2 dan 2 dimasukkan melalui A, kad bernombor 1 akan keluar. Cuba adik fikir dan beritahu saya apa yang telah berlaku kepada nombor-nombor yang dimasukkan tadi sehingga menghasilkan nombor-nombor yang keluar tadi? Apakah proses yang telah berlaku dalam kotak ini?

   1a. (Sekiranya murid tidak menjawab). Kita cuba lagi dengan nombor 8 dan 2 pula dimasukkan di A dan didapati nombor yang keluar dari B adalah 4. Apa agaknya kotak ini boleh lakukan?

   1b. (Sekiranya murid tidak menjawab). Kotak ini boleh lakukan satu operasi. Kalau saya masukkan 6 dan diikuti oleh nombor 2, nombor yang keluar adalah 3? Operasi

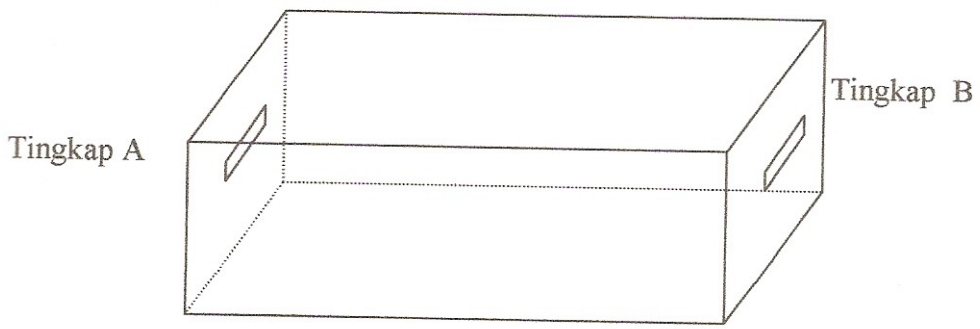
apa agaknya kotak ini telah lakukan kepada 6 dan 2 sehingga jawapan 3 dikeluarkan? (Jika murid dapat menjawab dengan betul, kemukakan semula soalan 1).

2. Boleh adik beritahu apa kotak ini telah buat kepada nombor-nombor tadi? (Jika murid menjawab teruskan ke aktiviti seterusnya, jika tidak ulang dengan beberapa nombor yang lain).

Masalah 3.2

1. (Kad yang tertulis nombor 9 ditunjukkan kepada murid). Kita gunakan kotak sama untuk aktiviti ini. Cuba baca apa yang tertulis pada kad ini.
2. (Menunjukkan kad lain yang tertulis nombor 3). Apa pula yang tertulis pada kad ini?
3. Jika saya masukkan ke dalam kotak ini kad pertama, diikuti dengan kad kedua, kad apa agaknya yang akan keluar melalui B?
4. (Jika murid menjawab 3). Bagaimana adik tahu kad itu yang akan keluar? (Jika murid tidak menjawab, ulang langkah 1 hingga 3 sekali lagi).
5. Kenapa adik rasa kad 3 yang akan keluar? Apa yang telah berlaku dalam kotak ini?
6. Boleh adik ceritakan bagaimana 9 bahagi 3 boleh menghasilkan 3?

7. (Sekiranya murid dapat menjawab soalan 6, masalah berikut akan dikemukakan). Cuba teka kad apa yang akan keluar jika
   i. kad 40 dan 2 dimasukkan
   ii. kad 400 dan 2 dimasukkan
   iii. kad 8 dan 3 dimasukkan
   iv. kad 19 dan 19 dimasukkan
   v. kad 3 dan 2 dimasukkan.



Rajah 3: Kotak ajaib

TEMU DUGA KEEMPAT

Tafsiran Ayat Matematik

Masalah 4.1

1. (Menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4). Cuba adik baca apa yang tertulis pada kad ini.
2. Boleh adik beritahu bagaimana dua puluh lapan bahagi empat?
3. Boleh adik menulis ayat bahagi dengan lengkap?
4. Boleh jelaskan kenapa adik menulis demikian?
5. Boleh adik menulis ayat darab bagi ayat tersebut?
6. Kenapa adik tulis demikian?
7. (Sekiranya murid dapat menulis ayat darab dan bahagi, ulang dengan kad-kad berikut 11 ÷ 2, 0 ÷ 3, 3 ÷ 0, dan 3 ÷ 3)

Masalah 4.2

1. (Menunjukkan kad yang tertulis 4 x 2). Cuba adik baca apa yang tertulis pada kad ini.
2. Boleh adik beritahu bagaimana empat darab dua?
3. Boleh adik menulis ayat darab dengan lengkap?
4. Boleh jelaskan kenapa adik menulis demikian?
5. Boleh adik menulis ayat bahagi bagi ayat tersebut?
6. Kenapa adik tulis demikian?
7. (Sekiranya murid dapat menulis ayat darab dan bahagi, ulang dengan kad-kad berikut 6 x 4 dan 9 x 0)

TEMU DUGA KELIMA

Penyelesaian Masalah

Masalah 5.1

1. (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Di sini ada gambar guli. Boleh adik bahagi empat guli-guli ini?
2. Kenapa adik bentukkan seperti itu?
3. Selain cara tadi boleh adik bahagi empat secara lain?
4. Kedua-dua pembahagian tadi sama atau tidak?
5. Boleh jelaskan bagaimana bahagi empat?
6. Boleh tulis ayat bahagi bagi gambar rajah?
7. (Ulang langkah-langkah di atas dengan bahagi tiga, dua, enam, dua belas, sembilan dan lima).

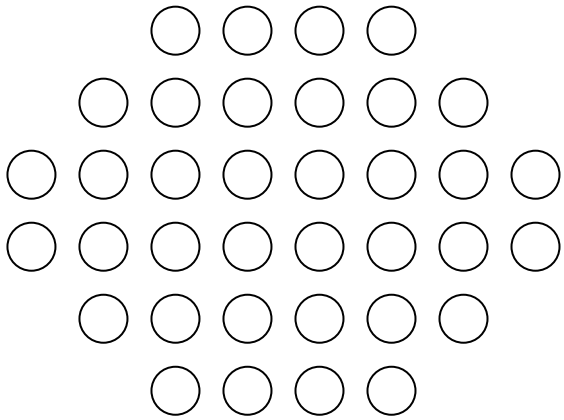
Masalah 5.2

1. (Menunjukkan kad yang mempunyai dua puluh empat jalur berbentuk selanjar). Di sini ada gambar jalur, boleh adik bahagi empat?
2. Kenapa adik bentukkan seperti itu?
3. Selain cara tadi boleh adik bahagi empat secara lain?
4. Kedua-dua pembahagian tadi sama atau tidak?
5. Boleh jelaskan bagaimana bahagi empat?

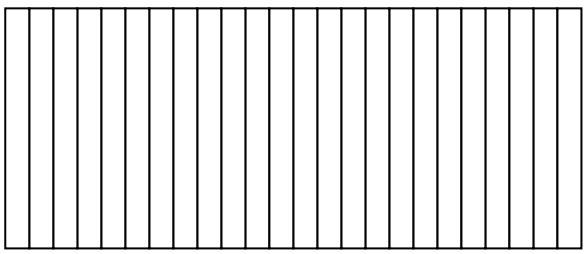
6. Boleh tulis ayat bahagi bagi gambar rajah?
7. (Ulang langkah-langkah 1 hingga 6 di atas dengan bahagi tiga, dua, enam, dua belas, lapan dan lima).

Berikut adalah gambar rajah yang digunakan bagi aktiviti penyelesaian masalah:

i. Satu kadbod yang mempunyai gambar tiga puluh enam guli.



ii. Satu kadbod yang mempunyai gambar dua puluh empat keping papan yang tersusun secara tercantum



LAMPIRAN B

KAJIAN KES

Protokol 1: Sufian

Sufian berusia 9 tahun 8 bulan semasa temu duga dijalankan. Tingkah lakunya boleh dirumuskan seperti berikut:

1. Dia menggambarkan perkataan ‘bahagi’ dengan menulis simbol ‘ ÷ ’ dan ‘)¯ ’.

14. Bagi ayat enam bahagi dua, dia menggambarkannya dengan menulis ayat 6 ÷ 2, 2) $\overline{6}$, dan melukis tiga himpunan buah oren dan durian yang bersaiz dua.

15. Dia mewakilkan ayat a ÷ b dengan membentuk kumpulan-kumpulan bersaiz b. Menurutnya, pembahagi menentukan saiz kumpulan.

16. Bagi pembahagian yang mempunyai baki, hanya kumpulan yang bersaiz sama dengan pembahagi sahaja diambil kira sebagai jawapan.

17. Menurutnya, gambar rajah yang mempunyai c kumpulan bersaiz b tidak sama dengan gambar rajah yang mempunyai b kumpulan bersaiz c kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

18. Menurutnya, persamaan a ÷ b = c tidak sama dengan a ÷ c = b kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

19. Bagi persamaan a ÷ b = c, a merujuk semua yang hendak dibahagi, b merujuk saiz kumpulan, dan c merujuk bilangan kumpulan.

20. Susunan yang dibentuk bagi persamaan a ÷ b = c, adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi a yang ditolak secara berulang sebanyak c kali. Setiap penolakan perlu bersaiz b, dan nilai c dalam a ÷ b = c adalah sama dengan bilangan penolakan berulang yang dilakukan.

21. Menurutnya, jika a ÷ b = c, maka
    i. a0 ÷ b = c0
    ii. a00 ÷ b = c00
    iii. a ÷ a = 1
    iv. a0 ÷ a0 = 1
    v. a ÷ 1 = a
    vi. a0 ÷ 1 = a0

22. Dalam ayat 0 ÷ a, 0 bermaksud tiada nilai maka jawapannya adalah sifar.

23. Dalam ayat a ÷ 0, 0 bermaksud tidak melakukan operasi bahagi maka jawapannya adalah a.

24. Menurutnya, ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

25. Persamaan darab bagi ayat a ÷ b adalah c x b = a, di mana c adalah hasil bahagi bagi a ÷ b

Gambaran Mental

Gambaran Mental Perkataan Bahagi

Sufian mempunyai dua gambaran bagi perkataan bahagi. Petikan GM111 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau. Dalam petikan ini dan petikan seterusnya, P adalah singkatan bagi pengkaji dan S adalah singkatan bagi subjek.

Petikan GM111

P: Sekarang, kalau cikgu sebut bahagi. Gambar apa ada dalam kepala?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Nampak apa?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ada gambar bahagi tak dalam kepala?
S: (Subjek mengangguk)
P: Gambar apa yang Sufian nampak? Boleh lukis?
S: (Subjek menulis simbol berikut pada kertas):

‘ ÷ ’

P: Itu apa?
S: Bahagi
P: Ada gambar lain tak bila sebut bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

‘ $\overline{)}$ ’

P: Ada gambar lain tak tentang bahagi?
S: Tak ada.
P: Tak ada gambar lain?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian memberikan dua gambaran bagi perkataan bahagi. Gambaran tersebut beliau tulis dalam bentuk simbol, ÷ dan simbol $\overline{)}$.

Gambaran Mental Ayat Bahagi

Sufian mempunyai empat gambaran bagi ayat enam bahagi dua. Dua daripada empat gambaran tersebut ditunjukkan dalam bentuk lukisan, manakala dua lagi pula dinyatakan dalam bentuk ayat bahagi. Petikan GM112 yang berikut memaparkan tingkah laku Sufian.

Petikan GM112

P: Sekarang kalau saya sebut enam bahagi dua, gambar apa ada dalam kepala Sufian?

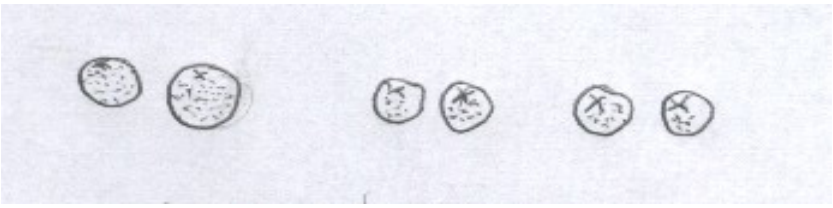
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ada gambar tak?
S: Ada.
P: Ada gambar apa kalau sebut enam bahagi dua?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$6 \div 2$$

P: Gambar apa tu?
S: Enam bahagi dua (subjek menunjukkan ayat yang ditulisnya).
P: Gambar lain ada tak?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

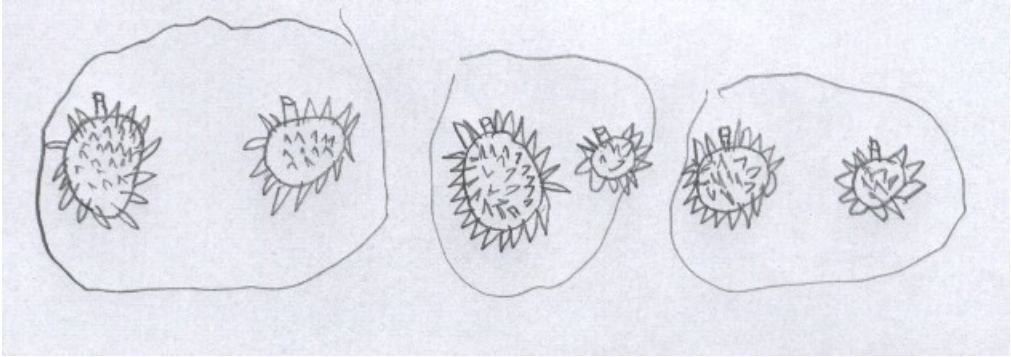
$$2\overline{)6}$$

P: Selain pada tu ada gambar lain tak bila cikgu sebut enam bahagi dua?
S: (Subjek melukis gambarajah berikut):

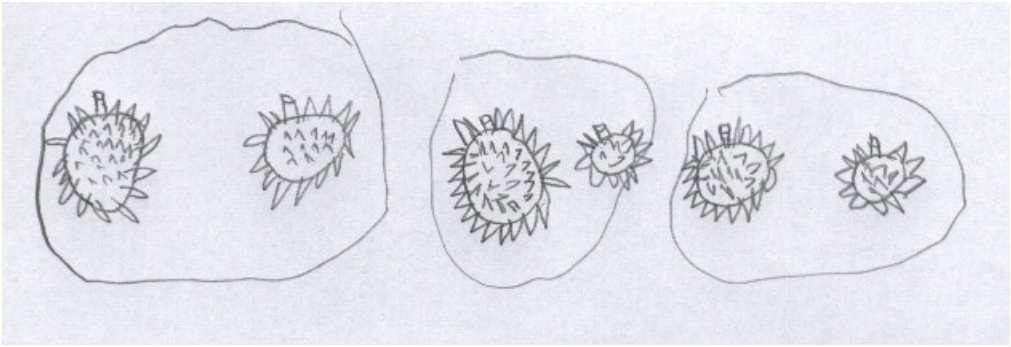


P: Itu apa?

S: Oren.
P: Boleh beritahu apa yang Sufian lukis tu?
S: Enam bahagi dua
P: Macam mana enam bahagi dua? Boleh terangkan?
S: Enam oren bahagi dua.
P: Ada gambar lain?
S: (Subjek mengambil masa agak lama untuk melukis seperti berikut. Subjek melukis gambar buah durian tanpa garisan di luar setiap dua biji durian)



P: Sufian lukis apa tu?
S: Durian.
P: Boleh terangkan macam mana enam bahagi dua yang Sufian nampak tu?
S: (Subjek membulatkan setiap dua durian dan menerangkan). Enam biji durian bahagi kepada dua.



P: Ada gambar lain?
S: Tak ada.
P: Betul, tak ada?
S: Tak ada.

Dalam petikan GM112, Sufian menggambarkan enam bahagi dua dengan menulis ayat bahagi $6 \div 2$. Selain daripada ayat tersebut, Sufian juga memberikan satu lagi gambaran iaitu, $2\overline{)6}$.

Seterusnya, Sufian memberikan dua gambaran lain yang beliau gambarkan secara lukisan. Lukisan pertama Sufian menunjukkan enam biji buah oren yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan. Setiap kumpulan tersebut mempunyai dua biji buah oren. Manakala, lukisan kedua Sufian pula menunjukkan enam biji buah durian yang disusun pada jarak yang hampir sama antara satu sama lain. Bagi menunjukkan pembahagian enam kepada dua dengan lebih jelas lagi, subjek membulatkan setiap dua biji buah durian pada lukisannya. Ini menghasilkan tiga kumpulan yang mempunyai dua biji buah durian di dalamnya.

Kesimpulan

Sebagai kesimpulan, Sufian menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis simbol $\div$ dan $)\overline{}$. Bagi ayat enam bahagi dua pula, Sufian memberikan empat bentuk gambaran iaitu, ayat $6 \div 2$, $2\overline{)6}$, lukisan enam biji buah oren yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan, dan lukisan enam biji buah durian yang dibulatkan menghasilkan tiga bulatan.

Perwakilan

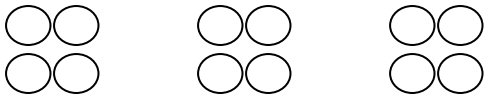
Ayat Bahagi

Ayat bahagi tanpa baki

Sufian mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan menyusun empat biji butang dalam satu kumpulan untuk membentuk tiga kumpulan. Beliau juga mewakilkan ayat tersebut dengan mengumpulkan tiga butang dalam satu kumpulan untuk membentuk empat kumpulan. Tingkah laku beliau dipaparkan dalam Petikan PW121 yang berikut.

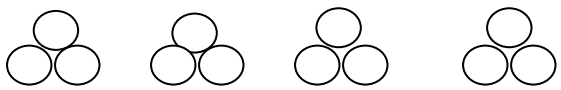
Petikan PW121

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4) Boleh Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Kenapa kata dua belas bahagi empat?
S: Dua belas bahagi empat dapat tiga (Subjek menunjukkan angka-angka pada ayat 12 ÷ 4 semasa menjawab).
P: Boleh tak Sufian tunjuk dengan butang-butang ni macam mana dua belas bahagi empat?
S: (Subjek mengira dua belas dan kemudian menyusun butang-butang tersebut dalam tiga kumpulan):



P: Kenapa Sufian kata ini dua belas bahagi empat?
S: Ada empat - empat (Subjek menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan semasa menyebut empat)
P: Dua belas pada ayat tadi rujuk pada apa di sini (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).
S: Semua.
P: Yang ini (menunjukkan angka ‘4’ pada ayat bahagi?

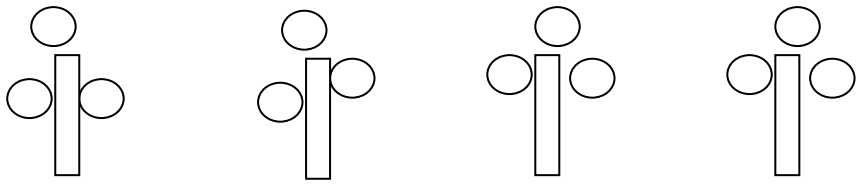
S: Empat butang (menunjukkan empat butang yang telah dikumpulkan).
P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tiga.
P: Tiga tu apa ?
S: Jawapan dia.
P: Jawapan bagi apa?
S: Jawapan dua belas bahagi empat.
P: Kenapa Sufian susun macam ni (menunjukkan empat butang yang dikumpulkan)?
S: Senang nampak.
P: Kenapa Sufian letak empat butang sekali seperti ini (menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan)?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kalau dua belas bahagi tiga? Macam mana nak susun?
S: (Subjek menyusun semula butang-butang tersebut tiga-tiga sebanyak empat kumpulan.):



P: Kenapa kumpulkan tiga butang macam tu?
S: Sebab dua belas bahagi tiga.
P: Kalau dua belas bahagi enam, berapa butang akan dikumpulkan?
S: Enam (subjek menjawab sambil menolak dua kumpulan butang-butang yang telah disusun sebelumnya menjadi satu kumpulan):

P: Boleh Sufian jelaskan kenapa Sufian enyusun macam tu?
S: Sebab dua belas bahagi enam.
P: Agaknya kalau saya bagi dua belas bahagi dua berapa butang Sufian akan kumpulkan dalam satu kumpulan?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Sebab bahagi dua.
P: Boleh tak Sufian tunjuk dengan cara lain macam mana dua belas bahagi empat?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Boleh tak Sufian buat cerita dua belas bahagi empat?
S: Saya ada dua belas gula-gula. (Subjek terus diam selepas menyebut ayat tersebut).
P: Dua belas gula-gula tu nak bahagi kepada siapa?

S: Kawan.
P: Berapa orang kawan?
S: Dua.
P: Dua? Seorang dapat berapa?
S: Enam.
P: Baik, yang tu dua belas bahagi berapa?
S: Dua belas bahagi enam.
P: Dua belas bahagi enam. Cuba Sufian buat satu lagi cerita bagi dua belas bahagi empat?
S: Saya ada dua belas biji limau bahagi kepada kawan.
P: Berapa orang kawan?
S: Empat.
P: Seorang dapat berapa?
S: Empat.
P: Kawan ada berapa orang tadi?
S: Kawan ada tiga orang.
P: Kalau bahagi kepada empat orang kawan seorang akan dapat berapa?
S: Empat, … tiga.
P: Yang mana satu? Empat atau tiga?
S: Tiga.
P: Betul?
S: (Subjek mengangguk)
P: (Memberikan enam batang penyedut minuman yang telah dipotong). Katakan ini kawan-kawan Sufian dan butang-butang tadi limau. Boleh tunjuk macam mana dua belas bahagi empat?
S: (Subjek menyusun empat batang penyedut minuman, dan kemudian menyusun butang-butang diatas setiap satu penyedut minuman).



P: Seorang kawan dapat berapa biji limau?
S: Dapat tiga.
P: Kenapa tiga?
S: Sebab ada tiga (subjek menunjukkan butang-butang yang telah diletakkan pada setiap penyedut minuman).
P: Sama tak dengan susunan tadi? Tadi pun dua belas bahagi empat juga.
S: Tak.
P: Kenapa? Apa yang tak sama?
S: Yang ni tiga (subjek menunjukkan susunan yang telah dibuatnya).

P: Tiga apa?
S: Butang.
P: Yang tadi?
S: Empat.
P: Soalannya sama tak?
S: Sama.
P: Kenapa agaknya jawapannya tak sama?
S: Cara susun tak sama.
P: Cara susun macam mana?
S: Macam ni (subjek menunjukkan butang-butang yang telah disusun).
P: Ada cara lain nak tunjuk dua belas bahagi empat?
S: Tak ada.

Pada peringkat awal Petikan PW121, Sufian mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan menyusun empat biji butang dalam satu kumpulan. Subjek menjelaskan bahawa jumlah butang dalam setiap kumpulan bergantung kepada angka yang terdapat pada pembahagi. Misalnya, jika soalannya adalah bahagi empat, maka empat biji butang perlu dikumpulkan dalam satu kumpulan. Sufian mengukuhkan penerangan beliau tersebut dengan mewakilkan 12 ÷ 3 dan 12 ÷ 6. Bagi ayat 12 ÷ 3, Sufian mengumpulkan tiga biji butang dalam satu kumpulan untuk membentuk empat kumpulan, manakala bagi ayat 12 ÷ 6 pula, beliau mengumpulkan enam biji butang dalam satu kumpulan untuk membentuk dua kumpulan.

Selain itu, Sufian menjelaskan bahawa nombor dua belas yang terdapat pada ayat bahagi 12 ÷ 4 merujuk kepada kesemua butang yang disusunnya. Beliau juga berpendapat bahawa ‘bahagi empat’, pada ayat tersebut merujuk kepada bilangan butang yang terdapat

dalam setiap kumpulan, manakala jawapan kepada pembahagian tersebut merujuk kepada bilangan kumpulan yang dapat dihasilkan.

Pada peringkat pertengahan Petikan PW121, Sufian di dapati menghadapi kesukaran apabila diminta bercerita bagaimana dua belas biji buah limau dibahagi kepada empat orang kawan, tanpa menggunakan sebarang bahan atau lukisan. Misalnya, apabila Sufian diminta bercerita bagaimana dua belas biji buah limau dibahagi kepada empat orang kawan, tanpa menggunakan sebarang bahan atau lukisan, Sufian menyebut angka yang berbeza-beza tentang bilangan limau yang akan diperoleh setiap kawan dalam ceritanya. Jawapan beliau menunjukkan seolah-olah dua belas biji limau dibahagi kepada tiga orang kawan supaya setiap orang akan mendapat empat biji limau kerana soalannya dua belas bahagi empat. Bagaimanapun, Sufian membentuk empat kumpulan dengan bersaiz tiga dengan menggunakan penyedut minuman yang disediakan oleh pengkaji.

Di bahagian akhir Petikan PW121, Sufian menjelaskan bahawa kedua-dua susunan yang beliau bentuk bagi mewakili dua belas bahagi empat adalah tidak sama. Menurut Sufian, perbezaan tersebut adalah kerana cara penyusunannya yang berbeza. Sufian juga berpendapat bahawa perbezaan antara kedua-dua penyusunan adalah kerana bilangan butang yang dikumpulkan dalam satu kumpulan adalah tidak sama. Selain itu, subjek juga menjelaskan bahawa kedua-dua penyusunan adalah berbeza kerana bilangan kumpulan yang diperoleh adalah tidak sama. Sufian juga menjelaskan bahawa ayat

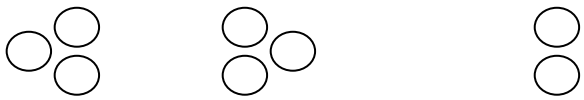
bahagi 12 ÷ 4 dan ayat 12 ÷ 3 adalah berbeza kerana dalam susunan yang beliau bentuk bagi ayat bahagi 12 ÷ 4 mempunyai empat biji butang dalam satu kumpulan manakala, bagi ayat bahagi 12 ÷ 3 pula terdapat tiga biji butang dalam satu kumpulan.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Sufian mewakilkan ayat bahagi 8 ÷ 3 dengan mengumpulkan tiga biji butang dalam satu kumpulan bagi membentuk dua kumpulan. Subjek juga mewakilkan ayat tersebut dengan membentuk tiga kumpulan yang mengandungi dua biji butang di dalamnya. Petikan PW122 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan PW122

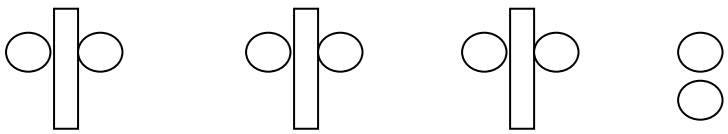
P: Cuba Sufian baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis '8 ÷ 3'). Apa yang tertulis pada kad ini?
S: Lapan bahagi tiga.
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang macam tadi bagi lapan bahagi tiga?
S: (Subjek menyusun butang-butang tersebut seperti di bawah. Dua butang telah diletakkan agak jauh daripada kumpulan yang mempunyai tiga butang):



P: Boleh beritahu cikgu kenapa susun macam tu?
S: Lapan bahagi tiga.
P: Kenapa yang ni ada dua yang lain ada tiga? (Menunjukkan dua butang yang diasingkan)
S: Tak cukup.
P: Tak cukup? Sepatutnya ada berapa?
S: Tiga.

P: Kenapa tiga?
S: Bahagi tiga.
P: Jadi, apa jawapannya bagi lapan bahagi tiga?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Ini ada dua kumpulan (subjek menunjukkan dua longgokan yang mempunyai tiga butang sambil menjawab).
P: Yang ini (menunjukkan dua butang yang diasingkan) tak kira ke?
S: Tak cukup.
P: Jadi tak boleh kira sekali ke?
S: (Subjek menggelengkan kepala).
P: Kenapa tak boleh ambil kira?
S: Tak cukup.
P: Ada cara lain nak tunjuk lapan bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Boleh buat cerita dengan lapan bahagi tiga?
S: Saya ada lapan biji limau. Nak bahagi kepada tiga orang.
P: Seorang akan dapat berapa?
S: Tiga.
P: Kawan Sufian berapa orang?
S: Dua.
P: Katalah yang ini kawan Sufian (menunjukkan beberapa penyedut minuman). Cuba buat lapan bahagi tiga.
S: (Subjek meletakkan dua penyedut minuman pada mulanya seperti berikut):

P: Boleh Sufian ikut cerita Sufian tadi? Cuba ulang cerita tadi?
S: Saya ada lapan biji limau. Saya nak bahagi kepada tiga orang kawan.
P: Baik cuba tunjuk dengan penyedut minuman dengan butang.
S: (Subjek menyususn seperti berikut):



P: Jadi seorang dapat berapa?
S: Dua.
P: Yang dua lagi tu (menunjukkan dua butang yang diasingkan)?

S: Lebih. Tak cukup nak bahagi.
P: Ada jawapan untuk yang ini?
S: Dua.
P: Yang mana menunjukkan jawapan?
S: Ini (menunjukkan dua butang pada satu kumpulan).
P: Yang ini tak boleh kira dalam jawapan ke (menunjukkan dua butang yang diasingkan)?
S: Tak.
P: Kenapa?
S: Ada dua saja.
P: Sepatutnya ada berapa?
S: . . . Tiga.
P: Ada cara lain nak tunjuk lapan bahagi tiga?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW122, Sufian mewakilkan 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan yang mengandungi tiga biji butang di dalamnya dan satu kumpulan yang mengandungi dua biji butang. Sufian juga mengasingkan kumpulan yang mengandungi dua biji butang jauh daripada dua kumpulan lain yang mempunyai tiga biji butang. Subjek menjelaskan bahawa jika soalannya adalah lapan bahagi tiga maka setiap kumpulan perlu mengandungi tiga biji butang. Subjek juga berpendapat bahawa kumpulan yang mengandungi dua biji butang perlu diasingkan dan tidak boleh di ambil kira kerana bilangan butang yang terdapat dalam kumpulan tersebut adalah dua dan bukan tiga.

Sufian juga mewakilkan 8 ÷ 3 dengan membentuk cerita dan menyusun lapan butang dalam tiga kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz dua. Sufian membentuk cerita berkenaan dengan lapan biji limau yang dibahagi kepada tiga orang sahabat. Subjek menjelaskan seorang akan memperoleh dua biji. Selepas bercerita,

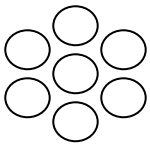
subjek menyusun tiga penyedut minuman dan meletakkan dua butang bagi setiap penyedut minuman. Selain itu, Sufian juga berpendapat bahawa dua biji butang lagi tidak boleh diambil kira kerana butang-butang tersebut tidak mencukupi untuk diagihkan kepada tiga penyedut minuman.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Penyebut dan Pengangka Yang Sama

Sufian mewakilkan ayat 7 ÷ 7 dengan mengumpulkan ketujuh-tujuh butang dalam satu kumpulan. Subjek juga mewakilkan ayat tersebut dengan membentuk tujuh kumpulan yang mengandungi satu butang di dalamnya. Tingkah laku beliau dipaparkan dalam Petikan PW123 yang berikut.

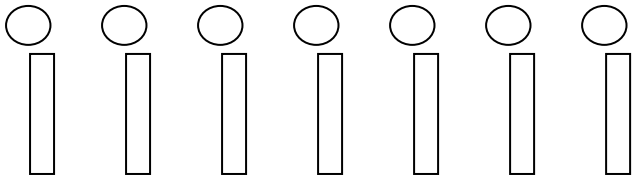
Petikan PW123

P: Boleh baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 7)
S: Tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh tunjuk dengan butang?
S: (Subjek mengambil tujuh butang dan menyusunnya seperti berikut):

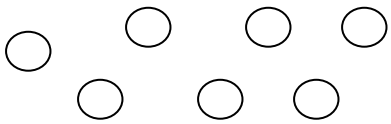


P: Kenapa Sufian susun seperti itu?

S: Sebab tujuh bahagi tujuh satu.
P: Yang mana satu?
S: Satu kumpulan (menunjukkan kumpulan bersaiz tujuh).
P: Kenapa Sufian kumpulkan semua dalam satu kumpulan?
S: Sebab tujuh bahagi tujuh. Dalam ni ada tujuh
P: Boleh Sufian terangkan, yang mana tujuh dalam ayat ni (menunjukkan ayat 7 ÷ 7) dan jawapannya yang mana pada susunan Sufian ni?
S: Tujuh semua, bahagi tujuh …ada tujuh dalam satu kumpulan.
P: Bagaimana dengan jawapan dia?
S: Jawapan dia satu sebab ada satu kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk tujuh bahagi tujuh?
S: (Subjek meletakkan tujuh penyedut minuman dan meletakan butang di atasnya tanpa diminta):

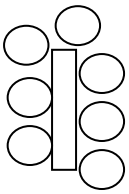


P: Boleh beritahu cikgu, apa yang Sufian buat di sini?
S: Saya ada … tujuh biji limau nak bahagi kepada tujuh orang kawan. (Subjek terus bercerita tanpa diminta sambil menunjukkan susunannya).
P: Seorang dapat berapa?
S: Satu.
P: Yang mana jawapan ayat tadi?
S: Satu (menunjukkan satu kumpulan).
P: Ada cara lain tujuh bahagi tujuh?
S: Tak ada.
P: Kalau tujuh bahagi satu macam mana? Boleh tunjuk dengan butang? Gunakan butang yang lain.
S: (Subjek meletakkan butang-butang tersebut seperti berikut):



P: Boleh beritahu cikgu kenapa Sufian susun macam tu?
S: Sebab bahagi satu (subjek menunjukkan butang yang disusun).
P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tujuh.
P: Jawapannya berapa?
S: Tujuh.

P: Macam mana dapat tujuh?
S: Ada tujuh kumpulan (menunjukkan kumpulan).
P: Sama tak dengan tadi, tujuh bahagi tujuh (menunjukkan penyusunan penyedut minuman dengan satu butang tadi)?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni bahagi satu.
P: Yang tadi?
S: Tadi bahagi tujuh..
P: Tapi, susunan Sufian tadi (menunjukkan susunan dengan tujuh batang penyedut minuman) juga mempunyai satu butang yang berasingan. Tak sama ke dengan yang ini?
S: Tak.
P: Kenapa?
S: Sebab tadi bahagi kepada tujuh.
P: Tak sama?
S: Tak.
P: Boleh Sufian buat cerita macam tadi?
S: Saya ada tujuh gula-gula. Bahagi kepada … seorang kawan (subjek menjawab sambil menyusun butang dan penyedut minuman).



P: Lagi?
S: Dia dapat semua.
P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Satu.
P: Kenapa satu?
S: Sebab nak bahagi satu.
P: Jawapannya?
S: Tujuh.
P: Yang mana tujuh?
S: Semua (menunjukkan susunan yang di bentuk).
P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh bahagi satu?
S: Tak ada.

Sufian mewakilkan tujuh bahagi tujuh dengan mengumpulkan ketujuh-tujuh butang dalam satu kumpulan. Menurut beliau, cara penyusunan yang ditunjukkan oleh beliau adalah kerana ayat

bahaginya adalah tujuh bahagi tujuh dan satu kumpulan perlu mengandungi tujuh butang.

Sufian juga menyusun tujuh penyedut minuman dan meletakkan satu butang bagi setiap penyedut minuman tersebut. Sufian juga membentuk cerita berpandu kepada susunanbeliau. Dalam cerita Sufian, tujuh biji limau dibahagi kepada tujuh orang sahabat dan setiap seorang sahabat akan mendapat sebiji limau.

Seterusnya, bagi ayat tujuh bahagi satu pula, Sufian meletakkan ketujuh-tujuh butang secara berjauhan. Menurut beliau, penyusunan seperti itu dilakukan kerana soalannya adalah bahagi satu dan setiap kumpulan hanya boleh mengandungi satu butang sahaja. Selain itu, Sufian juga mewakilkan tujuh bahagi satu dengan meletakkan tujuh butang pada satu penyedut minuman. Subjek menjelaskan jawapan bagi pembahagian tersebut adalah tujuh, iaitu merujuk saiz satu kumpulan.

Selain itu, Sufian juga berpendapat bahawa walaupun penyusunan bagi ayat tujuh bahagi satu (7 ÷ 1) dan ayat tujuh bahagi tujuh (7 ÷ 7) mempunyai tujuh kumpulan bersaiz satu, tetapi kedua-duanya adalah tidak sama kerana mempunyai pembahagi yang berbeza, iaitu satu dan tujuh.

Gambar Rajah

Sufian mewakilkan tiga gambar rajah yang dikemukakan satu persatu dengan menulis ayat bahagi serta menerangkan maksud setiap angka dalam ayat bahagi yang telah ditulisnya. Petikan PW124, PW125, dan PW126 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh beliau.

Petikan PW124

P: Cuba lihat gambar ni (menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas bola)? Boleh tak buat ayat bahagi tentang gambar ni?
S: Ayat?
P: Ayat bahagi macam soalan tadi (menunjukkan satu contoh ayat bahagi).
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 3$$

P: Lima belas bahagi tiga sama dengan apa dalam gambar tu?
S: Lima. (Subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 3 = 5$$

P: Boleh beritahu cikgu apa yang Sufian tulis?
S: Lima belas bahagi tiga sama dengan lima.
P: Kenapa Sufian tulis lima belas?
S: Sebab semua ada lima belas bola.
P: Tiga?
S: Tiga sebab ada tiga bola (subjek menunjukkan kumpulan tiga bola).
P: Lima tu dari mana?
S: Lima sebab ada lima … (subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang mengandungi tiga bola).
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi untuk gambar rajah tadi?
S: Tak ada.
P: Cuba Sufian buat cerita macam tadi. Sufian nak bahagi kepada kawan-kawan ke?

S: Saya ada lima belas bola. Nak bahagi kepada lima orang kawan.
P: Seorang dapat berapa?
S: Seorang akan dapat …tiga.
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk cerita tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 5 = 3$$

P: Lima belas rujuk pada apa dalam gambar?
S: Semua.
P: Lima?
S: Bulatan (subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang mengandungi tiga bola).
P: Dalam cerita Sufian?
S: Orang … kawan.
P: Tiga?
S: Tiga bola (subjek menunjukkan kumpulan tiga bola).
P: Ayat tadi dengan ayat ni sama tak?
S: Tak
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni bahagi lima (menunjukkan ayat $15 \div 5 = 3$), yang ni bahagi tiga (menunjukkan ayat $15 \div 3 = 5$).
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Jawapan.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni tiga (menunjukkan ayat $15 \div 5 = 3$), yang ni lima (menunjukkan ayat $15 \div 3 = 5$).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada. Lima belas... sama.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas Sufian menulis ayat bahagi $15 \div 3 = 5$ bagi gambar rajah yang mempunyai lima belas bola yang kumpulkan dalam lima bulatan. Selain itu, Sufian juga membuat cerita dengan mewakilkan setiap kumpulan sebagai sahabatnya. Subjek juga menulis ayat $15 \div 5 = 3$ bagi mewakili cerita beliau. Menurut Sufian, kedua-dua ayat bahagi yang ditulisnya adalah berbeza kerana

pembahagi dan hasil bahagi bagi kedua-dua ayat tersebut adalah tidak sama.

Petikan PW125

P: Cuba lihat gambar ni pula (menunjukkan gambar enam belas ekor kura-kura). Boleh buat ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$16 \div 4 = 4$$

P: Boleh baca apa yang Sufian tulis?
S: Enam belas bahagi empat sama dengan empat.
P: Kenapa tulis enam belas?
S: Jumlah kura-kura ada enam belas.
P: Bahagi empat?
S: Empat kura-kura.
P: Jawapan empat ni (menunjukkan angka 4 pada jawapan)?
S: Ada empat bulatan.
P: Boleh buat ayat lain?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$16 \div 4 = 4$$

P: Ayat ni sama tak dengan yang tadi?
S: Lain. Bulatan empat, kura-kura pun ada empat.
P: Jadi kedua-dua ayat tadi sama tak?
S: Ayat sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Sama.
P: Sama? Kenapa sama?
S: Kura-kura dan bulatan ada empat.
P: Dua-dua ayat bahagi sama tak?
S: Sama.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam aktiviti di atas, Sufian menulis ayat bahagi $16 \div 4 = 4$ bagi mewakili gambar rajah yang ditunjuk oleh pengkaji. Sufian juga menulis satu lagi ayat yang serupa bagi

mewakili gambar rajah tersebut. Selain itu, beliau menjelaskan bahawa kedua-dua ayat yang ditulisnya adalah sama kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang sama walaupun pembahagi dan jawapan kedua-dua ayat merujuk kepada perkara yang berbeza. Subjek juga menjelaskan bahawa bilangan kumpulan yang terdapat dalam gambar rajah adalah sama dengan bilangan kura-kura setiap kumpulan.

Petikan PW126

P: Sekarang cuba tengok gambar ini. Sama macam tadi boleh tak buat ayat bahagi untuk gambar ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$21 \div 7 = 3$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh satu bahagi tujuh sama dengan tiga
P: Macam mana dapat dua puluh satu?
S: Ada dua puluh satu kotak (subjek menunjukkan jalur pada gambar rajah).
P: Tujuh?
S: Ada tujuh kotak satu bahagian (menunjukkan jalur-jalur yang terdapat dalam ketiga-tiga bahagian).
P: Tiga?
S: Tiga tu bahagian (menunjukkan tiga bahagian dalam gambar rajah).
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$21 \div 3 = 7$$

P: Dah? Cuba baca.
S: Dua puluh satu bahagi tiga sama dengan tujuh.
P: Baik, ayat-ayat tadi sama tak?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Nombor dia lain. (menunjukkan bahagi tiga dan bahagi tujuh).

P: Boleh beritahu yang mana tak sama?
S: Yang ni tiga (menunjukkan ayat 21 ÷ 7 = 3) yang ni tujuh (menunjukkan ayat 21 ÷ 3 = 7).
P: Lagi, ada tak yang tak sama?
S: Ada. Yang ni tujuh (menunjukkan ayat 21 ÷ 7 = 3) yang ni tiga (menunjukkan ayat 21 ÷ 3 = 7).
P: Ada cara lain menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW126, Sufian menulis ayat 21 ÷ 7 = 3 sebagai mewakili gambar yang dikemukakan. Subjek juga menulis satu lagi ayat, iaitu 21 ÷ 3 = 7. Selain itu, Sufian menjelaskan bahawa kedua-dua ayat yang ditulisnya adalah tidak sama kerana kedua-duanya mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza.

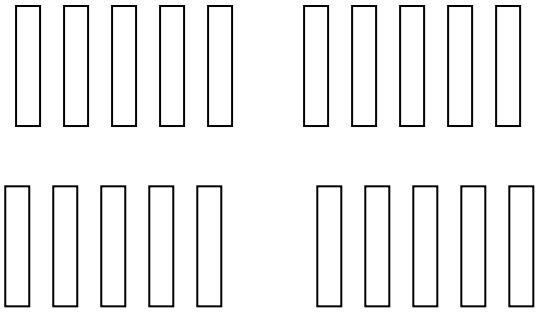
Penolakan Berulang

Sufian mewakilkan pembahagian secara penolakan berulang dengan mengeluarkan sejumlah yang sama penyedut minuman daripada penyedut minuman yang telah di tentukan dalam soalan yang diberi. Petikan PW127 dan PW128 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh beliau.

Petikan PW127

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5). Boleh Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua puluh bahagi lima.
P: Boleh Sufian tunjuk dengan penyedut minuman ini bagaimana dua puluh bahagi lima?

S: (Subjek menyusun penyedut minuman seperti berikut):

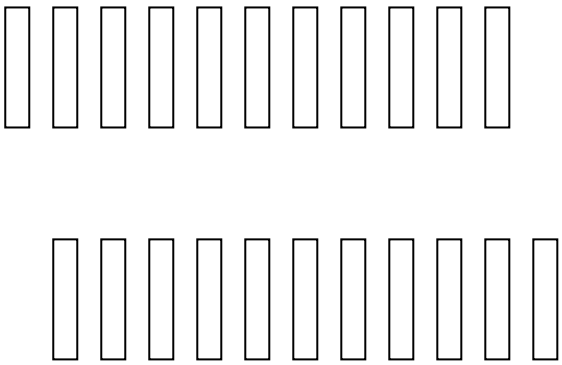


P: Kenapa susun macam ini (menunjukkan penyedut minuman yang telah disusun).

S: Sebab dua puluh bahagi lima (subjek menunjukkan angka lima pada kad).

P: Kalau dua puluh bahagi sepuluh, bagaimana?

S: (Subjek menyusun semula penyedut minuman yang diberi seperti berikut):



P: Kenapa Sufian kumpulkan sepuluh penyedut dalam satu longgokan?

S: Sebab bahagi sepuluh.

P: Baiklah. Balik kepada soalan tadi, dua puluh bahagi lima. Apa jawapan yang Sufian akan dapat?

S: (Subjek menyususn semula kepada empat bahagian dan memberi jawapan). Empat

P: Bagaimana tahu empat?

S: Sebab ada empat kumpulan (menunjukkan empat longgokan yang telah disusun).

P: Baik yang ini kita simpan dulu. Sekarang boleh tak Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5)?

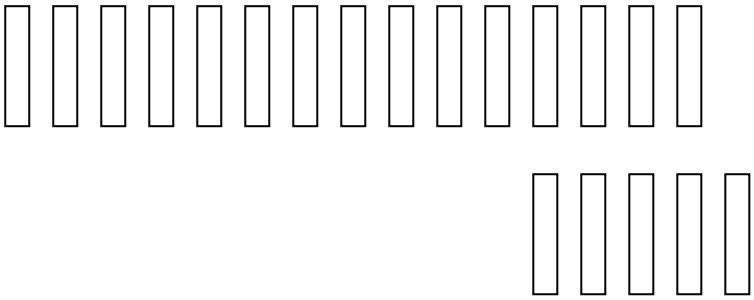
S: Dua puluh bahagi lima.

P: Kad tadi Sufian kata dua puluh bahagi lima, yang ini sama ke?

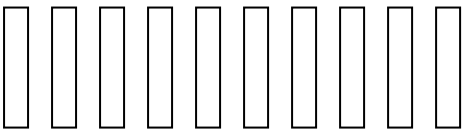
S: …Tolak. Dua puluh tolak lima.

P: Baik boleh Sufian tunjuk macam tadi menggunakan penyedut minuman yang lain?

S: (Subjek tidak menjawab).
P: Tadi dua puluh bahagi lima, sekarang dua puluh tolak lima.
S: (Subjek meletakkan dua puluh penyedut minuman kemudian mengasingkan lima daripada dua puluh penyedut minuman seperti berikut). Dua puluh tolak lima ... lima belas.



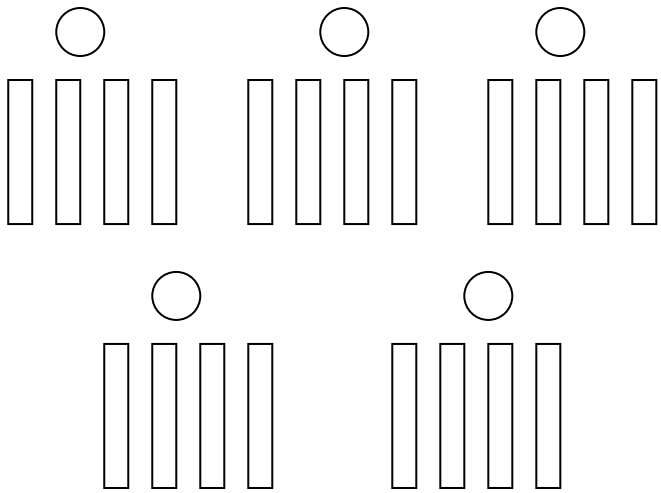
P: Baik, apa yang Sufian buat tu?
S: Dua puluh tolak lima.
P: Boleh Sufian tolak lima lagi?
S: Dari sini (subjek menunjukkan longgokan yang mengandungi lima belas penyedut)?
P: Ya.
S: (Subjek mengasingkan lima lagi seperti berikut):



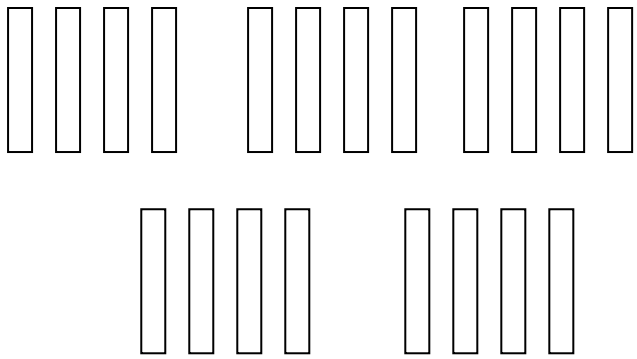
P: Ada berapa yang tinggal?
S: (Subjek menghitung dan memberi jawapan) Sepuluh.
P: Sekarang Sufian keluarkan lima lagi dan beritahu berapa yang tinggal?
S: (Subjek mengeluarkan lima dan memberi jawapan). Lima.
P: Keluarkan lagi lima.
S: (Subjek menolak lima penyedut minuman yang tinggal dan menjawab). Jawapannya kosong.
P: Baik Sufian menolak berapa penyedut minuman setiap kali?
S: Lima.

P: Berapa kali Sufian keluarkan lima penyedut minuman?
S: Lima.
P: Macam mana dapat lima?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Cuba Sufian buat semula. Ambil dua puluh tadi dan tolak lima-lima sampai habis? Kali ini cuba asingkan setiap lima yang ditolak. Boleh?
S: (Subjek mengambil semula dua puluh penyedut minuman dan mengeluarkan dalam kumpulan lima sampai habis).
P: Berapa kali tolak lima?
S: Empat
P: Tadi dua puluh bahagi lima dapat berapa? Cuba tengok susunan tadi?
S: Empat.
P: Yang baru Sufian buat tadi, $20 - 5$ secara berulang perlu tolak lima berapa kali?
S: Empat.
P: Sama tak kedua-dua ayat tadi?
S: (Subjek mengangguk).
P: Apa yang sama?
S: Jawapannya empat.
P: Yang mana jawapannya empat?
S: Dua-dua pun ada empat longgokan.
P: Ada lagi yang sama?
S: Tak ada.
P: Perbezaan ada tak?
S: Yang ni bahagi (subjek menunjukkan susunan yang dibuat bagi $20 \div 5$) yang ni tolak (subjek menunjukkan susunan bagi $20 - 5$).
P: Ada lagi tak yang berbeza atau sama?
S: Tak ada.
P: Apa yang sama tentang kedua-dua ayat tadi? Ada tak yang sama?
S: Ada.
P: Apa yang sama?
S: Dua-dua pun ada dua puluh.
P: Apa lagi yang sama?
S: Lima.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Apa kaitan ayat bahagi dan ayat tolak?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Sufian rasa kenapa agaknya ayat bahagi dan ayat tolak dapat susunan yang sama macam yang Sufian tunjuk tadi?
S: Sebab kalau tolak lima-lima jawapannya sama dengan bahagi.
P: Sama macam mana?

S: Macam ni (subjek menunjukkan susunan yang telah dibuatnya).
P: Apa jawapannya yang sama bagi kedua-dua susunan?
S: Lima…empat.
P: Lima atau empat?
S: Empat.
P: Baik ada cara lain tak nak tunjuk dua puluh bahagi lima?
S: Tak ada.
P: Cuba buat cerita?
S: Saya ada dua puluh biji limau. Bahagi kepada lima orang.
P: Seorang akan dapat berapa?
S: Seorang akan dapat empat.
P: Boleh tunjuk dengan penyedut minuman ni? Katakan butang ni orang (memberikan butang kepada subjek).
S: (Subjek meletakkan lima butang dan kemudian menyusun empat penyedut minuman setiap satu). Empat.



P: Boleh terangkan apa yang Sufian buat?
S: Dua puluh biji limau bahagi kepada lima orang. Seorang mendapat empat (subjek menunjukkan butang dan penyedut minuman sambil menerangkan.)
P: Ada cara lain nak tunjuk penolakan secara berulang macam tadi? Gunakan penyedut minuman yang lain.
S: (Subjek berfikir sebentar dan menjawab). Tak ada.
P: Cuba Sufian tunjuk macam mana dua puluh tolak empat? Buat macam tu sampai habis.
S: (Subjek mengeluarkan empat-empat penyedut minuman sehingga habis dan menyusunnya dalam lima longgok yang berasingan).



P: Ada berapa Kumpulan empat penyedut yang telah dikeluarkan?
S: Lima.
P: Ada tak apa-apa yang sama dengan yang tadi?
S: Lima kumpulan.
P: Yang tadi?
S: Lima kumpulan juga.
P: Macam mana dengan bilangan penyedut minuman yang dikeluarkan setiap kali?
S: Empat.
P: Yang soalan bahagi tadi?
S: Empat juga.
P: Sama tak?
S: Sama.
P: Ada tak yang tak sama?
S: Ini tolak (subjek menunjukkan penyedut minuman bagi penolakan), ini bahagi (subjek menunjukkan susunan bagi pembahagian).
P: Sufian rasa apa kaitan antara tolak dan bahagi?
S: Sama.
P: Sama macam mana?
S: Susunan dia sama.
P: Baik, apa lagi kaitan antara tolak dan bahagi?
S: Tak ada.
P: Tak ada kaitan lain?
S: Tak ada.
P: Macam tadi, kita boleh buat bahagi dengan tolak empat kali, kan?
S: (Subjek mengangguk).

Dalam petikan di atas Sufian dapat menunjukkan pembahagian $20 \div 5$ dengan membentuk empat kumpulan bersaiz empat. Subjek

juga menunjukkan 20 – 5 dengan mengeluarkan lima daripada dua puluh penyedut minuman. Seterusnya, Sufian mengeluarkan lima sebanyak tiga kali lagi sehingga kesemua penyedut minuman dikeluarkan.

Sufian berpendapat bahawa bilangan kumpulan lima penyedut minuman yang beliau dikeluarkan adalah sama dengan hasil bahagi bagi ayat dua puluh bahagi lima, iaitu empat. Selain itu subjek juga berpendapat bahawa lima pada ayat bahagi dua puluh bahagi lima adalah sama dengan lima penyedut yang dikeluarkan secara berulang-ulang.

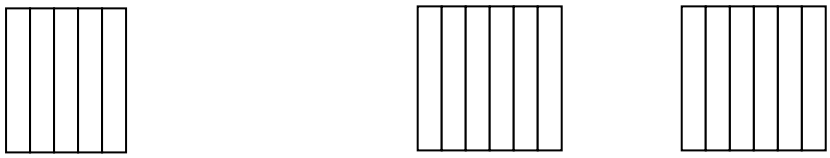
Sufian juga membentuk cerita dan menunjukkan ayat 20 ÷ 5 dengan menyusun lima kumpulan bersaiz empat. Subjek juga berpendapat bahawa pembahagian dan penolakan secara berulang adalah sama. Bagi mewakilkan dua puluh tolak empat, subjek mengeluarkan kumpulan bersaiz empat penyedut minuman sebanyak lima kali. Sufian juga menjelaskan bahawa lima pada ayat 20 ÷ 5 adalah sama dengan bilangan kumpulan bersaiz empat penyedut minuman yang dikeluarkan. Selain itu, Sufian juga berpendapat bahawa perbezaan yang terdapat antara ayat bahagi 20 ÷ 5 dan ayat tolak 20 − 5 hanya perbezaan dari segi simbol matematiknya, iaitu bahagi dan tolak.

Petikan PW128

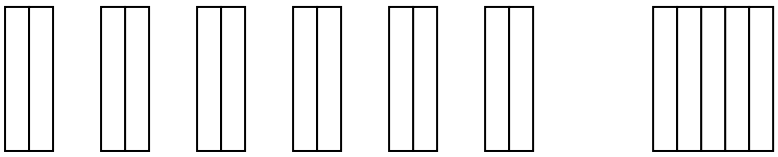
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6) Boleh Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini?

S: Tujuh belas bahagi enam.
P: Boleh tunjuk dengan penyedut minuman macam tadi?
S: (Subjek menyusun seperti berikut dan memberi jawapan). Tak cukup.

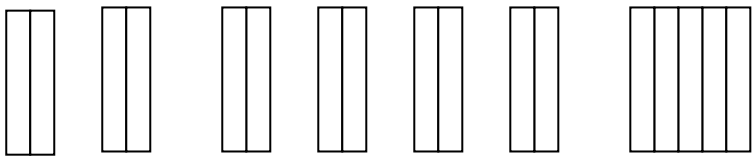
P: Apa yang tak cukup?
S: Kurang satu.
P: Jadi apa jawapannya?
S: Dua
P: Boleh buat cara tadi secara penolakan (menunjukkan ayat 17 − 6)? Gunakan penyedut minuman yang lain.
S: Tujuh belas tolak enam. (Subjek mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang dan mengumpulkannya secara berasingan)



P: Apa yang Sufian dapat?
S: Tak cukup satu juga.
P: Sufian keluarkan berapa penyedut minuman?
S: Enam.
P: Berapa kali Sufian dapat keluarkan enam?
S: Dua kali.
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan kumpulan yang mempunyai lima penyedut minuman)?
S: Tak cukup enam. Ada lima saja.
P: Cuba bandingkan dengan longgokan tadi. Sama tak?
S: (Subjek mendapati kedua-dua longgokan sama) Sama.
P: Apa yang sama dalam kedua-dua susunan?
S: Ada dua kumpulan enam penyedut minuman
P: Yang ini (menunjukkan longgokan yang mempunyai lima penyedut minuman)?
S: …Satu kumpulan lima penyedut minuman.
P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh belas bahagi enam?
S: Cara cerita?
P: Ok, cara cerita.
S: Ada tujuh belas biji limau bahagi kepada enam orang. (Subjek bercerita sambil menyusun penyedut minuman)

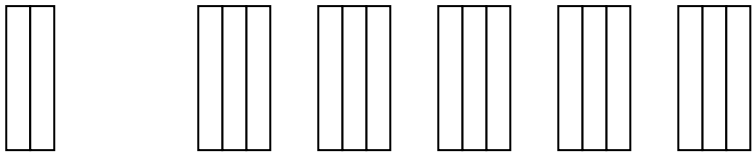


P: Seorang dapat berapa?
S: Dua
P: Yang ini (menunjukkan lima penyedut yang diasingkan)?
S: Yang tu tak cukup. Tak boleh bahagi. Kalau bagi seorang tak dapat.
P: Cara penolakan tadi?
S: Tujuh belas tolak enam?
P: Ya, tujuh belas tolak enam.
S: Sama macam tadi (menunjukkan penyusunan sebelumnya).
P: Kalau tujuh belas tolak enam sama macam tadi, tujuh belas perlu tolak berapa?
S: Tolak lima?
P: Tadi, untuk dua puluh bahagi lima Sufian tolak lima kali. Yang ini tolak enam.
S: Tolak enam kali?
P: Nak tolak berapa enam kali?
S: Tiga.
P: Sufian jangan lupa cuma ada tujuh belas sahaja. Cukup ke nak tolak tiga enam kali?
S: …Dua?
P: Nak tolak berapa? Dua atau tiga?
S: Dua.
P: Kenapa bukan tiga?
S: Kalau tolak tiga dapat tolak lima kali saja. Kalau lapan belas penyedut minuman boleh tolak enam kali.
P: Boleh Sufian tunjuk?
S: (Subjek mengeluarkan dua-dua dan melonggokkannya dalam enam kumpulan, meninggalkan lima penyedut lagi di tempat asal)

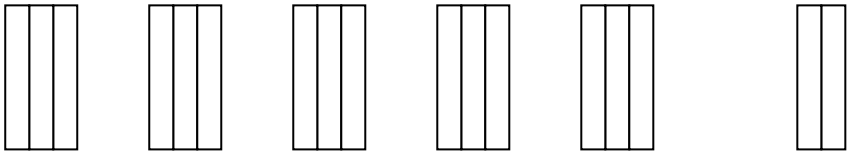


P: Kalau tolak enam kali berapa kena tolak berapa setiap kali?
S: Tolak dua.
P: Yang ni (menunjukkan kumpulan bersaiz lima)?
S: Lebih.

P: Kalau buat tolak tiga dapat berapa kali?
S: (Subjek mengeluarkan tiga-tiga dalam lima kumpulan dan meninggalkan dua pada kedudukan asal) Lima kali.



P: Yang ini (menunjukkan dua penyedut yang tinggal)?
S: Tak cukup.
P: Tak cukup berapa lagi?
S: Satu lagi.
P: Kalau tujuh belas bahagi tiga?
S: (Subjek mengumpulkan tiga-tiga dalam lima longgokan dan dua dalam satu longgokan) Lima
P: Yang ini (menunjukkan dua penyedut)
S: Tak cukup tiga.



P: Sufian rasa tujuh belas bahagi tiga dengan tujuh belas tolak tiga secara berturut-turut sama tak?
S: Sama.
P: Kenapa?
S: Jawapan sama.
P: Apa jawapan dia?
S: Lima.
P: Yang mana menunjukkan lima?
S: Lima kumpulan (menunjukkan kumpulan bersaiz tiga).
P: Yang ni?
S: Yang tu lebih.
P: Jadi, apa kaitan bahagi dan tolak.
S: Boleh buat bahagi dengan tolak.

Dalam Petikan PW128, Sufian membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima bagi mewakili ayat 17 ÷ 6. Subek juga menunjukkan ayat 17 – 6 dengan

mengeluarkan dua kumpulan bersaiz enam menunggalkan satu kumpulan bersaiz lima. Subjek berpendapat bahawa kedua-duanya adalah sama dari segi penyusunannya.

Selain itu, Sufian juga membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz lima bagi mewakili ayat 17 ÷ 6. Subjek juga menolak dua sebanyak enam kali meninggalkan satu kumpulan bersaiz lima bagi menunjukkan ayat 17 – 6. Sufian juga menjelaskan bahawa enam dalam ayat bahagi 17 ÷ 6 adalah sama dengan penolakan dalam kumpulan bersaiz enam dan hasil bahagi bagi ayat 17 ÷ 6 adalah sama dengan bilangan kumpulan bersaiz enam yang dapat ditolak daripada jumlah asal. Sufian juga membentuk lima kumpulan bersaiz tiga dan satu kumpulan bersaiz dua bagi mewakili ayat tujuh belas bahagi tiga dan juga tujuh belas tolak tiga. Subjek juga berpendapat bahawa bahagi dapat dilakukan dengan menggunakan kaedah penolakan secara berulang.

Masalah Berkotak

Menentukan Nama Kotak

Dalam aktiviti ini subjek perlu menentukan operasi yang berlaku dalam kotak yang ditunjukkan kepadanya. Bagi menentukan operasi itu dua nombor dimasukkan ke dalam kotak satu persatu dan satu nombor lagi dikeluarkan daripada kotak tersebut. Sufian menentukan operasi yang berlaku di dalam 'kotak ajaib' secara lukisan dan bercerita. Tingkah laku yang tunjukkan oleh Sufian dipaparkan dalam petikan MK131 yang berikut.

Petikan MK131

P: (Menunjukkan satu kotak). Kotak ini apabila kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A) satu nombor akan keluar melalui lubang ni (menunjukkan lubang B). Dua nombor masuk di sini (menunjukkan lubang A), kotak ni proses kemudian jawapannya akan keluar di sini. (menunjukkan lubang B) Sekarang kita masukkan dua nombor ya. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 14)?

S: Empat belas.

P: Kita masukkan nombor tadi di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A). Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 2)?

S: Dua.

P: Baik. Nombor ni pun kita masukkan di sini (memasukkan nombor tersebut di A). Boleh ingat tak kedua-dua nombor tadi?

S: Empat belas dengan dua.

P: Baik. Kita tengok nombor apa yang akan keluar dari sini. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 7)?

S: Tujuh.

P: Apa kotak ini dah buat kepada empat belas dengan dua

tadi, sehingga menghasilkan nombor tujuh. Empat belas dengan dua menghasilkan tujuh.

S: (Subjek tidak menjawab).

P: Kita cuba satu lagi (menunjukkan kad yang tertulis 10). Ini nombor apa?

S: Sepuluh.

P: Kita masukkan nombor sepuluh di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A.) Nombor apa ni (menunjukkan kad yang tertulis 5)?

S: Lima.

P: Baik. Kita masukkan dalam lubang ni macam tadi (memasukkan kad tersebut ke dalam lubang A). Nombor apa yang keluar dari sini (menunjukkan kad yang keluar dari lubang B).

S: Dua.

P: Nombor yang masuk sepuluh dan lima, nombor yang keluar dua. Tadi nombor yang masuk empat belas dan dua, nombor yang keluar tujuh. Apa agaknya kotak ini dah buat kepada nombor-nombor tadi?

S: (Subjek tidak menjawab).

P: Kotak ni buat apa kepada sepuluh dan lima hingga dapat jawapan dua? Tadi empat belas dengan dua dapat jawapan tujuh?

S: (Subjek tidak menjawab).

P: Kita cuba satu lagi. Ini apa (menunjukkan nombor 4)?

S: Empat.

P: Ini (menunjukkan nombor 2)?

S: Dua.

P: Nombor yang keluar (menunjukkan nombor 2).

S: Dua

P: Apa kotak ni dah buat kepada empat dan dua hingga dapat jawapan dua?

S: Tolak.

P: Kalau tolak, tadi kita masukkan empat belas dan dua dapat tujuh. Empat belas tolak dua dapat tujuh ke?

S: Tak

P: Tadi kita masukkan sepuluh dengan lima, jawapannya dua. Kalau sepuluh tolak lima berapa?

S: Lima.

P: Jadi apa agaknya kotak ni dah buat?

S: Bahagi.

P: Bahagi? Kenapa kata bahagi?

S: Sebab sepuluh kalau bahagi dengan lima sama dengan dua.

P: Kenapa tidak darab?

S: Tak boleh.

P: Kenapa tak boleh?

S: Sebab kalau darab jawapan dia bukan dua.

P: Tadi empat belas dengan dua dapat tujuh. Apa agaknya

kotak tu dah buat?
S: Bahagi. Empat belas bahagi dua dapat tujuh.
P: Yang ini tadi empat dengan dua dapat dua?
S: Tolak.
P: Tapi kita guna kotak yang sama. Kalau tolak yang tadi (menunjukkan set empat belas dan sepuluh) pun kena tolak juga.
S: Bahagi
P: Yang mana satu, tolak atau bahagi?
S: Bahagi.
P: Bukan tolak?
S: Bukan. Empat bahagi dua, dua.
P: Kita cuba satu set lagi. Ini apa (menunjukkan 8)?
S: Lapan.
P: Ini (menunjukkan 4)?
S: Empat.
P: Jawapannya (menunjukkan 2)?
S: Dua.
P: Jadi apa kotak ni dah buat?
S: Bahagi.
P: Bukan tolak ya?
S: Bukan.
P: Baik, sekarang boleh tak Sufian tunjuk apa kotak dah buat kepada nombor- nombor sepuluh dan lima hingga dapat nombor dua?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut)

P: Apa ni?
S: Limau.
P: Boleh Sufian terangkan apa yang Sufian lukis ni?
S: Ini sepuluh (menunjukkan keseluruhan bulatan) ini bahagi
lima (menunjukkan satu longgokan).
P: Yang keluar dari lubang B tadi tu?
S: Dua. Ini ada dua kumpulan (subjek menunjukkan dua longgokan yang dilukisnya).
P: Agaknya ada tak cara lain sepuluh boleh dibahagi lima oleh
kotak ni?
S: (Subjek diam sebentar). Tak ada.
P: Tak ada cara lain?
S: Tak ada.
P: Boleh Sufian tuliskan ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak tu?
S: (Subjek menulis ayat berikut) Macam ni?

$$10 \div 5 = 2$$

P: Boleh terangkan apa yang Sufian tulis ni?
S: Sepuluh bahagi lima sama dengan dua.
P: Kenapa Sufian lukiskan seperti ini (menunjukkan kumpulan lima limau)?
S: Sebab sepuluh bahagi dengan lima.
P: Angka ni merujuk pada bahagian mana pada gambar Sufian tu (menunjukkan angka 10)?
S: Semua.
P: Yang ini (menunjukkan 5)?
S: Lima ni (menunjukkan lima biji bola yang dilukiskan rapat-rapat).
P: Jawapannya (menunjukkan 2)?
S: (Subjek menunjukkan dua kumpulan bola). Yang ni.
P: Ada tak cara lain kotak ni boleh bahagi sepuluh sehingga dapat jawapan dua?
S: Tak ada.

Sufian mengenal pasti operasi yang berlaku adalah bahagi setelah tiga set nombor dimasukkan ke dalam kotak. Subjek juga menjelaskan bagaimana pembahagian berlaku sehingga menghasilkan jawapan yang dikeluarkan melalui lubang B secara lukisan. Subjek melukis dua kumpulan bersaiz lima limau pada lukisan beliau.

Selain itu, Sufian juga mengaitkan lukisannya dengan apa yang berlaku dalam kotak. Menurut Sufian, sepuluh biji limau dalam lukisannya adalah sama dengan angka sepuluh yang dimasukkan ke dalam kotak, lima biji limau yang disusun dalam satu kumpulan pula merujuk angka lima yang dimasukkan selepas nombor sepuluh ke dalam kotak. Manakala, dua kumpulan limau yang diasingkan dalam lukisan beliau merujuk kepada jawapan yang diperoleh melalui lubang B.

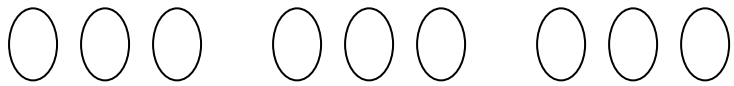
Sufian juga menulis ayat bahagi 10 ÷ 5 = 2 bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Sufian juga menjelaskan sepuluh pada ayat bahagi merujuk sepuluh biji limau pada lukisannya, lima merujuk kepada saiz setiap kumpulan, manakala dua pada ayat bahagi pula merujuk bilangan kumpulan.

Menentukan Hasil Bahagi

Sufian menentukan jawapan yang keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Tingkah laku yang ditunjukkan oleh Sufian dipaparkan melalui Petikan MK132 yang berikut.

Petikan MK132

P: Tadi Sufian sebut kotak ni boleh bahagi. Jadi nama kotak ni bahagi. Sekarang kita akan masukkan nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis 9). Nombor berapa ni?
S: Sembilan.
P: Macam tadi kita masukkan dalam ni (memasukkan kad tersebut ke dalam kotak). Yang ini nombor apa? (menunjukkan kad yang tertulis tiga)?
S: Tiga.
P: Kita masukkan juga nombor ni. Nombor apa agaknya yang akan keluar dari kotak ni?
S: Tiga.
P: Kenapa kata tiga.
S: Sebab sembilan bahagi tiga sama dengan tiga.
P: Baik, boleh Sufian tunjuk apa yang kotak tu buat kepada sembilan dan tiga hingga dapat jawapan?.
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Sufian lukis apa, boleh terangkan?

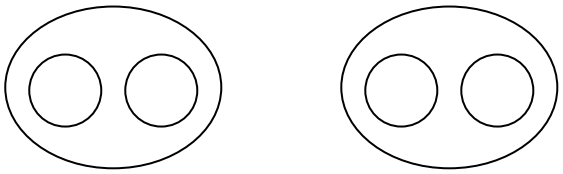
S: Buah. Sembilan bahagi tiga sama dengan tiga (subjek menunjukkan lukisannya semasa menjawab).
P: Kenapa lukiskan tiga-tiga?
S: Sebab sembilan bahagi dengan tiga.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \div 3 = 3$$

P: Angka sembilan ni merujuk kepada bahagian mana dalam lukisan?
S: Semua buah.
P: Yang ni (menunjukkan 3 selepas simbol bahagi)?
S: Tiga ni (menunjukkan tiga buah).
P: Jawapannya?
S: Semua bulatan (subjek menunjukkan bahagian yang telah dibulatkan)
P: Selain cara tadi ada tak cara lain kotak tu bahagi sembilan
sehingga nombor keluar?
S: (Subjek diam sebentar dan menjawab). Tak ada.
P: Sekarang kita cuba dengan satu lagi nombor. Ini apa (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan 1)?
S: Satu.
P: Apa agaknya yang akan keluar dari lubang ini (menunjukkan lubang B)?
S: Dua.
P: Macam mana tahu dua?
S: Dua bahagi satu sama dengan dua. (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut):

P: Baik, kalau dua tadi kita gantikan dengan dua puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua puluh.
P: Kenapa dua puluh?
S: Dua puluh bahagi satu jawapannya dua puluh.
P: Kalau kita ganti dengan dua ratus?
S: Jawapannya dua ratus.
P: Kenapa dua ratus?
S: Dua ratus bahagi satu dua ratus.

P: Kita cuba dengan nombor lain. Kalau nombor ini (menunjukkan nombor 4)
S: Empat
P: Dan nombor ini (menunjukkan 2)
S: Dua
P: Kita masukkan di sini (menunjukkan lubang A) nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua. (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut):



P: Kalau kita gantikan empat dengan empat puluh, apa nombor yang akan keluar?
S: (Subjek senyap sambil menulis ayat berikut):

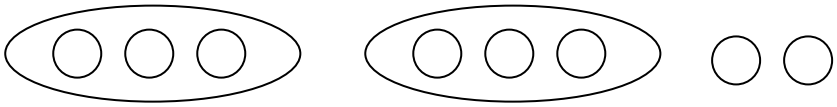
$$40 \div 2 = 20$$

P: Apa yang Sufian tulis?
S: Empat puluh bahagi dua.
P: Dapat berapa?
S: Dua puluh.
P: Mana tahu dua puluh?
S: Empat puluh bahagi dua sama dua puluh.
P: Bukan dua ke?
S: Mana boleh! Empat bahagi dua dapat dua.
P: Kalau empat puluh bahagi dua bukan empat puluh ke?
S: Tak boleh. Empat puluh bahagi dua dua puluh.
P: Kalau empat diganti dengan empat ratus?
S: Dua ratus
P: Mana Sufian tahu?
S: Empat ratus bahagi dua sama dua ratus.
P: Bukan dua puluh?
S: Dua puluh kalau empat puluh bahagi dua.
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menuliskan ayat berikut):

$$400 \div 2 = 200$$

P: Baik sekarang kita masukkan nombor ini (menunjukkan 8)?
S: Lapan.
P: Dan nombor ini (menunjukkan 3)?
S: Tiga.
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: (Subjek melukis seperti berikut dan memberi jawapan). Tak

ada.



P: Kenapa tak ada?
S: Tak cukup.
P: Apa yang tak cukup?
S: Satu lagi.
P: Jadi nombor apa yang akan keluar?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Bagi nombor sembilan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak, subjek berpendapat bahawa nombor yang akan keluar melalui lubang B adalah tiga.

Selain itu, subjek juga ayat bahagi $9 \div 3 = 3$ bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Subjek juga melukis bagaimana pembahagian tersebut berlaku. Sufian melukis sembilan biji buah yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan. Subjek juga menjelaskan bahawa sembilan pada ayat bahagi merujuk kesemua buah, tiga selepas simbol bahagi merujuk saiz kumpulan, manakala tiga pada hasil bahagi pula merujuk bilangan kumpulan bersaiz tiga.

Selain itu, subjek menjelaskan bahawa, sekiranya dua dan satu dimasukkan ke dalam kotak, nombor yang akan keluar adalah dua. Subjek juga mewakilkan pembahagian tersebut secara lukisan. Sufian melukis dua kumpulan bersaiz satu. Sufian juga berpendapat bahawa

sekiranya nombor dua pada ayat bahagi 2 ÷ 1 diganti dengan nombor dua puluh, nombor yang bakal keluar juga adalah dua puluh.

Bagi ayat bahagi 4 ÷ 2 pula, Sufian melukis dua kumpulan bersaiz dua. Subjek juga berpendapat bahawa bagi pembahagian tersebut, nombor yang akan keluar melalui B adalah dua. Selain itu, Sufian menjelaskan bahawa apabila nombor empat diganti dengan empat puluh nombor yang akan keluar adalah dua puluh. Menurut beliau lagi apabila nombor empat diganti dengan empat ratus jawapannya adalah dua ratus.

Bagi nombor lapan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak (8 ÷ 3) Sufian berpendapat tidak akan ada sebarang nombor yang keluar. Menurut beliau ini adalah kerana nombor lapan tidak mencukup untuk dibahagi tiga. Subjek juga mewakilkannya secara lukisan yang menunjukkan dua kumpulan yang mengandungi tiga bola dan satu kumpulan yang bersaiz dua.

Tafsiran Ayat Matematik

Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

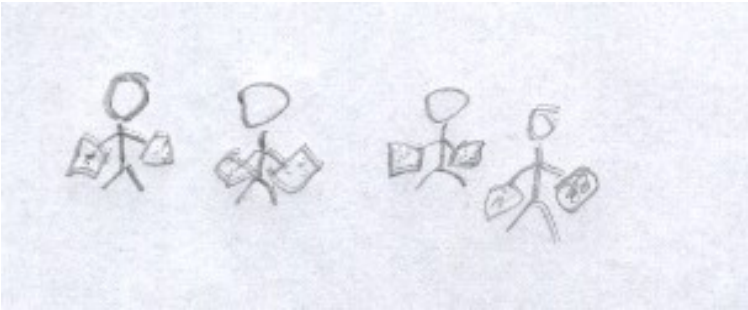
Sufian mewakilkan ayat 28 ÷ 4 dengan membentuk tujuh kumpulan bersaiz empat. Subjek juga menulis ayat darab 4 x 7 = 28 sebagai tafsiran bagi ayat bahagi 28 ÷ 4. Tingkah laku yang ditunjukkan oleh Sufian dipaparkan dalam petikan TA141.

Petikan TA141

P: Boleh Sufian baca tak apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Boleh tak Sufian terangkan macam mana dua puluh lapan bahagi empat.
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada kertas)

P: Kenapa kumpulkan empat-empat?
S: Bahagi empat.
P: Dua puluh lapan bahagi empat berapa?
S: Tujuh.
P: Macam mana dapat tujuh?
S: (Subjek menunjukkan bulatan yang dikumpulkan empat-empat). Ada tujuh.
P: Dua puluh lapan ni rujuk pada bahagian mana dalam gambar Sufian?
S: Semua.
P: Empat?
S: (Subjek menunjukkan empat bola yang dikumpulkan sekali) Ini.
P: Tujuh?

S: (Subjek menunjukkan kumpulan empat bola dalam gambarnya) Ini.
P: Sufian boleh buat cerita tak tentang dua puluh lapan bahagi empat?
S: Ada dua puluh lapan biji rambutan bahagi kepada empat.
P: Empat apa?
S: Kawan.
P: Baik. Dua puluh lapan biji rambutan dibahagi kepada empat orang kawan. Seorang dapat berapa?
S: Tujuh.
P: Boleh tunjuk tak macam mana bahagi kepada empat orang tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Seorang dapat berapa?
S: Tujuh.
P: Kawan-kawan Sufian pegang apa tu?
S: Beg plastik. Dalam tu ada rambutan. Sini ada tiga (menunjukkan sebelah tangan orang yang dilukis) sini ada empat (menunjukkan sebelah tangan lagi orang yang dilukis.
P: Baik. Yang ini pun dua puluh lapan bahagi empat. Sama tak
dengan yang Sufian lukis tadi?
S: Tak sama.
P: Bahagian mana yang tak sama?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Tadi dua puluh lapan bahagi berapa?
S: Empat.
P: Dapat berapa?
S: Tujuh.
P: Yang ini?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Dua puluh lapan bahagi tujuh? Ada berapa orang di situ (menunjukkan gambar yang dilukis)?
S: Empat.
P: Jadi empat tu apa?

S: Jawapan dia.
P: Jawapan apa?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Tadi, Sufian buat cerita untuk dua puluh lapan bahagi empat, kan?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Jadi sama tak keduanya?
S: Tak.
P: Apa yang tak sama?
S: Orang ada empat.
P: Yang tadi?
S: Ada tujuh kumpulan.
P: Jadi sama tak?
S: Tak.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Sufian tulis ayat darab untuk ayat ini (menunjukkan ayat 28 ÷ 4) atau untuk lukisan?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Cuba baca?
S: Empat kali tujuh sama dua puluh lapan.
P: Kenapa tulis empat di sebelah kiri?
S: Empat kena tulis di kiri.
P: Boleh tak tulis dua puluh lapan di kiri?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab dua puluh lapan jawapan dia.
P: Boleh tak tulis empat di kanan (menunjukkan dua puluh lapan)?
S: Tak boleh. Jawapan dia dua puluh lapan.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Ayat ni sama tak dengan tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Yang ni tujuh kali empat (menunjukkan ayat 7 x 4) yang ni (menunjukkan 4 x 7) empat kali tujuh.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Yang sama?
S: Dua puluh lapan.
P: Ada lagi?

S: Tak ada.
P: Tujuh ni sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: Jawapan dia.
P: Dua puluh lapan pada ayat bahagi sama dengan apa pada ayat darab?
S: Jawapan dia.
P: Apa kaitan antara darab dan bahagi?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Darab dan bahagi ada kaitan tak?
S: Ada. Dia macam terbalik.
P: Terbalik! Boleh bagi contoh ayat darab dan bahagi tadi?
S: Tujuh yang darab tu jawapan untuk ini (menunjukkan ayat bahagi 28 ÷ 4). Jadi terbalik.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian melukis tujuh kumpulan bersaiz empat bagi mewakili ayat 28 ÷ 4. Subjek menjelaskan dua puluh lapan merujuk semua bola, empat pula merujuk saiz setiap kumpulan manakala, tujuh kumpulan pula merujuk hasil bahagi. Subjek juga melukis gambar rajah bagaimana dua puluh lapan rambutan bahagi kepada empat orang kawan. Selain itu, Sufian juga menjelaskan bahawa kedua-dua lukisan beliau adalah berbeza kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza.

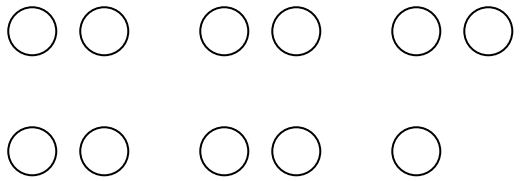
Selain itu, Sufian juga menulis dua ayat darab sebagai tafsiran kepada ayat bahagi 28 ÷ 4. Ayat tersebut adalah 4 x 7 = 28 dan 7 x 4 = 28. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat tersebut adalah berbeza kerana mempunyai pendarab pertama dan kedua yang tidak sama. Sufian juga berpendapat darab adalah songdangan kepada bahagi.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

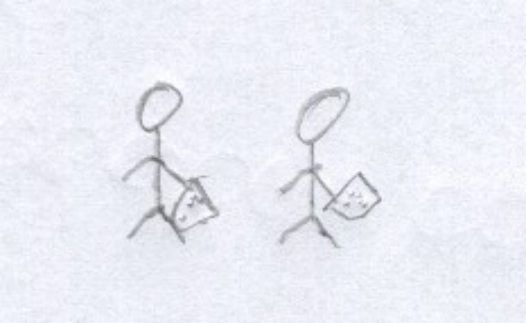
Sufian mewakilkan ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz satu. Petikan TA142 yang berikut menunjukkan tingkah laku beliau

Petikan TA142

P: Baik cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 2)?.
S: Sebelas bahagi dua.
P: Macam tadi boleh terangkan tak macam mana sebelas bahagi
dua?
S: (Subjek melukis seperti berikut pada kertas):



P: Kenapa kumpulkan dua bola?
S: Sebab bahagi dua.
P: Kenapa yang ini ada satu (menunjukkan bola tunggal) yang lain ada dua?
S: Tak cukup.
P: Tak cukup? Macam tu sebelas bahagi dua dapat berapa?
S: Lima
P: Macam mana Sufian dapat lima?
S: Kira (subjek menunjukkan kumpulan dua bola)
P: Yang ini (menunjukkan bola yang tunggal) tak kira?
S: Tak cukup.
P: Kalau tak cukup tak boleh kira?
S: Tak.
P: Jadi sebelas bahagi dua jawapannya berapa?
S: Lima
P: Ada cara lain tak nak tunjuk?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh jelaskan lukisan ni?
S: Sebelas kueh bahagi dua orang kawan.
P: Seorang akan dapat berapa?
S: Lima
P: Kalau seorang dapat lima jumlah semua berapa?
S: Sepuluh.
P: Tadi ada berapa?
S: Sebelas
P: Satu lagi tu siapa dapat?
S: Dua-dua tak dapat. Simpan.
P: Simpan?
S: (Subjek mengangguk).
P: Sama tak kedua-dua lukisan tadi?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni ada lima kumpulan (menunjukkan lukisan pertama) yang ni dua orang (menunjukkan lukisan kedua).
P: Ada lagi?
S: Yang ni ada dua, satu kumpulan (menunjukkan lukisan pertama), yang ni seorang dapat lima ((menunjukkan lukisan kedua).
P: Baik, sekarang boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$2 \times 5$$

P: Sama dengan apa?
S: Sepuluh.
P: Ayat bahagi tadi sebelas, kan?
S: Sebelas tak boleh bahagi dua, ada lebih satu.
P: Jadi, ayat darab macam ni?
S: (Subjek mengangguk).
P: Ada cara lain tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$5 \times 2 = 10$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?

S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian mewakilkan ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan yang bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz satu. Subjek menjelaskan bahawa sebelas pada ayat bahagi merujuk kepada kesemua bola, dua pula merujuk saiz setiap kumpulan dan lima kumpulan pula jawapan kepada ayat bahagi. Subjek juga menjelaskan bahawa kumpulan yang bersaiz satu tidak boleh diambil kira kerana saiznya bukan dua.

Selain itu, Sufian juga membentuk satu lagi lukisan yang mempunyai dua orang sahabat yang masing-masing mempunyai lima biji kueh. Menurut Sufian lagi, sebiji lagi kueh perlu disimpan kerana tidak boleh diagihkan kepada dua orang.

Sufian juga menulis ayat darab, 2 x 5 = 10 dan 5 x 2 = 10 sebagai tafsiran kepada ayat bahagi 11 ÷ 2. Subjek juga menjelaskan hasil darab bagi kedua-dua ayat darab adalah sepuluh dan bukan sebelas kerana sebelas tidak boleh dibahagi dua.

Ayat Bahagi Membabitkan Sifar, Satu, Dan Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Sufian menjelaskan pembahagian yang membabitkan sifar adalah sifar. Subjek juga menjelaskan sifar tidak boleh dibahagi. Petikan TA143 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan TA143

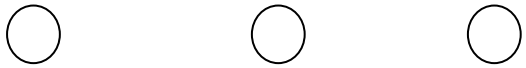
P: Baik cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 0 ÷ 3)?
S: Kosong bahagi tiga
P: Boleh terangkan tak?
S: Kosong.
P: Kenapa kosong?
S: Kosong bahagi apa-apa pun kosong.
P: Kosong tak boleh bahagi ke?
S: Kosong tak ada apa-apa. Mana boleh bahagi?
P: Boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 0 = 0$$

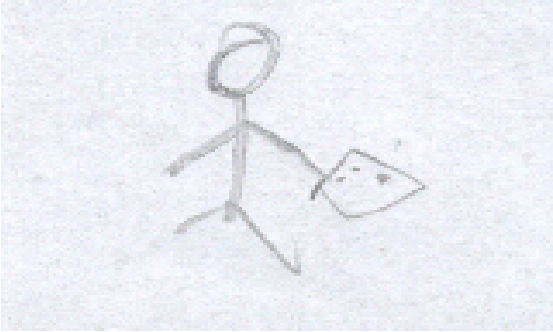
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \times 3 = 0$$

P: Sama tak kedua-dua ayat?
S: Tak. Jawapan saja sama, kosong.
P: Cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis 3 ÷ 1).
S: Tiga bahagi satu.
P: Berapa?
S: Tiga
P: Boleh terangkan macam mana tiga bahagi satu dapat tiga? Cara lukisan ke?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang mana tiga dalam gambar?
S: Semua.
P: Satu?
S: Yang dalam
P: Jawapannya?
S: Yang ini semua (subjek menunjukkan bulatan di luar setiap bola)
P: Ada cara lain tak nak tunjuk?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada apa di tangan?
S: Beg plastik.
P: Ada berapa dalam beg?
S: Tiga.
P: Tadi, soalannya tiga bahagi satu kan? Yang mana menunjukkan tiga?
S: Buah dalam beg.
P: Satu?
S: Orang.
P: Jawapannya tadi?
S: Tiga buah. Semua dapat pada orang tu.
P: Ada cara lain nak tunjuk?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

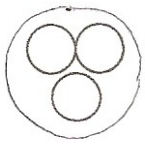
$$1 \times 3 = 3$$

P: Cuba baca.
S: Satu darab satu sama dengan tiga.
P: Kenapa tulis satu di sebelah kiri?
S: Sebab tiga bahagi satu tiga. Jadi, satu kena tulis di kiri.
P: Ada dua tiga di sini, yang mana tiga pada ayat bahagi?
S: Yang ni (menunjukkan tiga pada hasil darab).
P: Kenapa bukan yang ini (menunjukkan tiga pada pendarab)?
S: Tiga tu jawapan untuk ni (menunjukkan ayat bahagi).
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 1 = 3$$

P: Ayat ni sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama. Jawapan dua-dua tiga.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Tak ada.
P: Apa kaitan darab dengan bahagi?
S: Terbalik.
P: Baik, cuba baca yang ini (menunjukkan ayat $3 \div 3$)?

S: Tiga bahagi tiga.
P: Boleh tunjuk macam tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Satu tu yang mana pada ayat bahagi?
S: Jawapan dia.
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat bahagi tu?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Sama tak kedua-dua lukisan?
S: Tak sama. Yang ni tiga kumpulan, yang ni satu kumpulan.
P: Boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 1 = 3$$

P: Ada ayat lain?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$1 \times 3 = 3$$

P: Sama tak kedua-dua ayat?
S: Tak. Yang ni satu darab tiga sama tiga (menunjukkan ayat darab 1 x 3 = 3), yang ni tiga darab satu sama tiga (menunjukkan ayat 3 x 1 = 3).
P: Apa kaitan ayat darab dan ayat bahagi?
S: Ayat dia terbalik. Jawapan untuk bahagi jadi soalan untuk darab.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian menjelaskan bahawa sekiranya sifar dibahagi dengan sebarang nombor jawapannya adalah sifar.

Menurut subjek lagi, pembahagian membabitkan sifar adalah sifar kerana sifar tidak mempunyai sebarang nilai untuk dibahagi.

Bagi ayat 3 ÷ 1 pula, Sufian berpendapat bahawa jawapannya adalah tiga. Subjek menunjukkan secara lukisan bagaimana tiga dibahagi dengan satu memberikan jawapan tiga. Dalam lukisan pertama beliau, Sufian telah mengasingkan ketiga-tiga bulatan yang beliau lukis bagi menunjukkan 'bahagi satu'. Selain itu, Sufian juga menunjukkan pembahagian secara lain dengan melukis gambar yang menunjukkan seorang memegang tiga biji buah rambutan. Subjek menjelaskan bahawa lukisan tersebut menunjukkan tiga bahagi satu.

Selain itu, subjek juga menulis ayat darab 1 x 3 = 3 dan 3 x 1 = 3. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat tersebut tidak sama kerana mempunyai pendarab yang berbeza. Subjek juga berpendapat darab adalah songsangan kepada bahagi.

Bagi ayat 3 ÷ 3 pula, Sufian melukis satu kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga melukis tiga kumpulan bersaiz satu bagi mewakili ayat bahagi tersebut. Subjek juga menulis ayat 1 x 3 = 3 dan 3 x 1 = 3 sebagai tafsiran bagi ayat bahagi tersebut. Selain itu, subjek berpendapat bahawa darab adalah songsangan bagi bahagi.

Ayat Darab

Sufian mewakilkan ayat darab 4 x 2 dengan menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2. Petikan TA144 yang berikut memaparkan tingkah laku yang beliau tunjukkan semasa temu duga.

Petikan TA144

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 4 x 2) Boleh Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Empat kali dua.
P: Empat darab berapa?
S: Empat darab dua.
P: Sama dengan berapa?
S: Lapan.
P: Baik. Boleh tak Sufian buat ayat bahagi daripada ayat tu?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ini ayat bahagi atau darab?
S: Darab.
P: Cuba buat ayat bahagi daripada ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut). Macam ni?

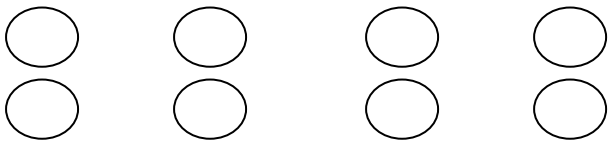
$$8 \div 4 = 2$$

P: Boleh baca apa yang Sufian tulis tu?
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Kenapa tulis lapan bahagi empat? Kenapa tidak empat bahagi dua?
S: Sebab empat kali dua lapan, kena tulis lapan bahagi empat.
P: Apa kaitan ayat bahagi yang Sufian tulis ni dengan ayat darab tadi?
S: Bahagi terbalik pada darab.
P: Terbalik macam mana?
S: Kalau empat kali dua lapan, terbalikkan lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 2 = 4$$

P: Boleh beritahu apa yang Sufian tulis tu?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Apa beza dengan ayat tadi.
S: Tadi jawapan dia dua.
P: Yang ini (menunjukkan ayat yang baru ditulis)?
S: Jawapan dia empat.
P: Ada lagi tak perbezaan?
S: …Bahagi dua, yang ini (menunjukkan ayat $8 \div 4 = 2$) bahagi
empat.
P: Lapan bahagi empat macam mana? Boleh tunjuk dengan lukisan?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut):

P: Ini apa?
S: Bola.
P: Boleh terangkan?
S: Lapan bola bahagi empat. (Subjek menunjukkan lukisannya)
P: Kenapa kumpulkan empat bola?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kalau lapan bahagi dua?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh terangkan apa yang Sufian lukis ni?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat
P: Yang mana satu empat dalam lukisan?
S: Ini (subjek menunjukkan empat longgokan bola).
P: Lapan?
S: Semua.
P: Dua?
S: Ini (menunjukkan satu kumpulan).
P: Sama tak kedua-dua lukisan?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Sebab kumpulan dan bola dalam dia lain.

P: Apa kaitan bahagi dengan darab.
S: Terbalik.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian mentafsirkan ayat bahagi sebagai 'terbalik' (songsangan) kepada ayat darab. Subjek juga menyamakan lapan pada 8 ÷ 4 = 2 yang ditulisnya dengan jawapan kepada 4 x 2 = 8. Menurut Sufian lagi terdapat dua cara untuk menulis ayat bahagi daripada ayat darab 4 x 2 = 8, iaitu 8 ÷ 4 = 2 dan 8 ÷ 2 = 4. Subjek berpendapat bahawa walaupun dua ayat bahagi dapat ditulis daripada ayat darab 4 x 2 = 8, namun kedua-dua ayat tersebut adalah berbeza. Ini adalah kerana menurut Sufian, hasil bahagi dan pembahagi bagi kedua-dua ayat adalah berbeza. Sufian juga berpendapat bahawa jika ayat darab ditukar kepada ayat bahagi perlu nombor yang hasil darab perlu di letakkan di sebelah kiri.

Petikan TA145

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 6 x 4) Boleh Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Enam kali satu.
P: Jawapannya berapa?
S: Dua puluh empat.
P: Kenapa Sufian rasa dua puluh empat?
S: Enam kali empat… dua puluh empat.
P: Baik. Boleh tak Sufian buat ayat bahagi daripada ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

4 x 6

P: Itu ayat darab atau bahagi?

S: Bahagi.
P: Ini simbol apa (menunjukkan simbol darab pada ayat yang ditulis oleh subjek)?
S: Eh…darab (Subjek memadamkan ayat tadi dan menulis semula seperti berikut):

$$24 \div 6$$

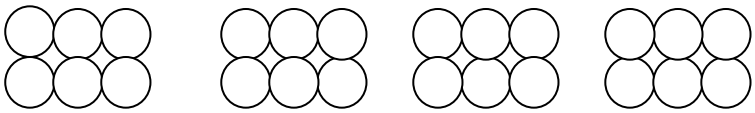
P: Enam bahagi satu sama dengan apa?
S: Empat
P: Boleh tulis pada ayat tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 6 = 4$$

P: Boleh Sufian beritahu kenapa Sufian tulis ayat bahagi macam tu?
S: Sebab dua puluh empat bahagi enam sama dengan empat.
P: Kenapa Sufian tulis dua puluh empat bahagi enam dan bukannya enam bahagi dua puluh empat?
S: Enam mana boleh bahagi dua puluh empat?
P: Tak boleh ke?
S: Tak boleh. Mesti nombor yang besar, baru boleh bahagi.
P: Nombor kecil tak boleh bahagi nombor besar ya?
S: Tak boleh.
P: Ada tak cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

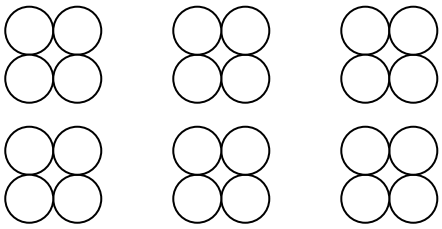
$$24 \div 4 = 6$$

P: Sama tak ayat-ayat tu?
S: Tak sama sebab yang ni dua puluh empat bahagi empat, yang ni dua puluh empat bahagi enam.
P: Apa kaitan atau persamaan ayat darab dan ayat bahagi?
S: Darab kalau terbalik dapat bahagi.
P: Boleh Sufian tunjuk secara lukisan macam tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh Sufian terangkan apa yang Sufian lukis?
S: Dua puluh empat bahagi enam sama empat
P: Kenapa Sufian bulatkan enam?
S: Sebab bahagi enam.
P: Kalau bahagi lapan?

S: Kalau bahagi lapan kena bulatkan lapan limau.
P: Ada cara lain untuk menunjukkan dua puluh empat bahagi enam?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh Sufian terangkan apa yang Sufian lukis?
S: Dua puluh empat bahagi empat (subjek menunjukkan lukisannya sambil menjawab).
P: Bahagi empat? Bukan bahagi enam?
S: Bahagi enam pun boleh.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh empat bahagi empat atau bahagi enam?
S: Tak ada.

Dalam petikan TA145 di atas, Sufian memberi beberapa tafsiran bagi ayat yang dikemukakan kepada beliau. Menurut Sufian ayat bahagi adalah terbalik kepada ayat darab. Sufian juga berpendapat bahawa apabila menulis ayat bahagi nombor paling besar perlu ditulis di sebelah kiri. Menurut beliau lagi nombor yang kecil tidak boleh dibahagi oleh nombor yang besar kerana beliau berpendapat hanya nombor yang besar boleh dibahagi oleh nombor yang kecil.

Selain itu, Sufian juga menunjukkan pembahagian yang ditulisnya secara lukisan. Lukisan Sufian mempunyai empat kumpulan bersaiz empat dan enam kumpulan bersaiz empat. Subjek juga

berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah tersebut boleh mewakili ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 atau 24 ÷ 4 = 6.

Petikan TA146

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 9 x 0) Boleh Sufian baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Sembilan kali kosong.
P: Jawapannya?
S: Kosong.
P: Boleh Sufian tulis ayat bahagi daripada ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

9 ÷ 0 = 0

P: Boleh terangkan apa yang Sufian tulis?
S: Sembilan bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Kenapa tulis sembilan bahagi kosong dan bukan kosong bahagi sembilan?
S: Tak boleh. Kena tulis sembilan bahagi kosong sebab sembilan nombor besar.
P: Kena tulis nombor besar bahagi nombor kecil?
S: (Subjek mengangguk)
P: Sembilan lebih besar daripada kosong ke?
S: Ya.
P: Ada cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada. Sama macam tadi.
P: Boleh tunjuk secara lukisan?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Kosong mana boleh lukis?

Dalam petikan di atas, Sufian menulis ayat 9 ÷ 0 = 0 bagi ayat darab yang dikemukakan, iaitu 9 x 0. Subjek juga berpendapat bahawa hasil darab sembilan dan sifar adalah sifar kerana semua pendaraban membabitkan sifar akan menghasilkan sifar. Menurut Sufian, semasa menulis ayat bahagi, nombor yang lebih besar perlu diletak di sebelah kiri kerana nombor yang lebih besar

perlu dibahagi oleh nombor yang kecil. Selain itu, Sufian juga berpendapat bahawa terdapat hanya satu cara untuk menulis ayat bahagi daripada ayat darab yang diberi. Subjek juga menjelaskan bahawa sifar tidak boleh diyunjuk secara lukisan, maka beliau tidak dapat mewakilkan pendaraban tersebut secara lukisan.

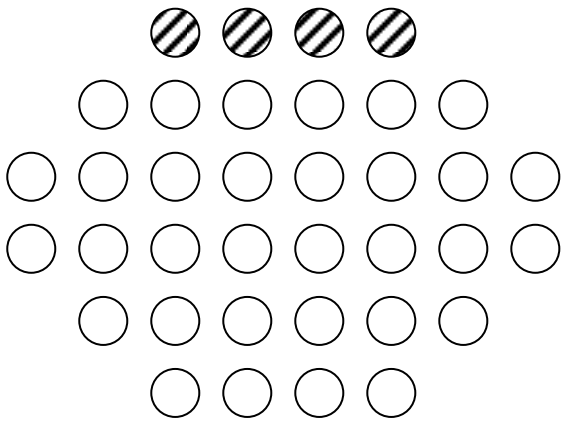
Penyelesaian Masalah

Bentuk Diskrit

Sufian membulatkan empat guli apabila diminta bahagi empat. Subjek juga membulatkan tiga guli bagi menyelesaikan masalah bahagi tiga. Petikan PM151 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Sufian

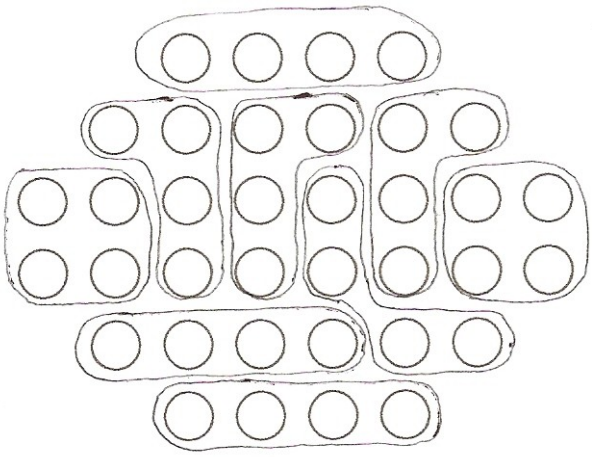
Petikan PM151

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Sufian tengok sini ya. Sini ada gambar guli. Boleh tak Sufian bahagi empat guli-guli ni?
S: (Subjek menghitung guli-guli tersebut secara senyap).
P: Sufian boleh lukis pada gambar tu.
S: (Subjek menghitung secara senyap dan mencuba beberapa cara untuk membahagi empat).
P: Bahagi empat ya!
S: (Subjek melukis pada gambar yang beri seperti berikut dan kemudian seolah-olah berfikir).



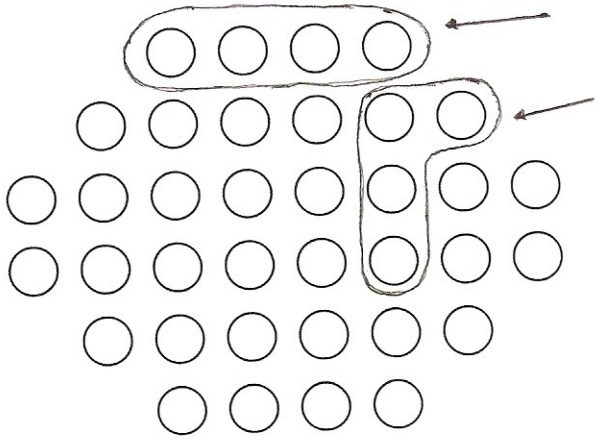
P: Dah bahagi empat ke?
S: Belum.
P: Ada berapa guli semua sekali?

S: (Subjek menghitung semula dan menjawab). Tiga puluh enam.
P: Macam mana Sufian tahu ada tiga puluh enam?
S: (Subjek menunjukkan guli-guli bagi menerangkan bagaimana ia menghitung guli-guli tersebut). Kira
P: Sekarang boleh tak Sufian bahagi empat, tiga puluh enam guli tu?
S: (Subjek mengangguk. Selepas berfikir sebentar subjek melukis seperti berikut pada gambar rajah yang diberi):

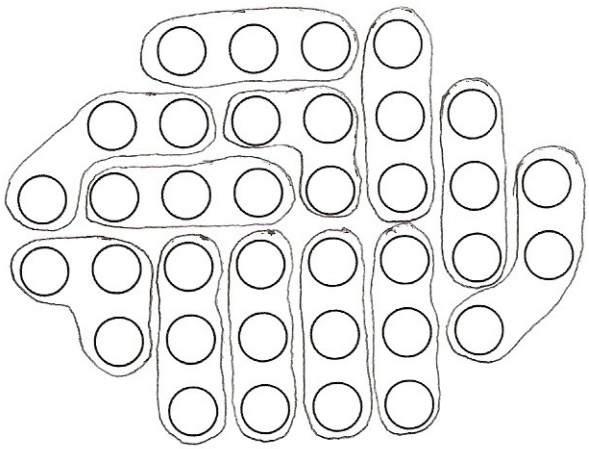


P: Dah bahagi empat?
S: Dah.
P: Jadi tiga puluh enam bahagi empat dapat berapa?
S: (Subjek menghitung bulatan-bulatan yang dilakukannya). Sembilan.
P: Macam mana dapat sembilan?
S: (Subjek diam)
P: Sufian buat macam mana dapat sembilan?
S: Kira. (Subjek menjawab sambil menunjukkan bulatan-bulatan yang telah dibuatnya).
P: Kenapa Sufian bulatkan macam ni?
S: Senang nampak.
P: Senang nampak? Baik. Ada berapa guli dalam setiap bulatan?
S: Empat.
P: Kenapa Sufian kumpulkan empat guli?
S: Sebab nak bahagi empat.
P: Kalau nak bahagi empat kena kumpulkan empat?
S: Ya.
P: Kalau nak bahagi tiga macam mana?
S: Kumpul tiga.
P: Di sini Sufian mengumpulkan secara memanjang dan di sini pulak bentuk ‘L’. Sama tak kedua-duanya

(Menunjukkan kumpulan yang berbentuk memanjang dan berbentuk 'L'?)



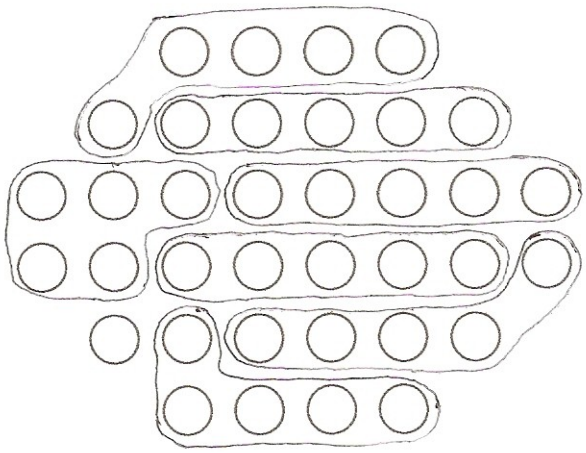
S: Tak sama
P: Kenapa tak sama?
S: Bentuk tak sama.
P: Bentuk tak sama. Macam mana dengan guli di dalam setiap bulatan?
S: Sama.
P: Ada berapa?
S: Empat.
P: Sekarang boleh tak Sufian bahagi tiga? Tadi bahagi empat, sekarang bahagi tiga.
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada gambar rajah yang di beri)



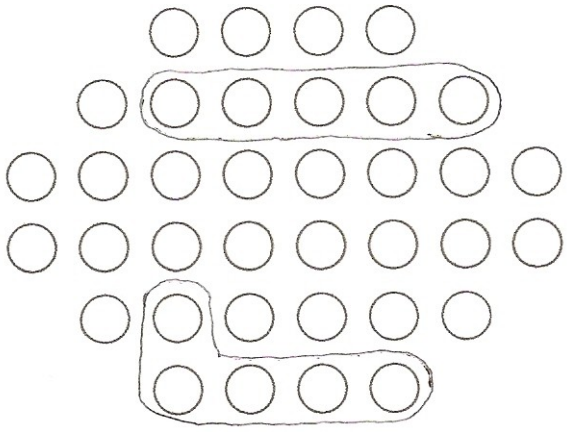
P: Dah siap?

S: Dah.
P: Baik. Di sini Sufian bulatkan tiga. Kenapa bulatkan tiga?
S: Sebab bahagi tiga.
P: Baik tiga puluh enam bahagi tiga berapa?
S: (Subjek menghitung kumpulan-kumpulan yang telah dibulatkan) Dua belas.
P: Macam mana Sufian tahu dua belas?
S: Kira bulatan.
P: Bulatan ada berapa?
S: Dua belas.
P: Baik, tadi Sufian kumpulkan empat guli (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 4), yang ni tiga guli (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 3). Sama tak kedua-duanya?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni ada empat guli (menunjukkan gambar rajah yang yang dikumpulkan empat-empat.), yang ni ada tiga guli (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan tiga-tiga).
P: Boleh tak Sufian tunjuk cara lain bahagi tiga.
S: (Subjek diam).
P: Boleh tak Sufian buat cerita tentang tiga puluh enam bahagi tiga.
S: (Subjek hanya senyum)
P: Boleh buat cerita? Nak tulis pun boleh.
S: (Subjek menuliskan cerita berikut pada kertas yang diberi). *Ali ada 36 biji telur dan dia membahagi 3 biji telur kepada Ahmad, Ani*
P: Dah?
S: (Subjek mengangguk)
P: Boleh baca?
S: Ali ada tiga puluh enam biji telur dan dia membahagi tiga biji kepada Ahmad dan Ani.
P: Yang lain? Yang lebih tu?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ahmad dapat berapa?
S: Tiga.
P: Dapat tiga. Yang lain? Ada banyak lagi. Macam mana?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Ani dapat berapa?
S: Tiga.
P: Ali nak bahagi kepada berapa orang kawan?
S: Dua belas.
P: Seorang akan dapat berapa?
S: Tiga.
P: Ada cara lain tak nak bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Tak ada?
S: Tak.

P: Sekarang boleh tak Sufian bahagi lima. Semua ada tiga puluh enam kan?
S: (Subjek mengangguk)
P: Cuba bahagi lima.
S: (Subjek membulatkan seperti berikut):



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Di sini ada satu (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan)?
S: Dia tak ada kawan.
P: Tak ada kawan?
S: Tak cukup
P: Tak cukup macam mana?
S: Tak cukup lima
P: Jadi tiga puluh enam boleh bahagi lima tak?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh? Tadi tiga puluh enam boleh bahagi empat, boleh bahagi tiga?
S: Bahagi lima tak boleh.
P: Kenapa?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Kenapa Sufian kata tiga puluh enam tak boleh bahagi lima?
S: Sebab ada satu lebih (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan)
P: Yang tadi kenapa boleh bahagi dengan empat dan tiga (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 4 dan gambar rajah 36 ÷ 3)?
S: Tak ada yang lebih.
P: Yang Sufian bulatkan yang ni (menunjukkan yang berbentuk memanjang) dengan yang ini (menunjukkan yang berbentuk ‘L’) sama tak?



S: Bentuk tak sama, dalam dia sama.
P: Ada berapa dalam bulatan tu?
S: Lima.
P: Sekarang boleh tak Sufian tuliskan ayat bahagi untuk gambar rajah ni (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 4)?
S: Boleh. (Subjek menuliskan seperti berikut):

$$36 \div 4 = 9$$

P: Ada cara lain Sufian nak tulis?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \,)\, \overline{36}$$

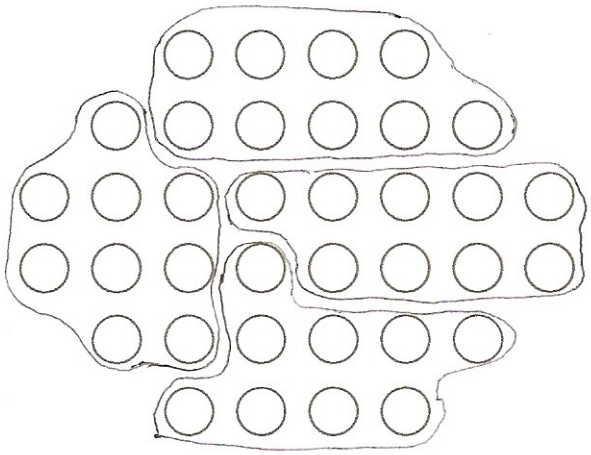
P: Cara lain?
S: Tak ada.
P: Boleh tak Sufian beritahu apa maksud nombor ini? (menunjukkan 36 pada ayat bahagi).
S: Tiga puluh enam.
P: Dalam gambar tadi, tiga puluh enam tu yang mana satu?
S: Semua.
P: Semua guli. Yang ini (menunjukkan angka 4)?
S: Guli dalam bulatan
P: Yang ni (menunjukkan angka 9)?
S: Bulatan.
P: Sufian boleh tulis untuk gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 3)?
S: (Subjek menuliskan seperti berikut):

$$36 \div 3 = 12$$

P: Ada cara lain menulis ayat bahagi untuk gambar tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3\overline{)36}$$

P: Cara lain?
S: Tak ada.
P: Baik boleh Sufian beritahu tiga ni rujuk pada apa dalam gambar (menunjukkan angka 3)?
S: Bulatan dalam.
P: Yang dua belas ni (menunjukkan nombor 12)?
S: Semua sekali (subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang telah dibuat bagi mengumpulkan tiga guli)
P: Yang ni (menunjukkan angka 36 pada ayat yang telah ditulis)?
S: Tiga puluh enam jumlah semua guli.
P: Baik untuk gambar rajah ini boleh tak kita tulis ayat ini (menunjukkan ayat 36 ÷ 9 = 4)?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Tadi, Sufian tulis ni (menunjukkan 36 ÷ 4 = 9), boleh tak tulis ayat ni (menunjukkan ayat 36 ÷ 9 = 4) bagi gambar tu?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Kalau tak boleh, boleh tak tunjuk macam nak wakilkan ayat ni (36 ÷ 9 = 4)?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Gambar rajah ni sama tak dengan gambar rajah tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama pada gambar rajah tadi?
S: Ini sembilan (menunjukkan guli dalam bulatan bagi gambar rajah 36 ÷ 9 = 4), ini empat (menunjukkan guli dalam bulatan bagi gambar rajah 36 ÷ 4 = 9).

P: Ada lagi yang tak sama?
S: Kumpulan. Ini empat (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai empat kumpulan), ini sembilan (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai sembilan kumpulan).
P: Ada lagi?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian berpendapat bahawa bagi menyelesaikan masalah bahagi empat perlu mempunyai empat guli dalam satu kumpulan. Subjek juga menjelaskan bahawa bagi bahagi dua, tiga, sembilan dan lima, membentuk kumpulan bersaiz dua, tiga, sembilan dan lima. Subjek juga berpendapat bahawa ayat $36 \div 9 = 4$ tidak boleh ditulis bagi mewakili gambarajah yang beliau tandakan sebagai bagi $36 \div 4 = 9$.

Bagi ayat $36 \div 9 = 4$, Sufian berpendapat bahawa perlu mempunyai sembilan guli dalam satu bulatan. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa walaupun bentuk kumpulan berbeza namun bila bilangan guli di dalamnya adalah sama dan perlu sama. Sufian juga menjelaskan bahawa selain daripada ayat bahagi $36 \div 3 = 12$ pembahagian tiga puluh enam oleh tiga boleh di tulis sebagai $3 \overline{)\,36}$

Sufian juga menjelaskan bahawa hasil bahagi yang diperoleh melalui pembahagian yang diberi bergantung kepada bilangan kumpulan lengkap yang dapat dihasilkan. Selain itu, Sufian juga berpendapat bahawa tiga puluh enam tidak boleh dibahagi dengan lima kerana pembahagian tersebut mempunyai satu guli lebih. Sufian berpendapat bahawa, baki tersebut tidak boleh diambil kira sebagai satu kumpulan kerana bilangan guli di dalamnya bukan lima.

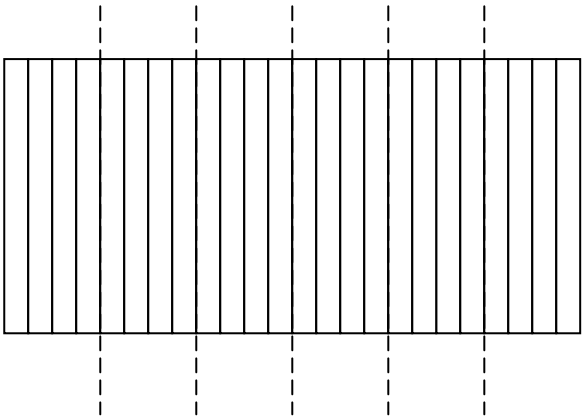
Subjek juga menjelaskan bahawa ayat bahagi $36 \div 9 = 4$ dan $36 \div 4 = 9$ tidak sama kerana kedua-duanya mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Namun demikian, menurut Sufian hasil bahagi bagi ayat $36 \div 4 = 9$ adalah sama dengan pembahagi $36 \div 9 = 4$ dan sebaliknya.

Bentuk Selanjar

Bagi aktiviti berbentuk selanjar Sufian membentuk enam kumpulan bersaiz empat bagi menyelesaikan masalah bahagi empat. Petikan PM152 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Sufian.

Petikan PM152

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai 24 petak). Cuba lihat kad ini. Apa yang terdapat pada kad ini?
S: Ada garis-garis.
P: Baik. Ada banyak petak, ya. Sekarang boleh tak Sufian bahagi empat petak-petak ni?
S: (Subjek mula menanda pada gambar rajah tanpa menentukan jumlah petak yang terdapat pada gambar rajah. Berikut adalah pembahagian yang dibuat oleh subjek):



P: Dah siap?
S: Dah
P: Hasil bahaginya dapat berapa?
S: (Subjek menghitung bilangan kumpulan empat yang dapat dihasilkan). Enam
P: Macam mana tahu enam?
S: Kira.
P: Kira apa?
S: Ada berapa kumpulan.
P: Boleh Sufian tuliskan ayat bahagi?

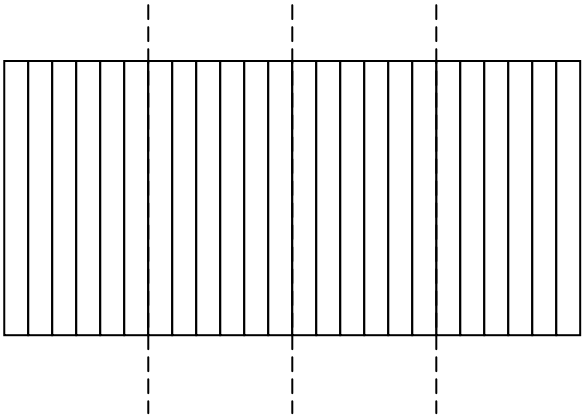
S: (Subjek diam sebentar, kemudian mula menghitung jumlah petak)
P: Ada berapa semua?
S: Dua puluh tiga.
P: Cuba kira lagi sekali.
S: (Subjek menghitung semula). Dua puluh empat.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 4$$

P: Sama dengan berapa?
S: (Subjek menghitung semula dan membetulkan ayatnya tadi). Enam.

$$24 \div 4 = 6$$

P: Kenapa Sufian tulis macam tu? Kenapa tak tulis enam di depan ke?
S: Sebab semua ada dua puluh empat.
P: Jadi, dua puluh empat tu sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Semua petak.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat bahagi) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: (Subjek menunjukkan kumpulan empat petak yang telah ditandanya). Yang ni empat.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 6 pada ayat bahagi) rujuk pada apa?
S: Ada enam kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek diam sebentar). Tak ada.
P: Ada cara lain tak nak bahagi empat gambar rajah tu?
S: Tak ada.
P: Kalau tak ada boleh tak Sufian bahagi gambar rajah tadi kepada enam?
S: (Subjek menandakan seperti berikut)

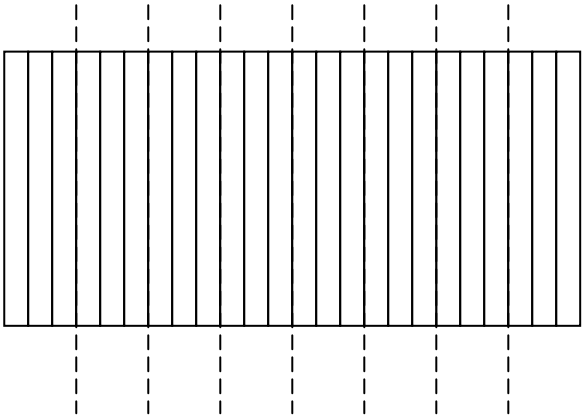


P: Dah siap?
S: Dah.
P: Boleh terangkan apa yang Sufian buat?
S: Bahagi enam.
P: Boleh beritahu macam mana bahagi enam?
S: Kira enam, enam (subjek menunjukkan lukisannya).
P: Kenapa kira enam?
S: Sebab bahagi enam.
P: Kalau bahagi tiga kena buat apa?
S: Kira tiga, tiga. ayat bahagi untuk bahagi enam?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 6 = 4$$

P: Macam mana Sufian tahu jawapannya empat?
S: Sebab ada empat kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak bahagi enam?
S: …Tak ada.
P: Cara lain menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Cuba Sufian bandingkan dengan ayat bahagi tadi. Sama tak dengan ayat ni?
S: Tak.
P: Cuba bandingkan. Apa yang tak sama pada kedua-dua ayat tu?
S: Yang ni bahagi enam, tadi bahagi empat.
P: Macam mana jawapan dia?
S: Tak sama. Yang ni empat yang tadi enam.
P: Bagaimana dengan gambar rajah. Ada persamaan tak antara kedua-dua gambar rajah tadi?
S: Yang ini (menunjukkan gambar rajah bagi $24 \div 4 = 6$) ada empat (menunjukkan empat petak). Kumpulan ada enam. Yang ni (menunjukkan gambar rajah bagi $24 \div 6 = 4$) ada enam, kumpulan ada empat.
P: Jadi sama tak?
S: Tak.

P: Sekarang boleh tunjuk bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



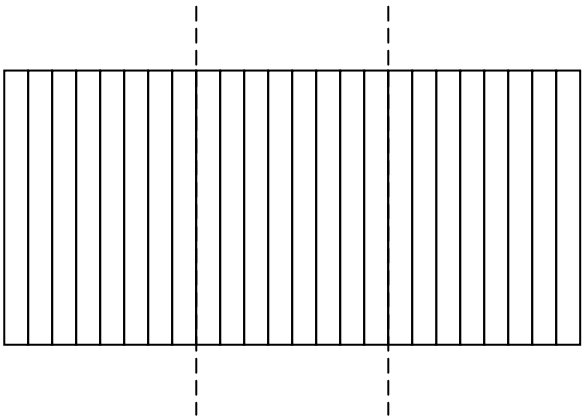
P: Boleh Sufian terangkan?
S: Dua puluh empat bahagi tiga sama dengan ... lapan (subjek menghitung bilangan kumpulan tiga yang terdapat pada gambar rajah.).
P: Boleh tuliskan ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 3 = 8$$

P: Boleh tulis ayat bahagi secara lain?
S: (Subjek diam sebentar kemudian menulis ayat berikut):

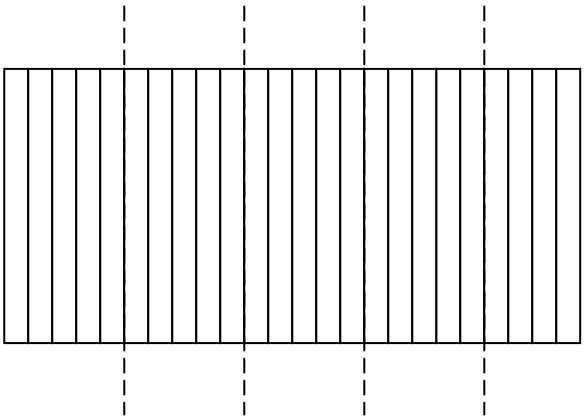
$$24 \div 8 = 3$$

P: Sekarang boleh Sufian bahagi tiga cara lain?
S: (Subjek menandakan seperti berikut):



P: Ada persamaan tak antara kedua-dua gambar rajah?

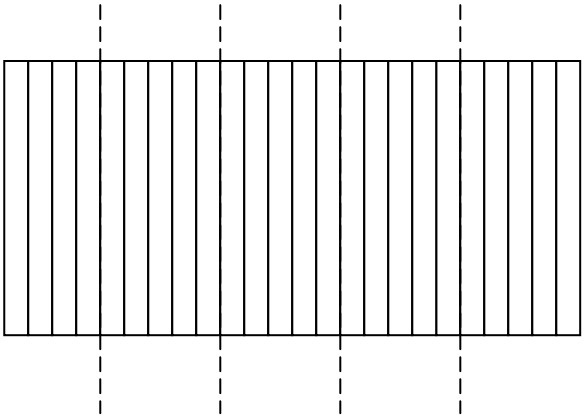
S: Yang ni tiga kumpulan (menunjukkan gambar rajah dengan tiga kumpulan) sama dengan tiga kotak (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan kumpulan).
P: Lagi ada persamaan yang lain tak?
S: Yang ni lapan kotak (menunjukkan gambar rajah dengan tiga kumpulan) sama dengan lapan kumpulan (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan kumpulan).
P: Sekarang boleh Sufian bahagi lima?
S: (Subjek menandakan seperti berikut dan menjawab). Tak cukup.



P: Apa yang tak cukup?
S: Yang ni (menunjukkan kumpulan terakhir) tak cukup lima.
P: Tak cukup? Berapa banyak tak cukup?
S: Satu.
P: Jadi kalau bahagi lima dapat berapa?
S: (Subjek menghitung bilangan kumpulan yang ada). Empat
P: Macam mana dapat empat?
S: Kira kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan kumpulan yang kurang satu petak)?
S: Tak cukup.
P: Kalau tak cukup tak boleh kira?
S: Tak boleh.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 5 = 4$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Nak bahagi lima gambar rajah tu ada cara lain?
S: (Subjek memikir agak lama kemudian menandakan seperti berikut):



P: Ada perbezaan dengan gambar tadi?
S: (Subjek mengangguk)
P: Apa yang beza?
S: Yang ini ada lima kotak (menunjukkan kumpulan yang mencukupi lima). Yang ni tak cukup (menunjukkan kumpulan yang mempunyai empat petak sahaja)
P: Yang tadi bukan sama ke?
S: Tak sama. Tadi kumpulan yang ni (menunjukkan kumpulan yang mempunyai empat petak) di sini (menunjukkan kedudukan kumpulan di sebelah kanan).
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 5 = 4$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Kenapa sama gambar tak sama?
S: …Yang ni ada lima kotak, yang ni pun lima kotak (menunjukkan kedua-dua gambar rajah) Kumpulan ada empat, yang ni pun kumpulan ada empat.
P: Cuba bandingkan dengan ayat ini tadi (menunjukkan ayat bahagi bersama-sama gambar rajah bagi $24 \div 6 = 4$). Ada apa-apa persamaan?
S: Jawapan dia sama.
P: Kenapa jawapan dia sama sedangkan pembahagian tak sama?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Yang tadi bahagi berapa?
S: Enam.
P: Kenapa kalau bahagi enam dan bahagi lima dapat jawapan empat?
S: Bahagi lima ada baki.
P: Bahagi enam?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Sufian menyelesaikan bahagi empat dengan mengariskan gambar rajah yang diberi dalam kumpulan bersaiz empat. Subjek juga berpendapat bahawa jawapan bagi dua puluh empat bahagi empat adalah jumlah kumpulan yang dapat dihasilkan, iaitu enam. Sufian memberikan pandangan yang sama bagi soalan yang membabitkan bahagi enam, bahagi tiga, bahagi lapan dan bahagi lima.

Selain itu, Sufian berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah dan ayat bahagi bagi $24 \div 4$ dan $24 \div 6$ adalah berbeza. Subjek juga menjelaskan bahawa bahagi tiga dan bahagi lapan mempunyai ayat bahagi dan gambar rajah yang berbeza. Sufian juga berpendapat bahawa sekiranya bahagi empat maka perlu ada empat petak dalam satu kumpulan dan jawapan bagi pembahagian tersebut adalah sama dengan bilangan kumpulan yang terdapat dalam gambar rajah.

Sufian juga menjelaskan bahawa bagi bahagi lima hanya kumpulan yang mempunyai lima petak perlu diambil kira. Kumpulan yang mempunyai kurang daripada lima petak tidak boleh dikira dan beliau telah menuliskan ayat bahaginya sebagai $24 \div 5 = 4$. Subjek juga berpendapat bahawa walaupun, hasil bahagi bagi $24 \div 6$ mempunyai jawapan yang sama dengan bahagi lima namun kedua-duanya adalah berbeza. Menurut Sufian lagi, pembahagian dengan lima mempunyai baki sedangkan pembahagian dengan enam tidak mempunyai baki.

Protokol 2: Aimi

Subjek ini berusia 9 tahun 5 bulan semasa temu duga dijalankan. Tingkah laku beliau dihuraikan seperti yang berikut:

1. Dia menggambarkan perkataan 'bahagi' dengan menulis nombor 12, 10, 13, 14, 15, dan 16. Beliau juga menjelaskan bahawa beliau 'nampak' semua nombor kecuali sifar. Dia juga menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis perkataan gula-gula, pisau, pensel, guli, dan ikan.

2. Bagi ayat enam bahagi dua, dia menggambarkannya dengan melukis tiga himpunan objek yang bersaiz dua. Objek-objek yang beliau lukis adalah gula-gula, pisau, pensel, ikan, lilin, pokok, baju dan seluar.

3. Dia mewakilkan ayat a ÷ b dengan membentuk kumpulan-kumpulan bersaiz b. Menurutnya, pembahagi menentukan saiz kumpulan.

4. Bagi pembahagian yang mempunyai baki a ÷ b = c baki d,, jawapannya ditulis sebagai c baki d .
5. Menurutnya, gambar rajah yang mempunyai c kumpulan bersaiz b tidak sama dengan gambar rajah yang mempunyai b

kumpulan bersaiz c kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

6. Menurutnya, persamaan a ÷ b = c tidak sama dengan a ÷ c = b kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

7. Bagi persamaan a ÷ b = c, a merujuk semua yang hendak dibahagi, b merujuk saiz kumpulan, dan c merujuk bilangan kumpulan.

8. Susunan yang dibentuk bagi persamaan a ÷ b = c, adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi a yang ditolak secara berulang sebanyak c kali. Setiap penolakan perlu bersaiz b, dan nilai c dalam a ÷ b = c adalah sama dengan bilangan penolakan berulang yang dilakukan.

9. Menurutnya, jika a ÷ b = c, maka
   i. a0 ÷ b = c0
   ii. a00 ÷ b = c00
   iii. a ÷ a = 1
   iv. a0 ÷ a0 = 1
   v. a ÷ 1 = a
   vi. a0 ÷ 1 = a0

10. Dalam ayat 0 ÷ a, 0 bermaksud tiada nilai maka jawapannya adalah sifar.

11. Dalam ayat a ÷ 0, 0 bermaksud tidak melakukan operasi bahagi maka jawapannya adalah a.

12. Menurutnya, ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

13. Persamaan darab bagi ayat a ÷ b adalah c x b = a, di mana c adalah hasil bahagi bagi a ÷ b.

Gambaran Mental

Gambaran Mental Bagi Perkataan Bahagi

Aimi mempunyai enam gambaran bagi perkataan bahagi. Petikan GM211 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan GM211

P: Kalau cikgu sebut kereta, gambar apa ada dalam kepala Aimi?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Ada gambar kereta tak dalam kepala?
S: (Subjek mengangguk)
P: Apa yang Aimi nampak? Ada apa pada kereta?
S: Nampak lampu.
P: Lagi?
S: Roda.
P: Lagi?
S: Tingkap.
P: Baik, itu untuk kereta. Kalau cikgu sebut 'bahagi' gambar apa ada dalam kepala?
S: (Subjek diam)
P: Ada gambar tak?
S: (Subjek mengangguk).
P: Nampak apa?
S: Boleh tulis?
P: Boleh. Tulis apa yang Aimi nampak.
S: (Subjek menulis nombor-nombor berikut pada kertas):

12 10 13 14 15 16

P: Boleh terangkan apa yang Aimi tulis?
S: Nombor
P: Bila sebut bahagi Aimi nampak nombor-nombor tu?
S: (Subjek mengangguk dan menjawab). Ada banyak lagi nombor.
P: Ada banyak lagi nombor? Nombor apa lagi yang Aimi nampak?
S: Banyak. Semua nombor.

P: Semua nombor? Baik. Apa kaitan nombor-nombor tu dengan perkataan bahagi? Kenapa agaknya Aimi nampak nombor-nombor tu bila cikgu sebut 'bahagi'?
S: Sebab nombor tu boleh bahagi.
P: Nombor tu boleh bahagi? Semua nombor atau nombor yang Aimi sebut tu sahaja?
S: Semua nombor.
P: Boleh bahagi macam mana?
S: Dua belas boleh bahagi dua. Sepuluh pun boleh bahagi dua.
P: Nombor-nombor tu boleh bahagi dua sahaja?
S: …Tak. Bahagi nombor lain pun boleh.
P: Ada tak nombor yang tak boleh bahagi?
S: Ada. Kosong.
P: Kenapa kosong tak boleh bahagi?
S: Kosong mana boleh bahagi? Tak ada apa-apa macam mana nak bahagi? (Subjek menjawab sambil tersenyum).
P: Ada gambar lain tak bila sebut 'bahagi'?
S: (Subjek menulis perkataan berikut pada kertas).

'gula-gula'

P: Apa yang Aimi tulis tu?
S: Gula-gula.
P: Adila nampak perkataan 'gula-gula' atau gambar gula-gula?
S: Perkataan gula-gula.
P: Apa kaitan perkataan gula-gula dengan bahagi?
S: Sebab gula-gula boleh dibahagi.
P: Baik, ada gambar lain tak?
S: (Subjek menulis perkataan berikut sambil menyebutnya). Pisau.

'Pisau'

P: Lagi?
S: (Subjek menulis perkataan berikut sambil menyebutnya). Pensel.

'Pensel'

P: Ada gambar lain tak bila sebut bahagi?
S: (Subjek menulis perkataan berikut sambil menyebutnya). Guli.

'Guli'

P: Lagi?

S: (Subjek menulis perkataan berikut sambil menyebutnya). Ikan.

'Ikan'

P: Ada gambar lain tak tentang bahagi?
S: …Tak ada.
P: Tak ada gambar lain?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Aimi memberikan enam gambaran bagi perkataan bahagi. Gambaran yang beliau berikan adalah berbentuk nombor dan perkataan. Nombor-nombor yang dituliskan oleh Aimi adalah, 12, 10, 13, 14, 15, dan 16, manakala perkataan yang beliau tuliskan pula adalah gula-gula, pisau, pensel, guli, dan ikan.

Menurut Aimi, apabila perkataan 'bahagi' disebut, beliau menggambarkan nombor-nombor 12, 10, 13, 14, 15, dan 16, kerana nombor-nombor tersebut boleh dibahagi. Subjek juga menjelaskan bahawa semua nombor, kecuali sifar, boleh dibahagi. Aimi juga berpendapat sifar tidak boleh dibahagi kerana sifar tidak mempunyai apa-apa nilai.

Aimi juga mempunyai gambaran berbentuk perkataan, iaitu 'gula-gula' apabila 'bahagi' disebut. Menurut Aimi, beliau menggambarkan perkataan gula-gula kerana gula-gula boleh dibahagi. Selain itu, subjek juga menggambarkan perkataan pisau, pensel, guli dan ikan.

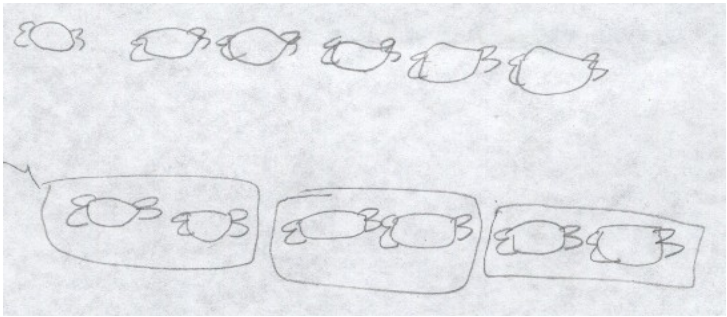
Gambaran Mental Bagi Ayat 6 ÷ 2

Aimi mempunyai sembilan gambaran bagi ayat enam bahagi dua. Kesemua gambaran itu beliau jelaskan secara lukisan. Petikan GM212 yang berikut memaparkan tingkah laku Aimi.

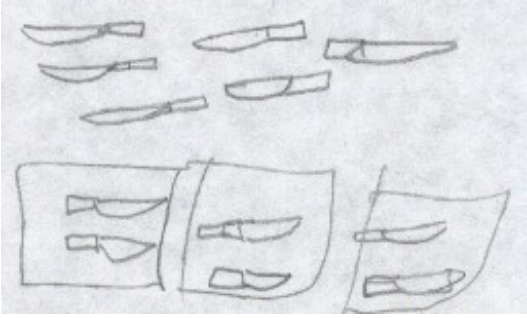
Petikan GM212

P: Kalau saya sebut enam bahagi dua, gambar apa ada dalam kepala Aimi?

S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ada gambar tak?
S: Ada.
P: Ada gambar apa kalau saya sebut enam bahagi dua?
S: (Subjek melukiskan gambar rajah berikut pada kertas)

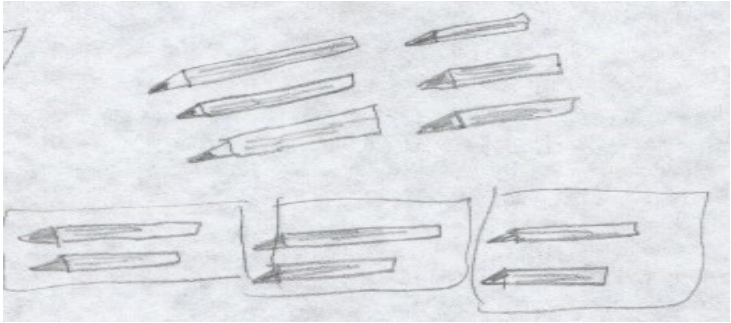


P: Gambar apa tu?
S: Gula-gula.
P: Boleh Aimi terangkan tentang gambar tu?
S: Yang ni enam (subjek menunjukkan enam gula-gula pada lukisannya yang tidak dibulatkan), ini enam bahagi dua (subjek menunjukkan lukisan di sebelah bawah yang telah dibulatkan).
P: Ada gambar lain?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut).

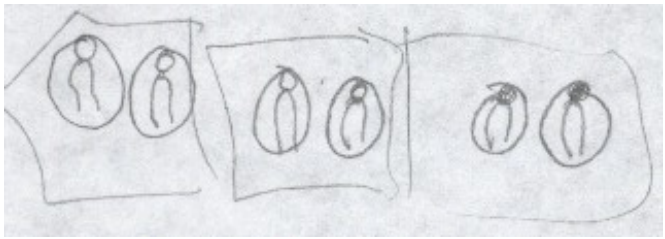


P: Ini gambar apa?
S: Pisau. Enam pisau bahagi dua (subjek menunjukkan gambar rajah yang telah dilukisnya)

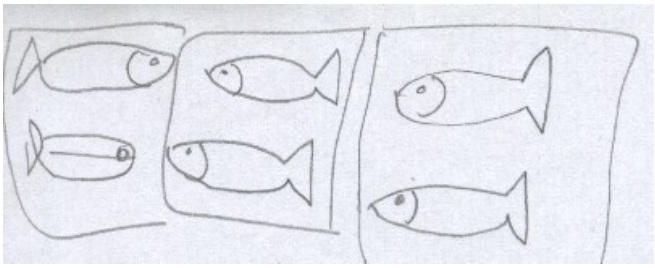
P: Selain pada tu ada gambar lain tak bila cikgu sebut enam bahagi dua?
S: (Subjek melukis gambarajah berikut):



P: Itu apa?
S: Pensil. Enam pensil bahagi dua.
P: Ada lagi?
S: (Subjek mengangguk dan melukis gambar rajah berikut):

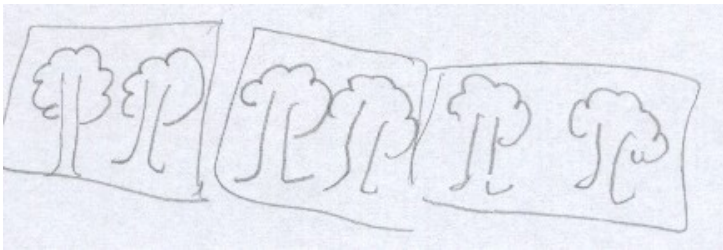


P: Ini apa pula?
S: Enam guli bahagi dua
P: Ada lagi?
S: Ada (Subjek melukiskan gambar rajah berikut):

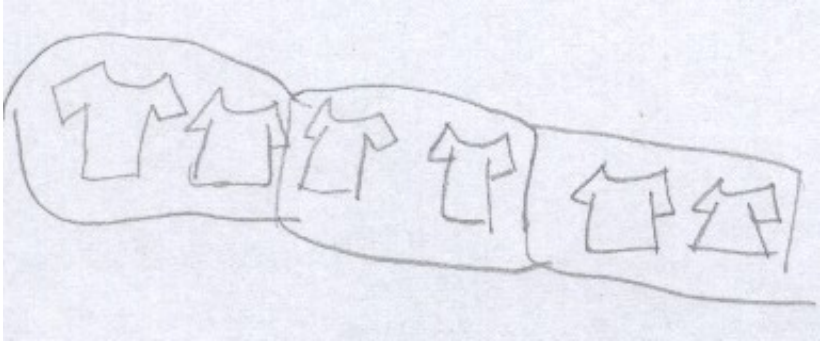


P: Gambar apa ni?
S: Enam ekor ikan bahagi dua.
P: Ada gambar lain?
S: Hmm… ada. (Subjek melukis gambar berikut):

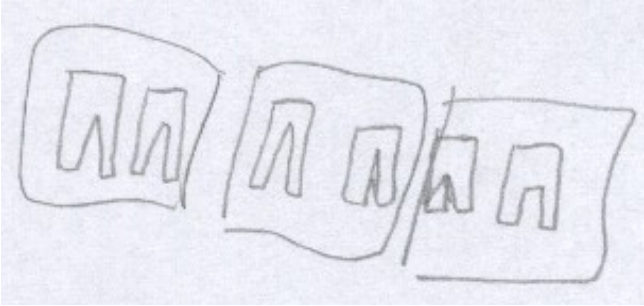
P: Adila lukis apa tu?
S: Lilin.
P: Kenapa Aimi bulatkan dua untuk setiap gambar? Kenapa tak bulatkan tiga, atau empat?
S: Sebab bahagi dua.
P: Kalau bahagi tiga?
S: Kena bulatkan tiga.
P: Baik, ada lagi gambar?
S: Ada (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada gambar lain?
S: Ada. (Subjek melukis gambar berikut):



P: Lagi?
S: (Subjek melukis gambar berikut):



P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Betul tak ada?
S: Betul.

Dalam Petikan GM212, Aimi menggambarkan enam bahagi dua dengan melukis gambar enam biji gula-gula. Subjek juga melukiskan enam lagi gula-gula yang kumpulkan dalam tiga kumpulan dengan meletakkan dua gula-gula dalam satu kumpulan. Selain itu, Aimi juga melukis enam bilah pisau, dan enam bilah pisau lagi dikumpulkan dalam tiga kumpulan. Setiap kumpulan yang beliau lukiskan mempunyai dua bilah pisau.

Seterusnya, Aimi menggambarkan enam bahagi dua dengan melukis enam batang pensel. Beliau melukiskan enam lagi pensel

yang kemudiannya dikumpulkan dengan meletakkan dua pensel di dalam satu kumpulan. Aimi berpendapat bahawa setiap lukisan beliau mempunyai tiga kumpulan dan setiap kumpulan itu mempunyai dua objek di dalamnya kerana gambaran yang diminta adalah bagi 6 ÷ 2. Menurut subjek lagi, sekiranya soalan yang ditanya adalah 6 ÷ 3, maka tiga objek akan dilukiskan dalam satu kumpulan.

Selain itu, Aimi telah melukiskan enam lagi lukisan iaitu, enam biji guli, enam ekor ikan, enam batang lilin, enam batang pokok, enam helai baju dan enam helai seluar. Setiap lukisan tersebut mempunyai enam objek yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan. Setiap kumpulan dalam lukisan-lukisan itu pula mempunyai dua objek.

Kesimpulan

Sebagai kesimpulan, Aimi menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis nombor-nombor 12, 10, 13, 14, 15, dan 16. Selain itu, beliau menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis perkataan gula-gula, pisau, pensel, guli dan ikan.

Bagi ayat enam bahagi dua pula, Aimi melukiskan sembilan lukisan yang menunjukkan enam bahan yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan, dengan setiap kumpulan mengandungi dua bahan. Bahan-bahan yang dilukiskan oleh Aimi adalah gula-gula, pisau, pensel, guli, ikan, lilin, pokok, baju dan seluar.

Perwakilan

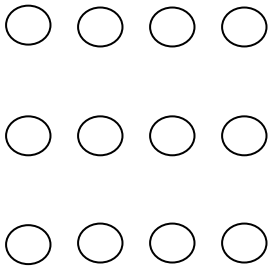
Ayat Bahagi

Ayat bahagi tanpa baki

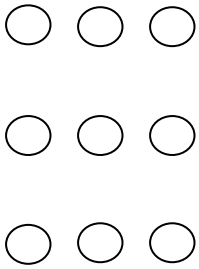
Aimi mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan menyusun empat biji butang dalam satu barisan bagi membentuk tiga barisan. Subjek juga mewakilkan ayat tersebut dengan membentuk empat kumpulan yang mengandungi tiga butang. Tingkah laku beliau dipaparkan dalam Petikan PW221.

Petikan PW221

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4) Cuba lihat kad ini. Boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Kenapa kata dua belas bahagi empat?
S: (Subjek hanya memandang kad yang ditunjukkan, tanpa sebarang jawapan).
P: Ini apa (menunjukkan angka 12)?
S: Dua belas.
P: Yang ini (menunjukkan simbol ÷)?
S: Bahagi.
P: Yang ini (menunjukkan angka 4)?
S: Empat.
P: Jadi apa yang tertulis pada kad ni?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Baik, sekarang boleh tak tunjuk dengan butang – butang ni bagaimana dua belas bahagi empat?
S: Kena kira ke?
P: Ya.
S: (Subjek mengira dua belas butang dan kemudian menyusun dalam tiga barisan seperti berikut):



P: Boleh tak terangkan apa yang Aimi buat ni?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Yang mana dua belas? Boleh tunjuk tak dua belas pada ayat tadi rujuk pada bahagian mana dalam susunan ni (menunjukkan susunan subjek).
S: Yang ni semua. (Subjek menunjukkann kesemua butang yang telah disusun).
P: Ini rujuk pada apa (menunjukkan angka 4 pada ayat 12 ÷ 4)?
S: Empat (menunjukkan empat butang pada baris pertama)?
P: Ada berapa butang dalam satu kumpulan?
S: Empat.
P: Kenapa empat?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kalau bahagi tiga macam mana?
S: Buang satulah. (Subjek mengeluarkan satu butang daripada setiap kumpulan seperti berikut):.

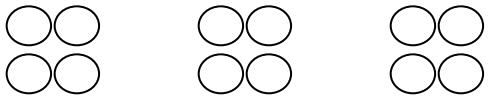


P: Tadi soalannya dua belas bahagi empat kan, kalau soalannya diubah menjadi dua belas bahagi tiga macam mana susunannya?
S: Macam nilah (subjek menunjukkan susunan yang telah dibuatnya).
P: Ada berapa semua?
S: Tiga.
P: Semua sekali ada berapa butang (menunjukkan kesemua butang yang telah disusun oleh subjek).
S: (Subjek mengira dan memberikan jawapan) Sembilan.
P: Tadi cikgu sebut dua belas bahagi tiga kan?

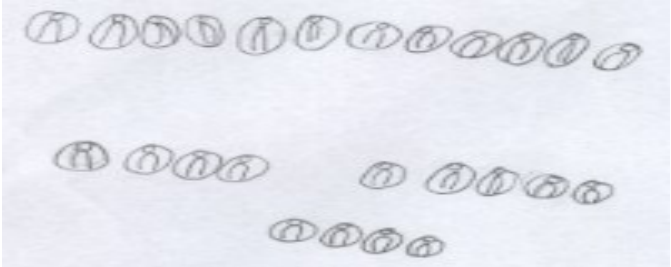
S: (Subjek mengira dan menyusun semula butang-butang tersebut seperti berikut):

P: Boleh terangkan apa yang Aimi buat ni?
S: Dua belas bahagi tiga.
P: Kalau dua belas bahagi enam, berapa butang akan dikumpulkan?
S: Enam.
P: Baik, ada berapa butang dalam satu kumpulan di sini (menunjukkan susunan yang dibuat oleh subjek?
S: Tiga.
P: Kenapa Aimi letak tiga dalam satu kumpulan?
S: Sebab bahagi tiga.
P: Susunan ini sama tak dengan susunan yang Aimi buat tadi untuk dua belas bahagi empat?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ni bahagi tiga. Tadi bahagi empat.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Butang dalam kumpulan.
P: Apa yang beza tentang butang dalam kumpulan?
S: (Subjek senyap).
P: Susunan ni ada berapa butang dalam satu kumpulan?
S: Tiga.
P: Yang tadi, untuk dua belas bahagi empat?
S: Empat.
P: Lagi? Ada perbezaan lagi tak?
S: Tak ada?
P: Bagaimana dengan kumpulan? Ada berapa kumpulan di sini (menunjukkan susunan yang dibuat oleh subjek)?
S: Empat.
P: Bagi dua belas bahagi empat, ada berapa? Ingat lagi tak?
S: (Subjek mengangguk). Tiga.
P: Ada lagi perbezaan?
S: Tak ada.
P: (Menunjukkan ayat 12 ÷ 4 semula). Cuba lihat semula ayat ni.
S: Dua belas bahagi empat.
P: Boleh tak Aimi tunjuk secara lain dua belas bahagi empat?
S: Tak tahu.
P: Tadi Aimi ada tunjuk satu cara bagaimana dua belas bahagi empat sekarang cuba tunjuk cara lain. Cuba.

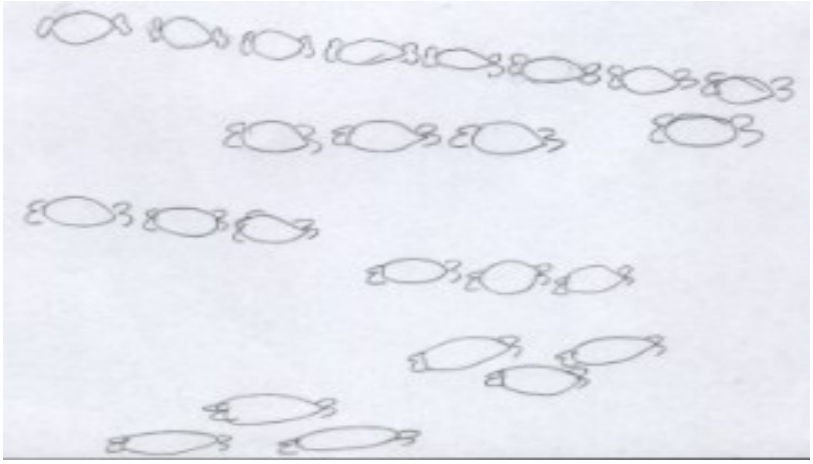
S: (Subjek menyusun seperti berikut).



P: Baik, ada berapa kumpulan di sini (menunjukkan susunan yang dibuat oleh subjek)?
S: Tiga.
P: Tiga ni rujuk pada apa pada ayat tadi (menunjukkan ayat 12 ÷ 4)?
S: (Subjek senyap).
P: Dalam ayat ni (menunjukkan ayat 12 ÷ 4), ada tiga tak?
S: Tak ada.
P: Jadi apa kaitan tiga dengan ayat 12 ÷ 4?
S: (Subjek senyap).
P: Baik susunan yang Aimi buat ni mewakili ayat bahagi apa?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Dua belas boleh bahagi empat tak?
S: Boleh.
P: Macam mana Aimi tahu dua belas boleh bahagi empat?
S: Ini boleh bahagi (subjek menunjukkan susunannya).
P: Bilangan butang dalam satu kumpulan merujuk pada apa dalam ayat ini (menunjukkan kad 12 ÷ 4)?
S: Empat (subjek menjawab sambil menunjukkan angka 4 pada ayat 12 ÷ 4).
P: Jadi bilangan kumpulan pula mewakili apa (menunjukkan susunan yang dibuat oleh subjek)?
S: Tiga. Jawapan dia.
P: Jawapan apa?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Kenapa Aimi kata jawapan dia?
S: Sebab kalau dua belas bahagi empat jawapan dia tiga.
P: Jadi bilangan kumpulan ni merujuk kepada apa (menunjukkan susunan subjek)?
S: Jawapan dua belas bahagi empat.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk dua belas bahagi empat?
S: Boleh lukis tak?
P: Boleh.
S: (Subjek melukiskan gambar rajah berikut pada kertas disediakan):

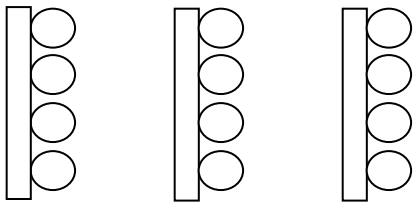


P: Boleh Aimi terangkan tentang lukisan ini (menunjukkan lukisan subjek)?
S: Dua belas guli bahagi empat.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Empat.
P: Setiap kumpulan ada empat?
S: (Subjek mengangguk).
P: Bagaimana dengan kumpulan ini (menunjukkan kumpulan yang mempunyai lima guli).
S: Empat.
P: Cuba kira.
S: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 . Terlebih.
P: Sepatutnya berapa?
S: Empat.
P: Boleh tak tunjuk dengan cara lain dua belas bahagi tiga?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut):

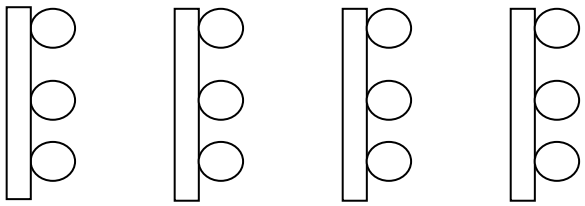


P: Gambar tu bagi dua belas bahagi berapa?
S: Tiga.
P: Boleh tak wakilkan gambar tu (menunjukkan gambar gula-gula yang dilukis oleh subjek) untuk ayat 12 ÷ 4?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab ada tiga gula-gula (subjek menunjukkan lukisannya).

P: Sekarang boleh tak Aimi buat cerita bagi ayat dua belas bahagi empat?
S: Ada dua belas biji guli. Ali ada empat ... tiga orang adik. Emak Ali memberilkan seorang empat.
P: Seorang dapat berapa?
S: Empat.
P: Ali tak dapat?
S: Tak.
P: Adik Ali berapa orang?
S: Empat.
P: Mak Ali bagi guli kepada...?
S: Adik Ali.
P: Seorang dapat berapa?
S: Seorang dapat empat.
P: Semua ada berapa guli?
S: Dua belas.
P: Baik, sekarang cuba Aimi buat cerita tapi kali ini gunakan penyedut minuman ni sebagai adik Ali atau kawan Aimi dan butang-butang ni sebagai guli (memberikan penyedut minuman dan butang), dan cuba tunjuk bagaimana dua belas bahagi empat.
S: Dua belas bahagi empat?
P: Ya, dua belas bahagi empat.
S: (Subjek menyusun tiga penyedut minuman dan meletakkan butang-butang pada setiap penyedut tadi seperti berikut):



P: Boleh cerita tentang susunan tu?
S: Saya dua belas gula-gula. Saya beri kepada tiga orang kawan. Seorang dapat empat.
P: Ini untuk dua belas bahagi berapa?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Kalau kawan Aimi tu empat orang bagaimana agaknya susunannya?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Boleh cerita?
S: Saya ada dua belas guli. Saya beri kepada empat orang kawan. Seorang dapat tiga.
P: Susunan ini untuk ayat dua belas bahagi empat ke?
S: Tak. Bahagi tiga.
P: Kenapa bahagi tiga?
S: Sebab ada tiga guli.
P: Ada perbezaan tak antara susunan ini dan yang tadi (menunjukkan susunan yang dibuat oleh subjek)?
S: Yang ni ada empat kumpulan. Satu kumpulan ada tiga (subjek menunjukkan penyusunan yang telah dibuatnya).
P: Yang tadi? Ingat lagi tak?
S: Yang tadi ada tiga kumpulan satu kumpulan ada empat butang.
P: Ada cara lain?
S: Tak ada.

Pada peringkat awal Petikan PW221, Aimi mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan yang mempunyai empat biji butang di dalamnya. Subjek menjelaskan bahawa jumlah butang dalam setiap kumpulan (baris) bergantung kepada saiz pembahagi. Misalnya, bagi ayat bahagi empat, empat butang disusun dalam satu kumpulan, manakala bagi ayat bahagi tiga, tiga butang disusun dalam satu kumpulan. Aimi juga memberikan penjelasan yang sama bagi ayat bahagi enam, iaitu enam butang dikumpulkan dalam satu kumpulan.

Seterusnya, Aimi menjelaskan bahawa nombor dua belas yang terdapat pada ayat 12 ÷ 4 merujuk semua butang yang disusun oleh beliau. Belaiu juga berpendapat ‘bahagi empat’ pada ayat tersebut bilangan butang yang terdapat dalam setiap kumpulan, manakala jawapan kepada pembahagian tersebut merujuk bilangan kumpulan

yang dapat dibentuk. Aimi juga berpendapat perwakilan yang ditunjukkan bagi ayat 12 ÷ 4 dan ayat 12 ÷ 3 adalah tidak sama. Menurut beliau, bilangan butang yang terdapat dalam satu kumpulan bagi ayat 12 ÷ 4 adalah empat, manakala bagi ayat 12 ÷ 3 pula ialah tiga biji butang. Aimi juga berpendapat bahawa bilangan kumpulan yang dapat dibentuk bagi ayat 12 ÷ 4 adalah tiga, manakala bilangan kumpulan yang boleh dihasilkan bagi 12 ÷ 3 pula adalah empat.

Selain menggunakan bahan maujud, Aimi juga mewakilkan ayat bahagi 12 ÷ 4 dan 12 ÷ 3 secara lukisan dan bercerita. Kesemua cara yang beliau gunakan mengukuhkan penjelasan beliau, iaitu bilangan objek dalam setiap kumpulan bergantung kepada saiz pembahagi. Bagi mewakili 12 ÷ 4 secara lukisan, Aimi melukiskan empat biji guli dalam satu kumpulan bagi membentuk tiga kumpulan. Bagi ayat bahagi 12 ÷ 3 pula, Aimi melukiskan tiga biji gula-gula dalam satu kumpulan untuk membentuk empat kumpulan. Aimi juga berpendapat, lukisan yang dibuat bagi ayat 12 ÷ 3 tidak boleh diwakilkan 12 ÷ 4. Menurut beliau, lukisan tersebut tidak boleh diwakili oleh ayat 12 ÷ 4 kerana satu kumpulan dalam lukisan beliau mengandungi tiga gula-gula.

Bagi menunjukkan perwakilan 12 ÷ 4 secara bercerita, Aimi meletakan tiga penyedut minuman sebagai kawan dan setiap penyedut minuman tersebut masing-masing diletakkan tiga biji butang sebagai guli. Apabila Aimi diminta membahagikan dua belas biji butang

menggunakan empat penyedut minuman, beliau meletakkan tiga biji butang di sebelah setiap penyedut minuman. Menurut Aimi lagi, penyusunan tersebut adalah bagi mewakili ayat 12 ÷ 4 kerana setiap penyedut minuman mempunyai tiga biji butang, iaitu sama saiz dengan pembahagi.

Di bahagian akhir Petikan PW221, Aimi menjelaskan bahawa perwakilan yang yang ditunjukkan bagi ayat bahagi 12 ÷ 4 dan 12 ÷ 3 adalah tidak sama. Menurut beliau, perbezaan itu adalah kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai bilangan kumpulan dan saiz setiap kumpulan yang tidak sama.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Aimi mewakilkan ayat 8 ÷ 3 dengan menyusun tiga biji butang dalam satu kumpulan bagi membentuk dua kumpulan. Beliau juga mewakilkan ayat tersebut dengan membentuk cerita. Bagi ayat 8 ÷ 5 pula, Aimi mewakilkannya dengan membentuk satu kumpulan yang mengandungi lima butang. Petikan PW222 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan PW222

P: Cuba baca yang ini. (Menunjukkan kad yang tertulis ayat '8 ÷ 3').
S: Lapan bahagi tiga.
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang ini (menunjukkan tiga puluh enam biji butang) bagi lapan bahagi tiga?

S: (Subjek mengira dan menyusun butang-butang tersebut seperti di bawah):

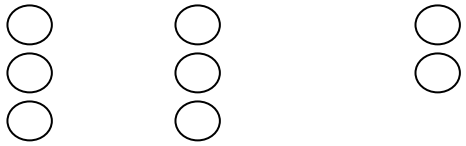
P: Boleh beritahu cikgu apa yang Aimi buat?
S: Lapan bahagi tiga (subjek menunjukkan susunannya).
P: Kenapa yang ni ada dua yang lain ada tiga? (Menunjukkan dua butang yang diasingkan)
S: Tak cukup.
P: Apa yang tak cukup?
S: Butang tu tak cukup.
P: Tak cukup berapa?
S: Tiga.
P: Tiga? Sepatutnya ada berapa?
S: Tiga.
P: Kenapa mesti ada tiga?
S: Sebab lapan bahagi tiga.
P: Kalau lapan bahagi lima macam mana?
S: Nak susun ke (menunjukkan butang-butang yang telah disusun)?
P: Boleh Aimi tunjuk dengan butang?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):

S: Tak cukup.
P: Apa yang tak cukup?
S: Yang ini (menunjukkan kumpulan yang mempunyai tiga butang).
P: Sepatutnya ada berapa?
S: Lima.
P: Kenapa lima?
S: Sebab bahagi lima.
P: Dalam susunan ni (menunjukkan butang-butang yang telah disusun oleh subjek) yang mana menunjukkan ini (menunjukkan lapan pada ayat '8 ÷ 5')?
S: Semua (menunjukkan semua butang).
P: Termasuk ini ke (menunjukkan tiga butang yang diasingkan)?
S: Ya.
P: Yang ni (menunjukkan 5 pada ayat '8 ÷ 5')?

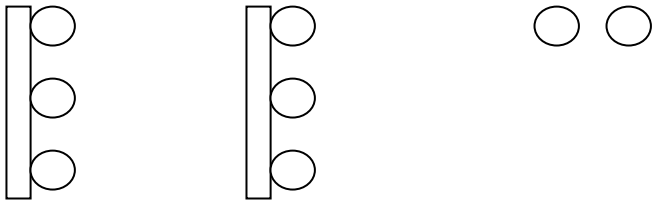
S: Ini lima (menunjukkan kumpulan yang mempunyai lima butang).
P: Bagaimana dengan jawapan bagi ayat tadi?
S: (Subjek senyap)
P: Apa jawapan bagi '8 ÷ 5'?
S: Lima baki tiga.
P: Kenapa lima baki tiga? Boleh terangkan?
S: Ini lima, ini tiga ... baki (menunjukkan kumpulan yang mempunyai lima dan tiga butang).
P: Kalau untuk yang ini macam mana (menunjukkan kad 8 ÷ 3)? Apa jawapannya?
S: Nak susun ke?
P: Kalau tak gunakan butang boleh jawab?
S: Tak boleh.
P: Baik, gunakan butang yang lain.
S: (Subjek menolak susunan yang telah dibuat, dan mengira semula untuk susunan baru. Perwakilan yang telah dibuat adalah seperti berikut):

P: Baik. Yang ini lapan bahagi...?
S: Tiga.
P: Sini (menunjukkan kumpulan tiga butang) ada tiga butang sebab apa?
S: Lapan bahagi tiga.
P: Apa jawapan bagi 8 ÷ 3?
S: Dua baki dua.
P: Kenapa dua baki dua?
S: Sebab ada dua kumpulan.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Tiga.
P: Macam mana dengan kumpulan ini (menunjukkan dua butang yang diasingkan)?
S: Baki.
P: Kenapa tak kira sekali dengan dua kumpulan tadi?
S: Sebab tak cukup tiga.
P: Jadi jawapan bagi 8 ÷ 3 ialah...?
S: Dua baki dua.
P: Cuba tengok semula susunan tadi bagi 8 ÷ 5. Apa jawapan bagi lapan bahagi lima?
S: Lima ... satu ... satu baki tiga.
P: Kenapa satu baki tiga?
S: Sebab ada satu kumpulan.
P: Satu kumpulan tu ada berapa butang?
S: Lima.

P: Kenapa lima?
S: Bahagi lima.
P: Yang ni (menunjukkan tiga butang yang diasingkan)
S: Baki tiga.
P: Boleh tak kira sebagai satu kumpulan?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab ada tiga butang sahaja.
P: Ada cara lain nak tunjuk lapan bahagi tiga?
S: (Subjek menunjukkan seperti berikut):

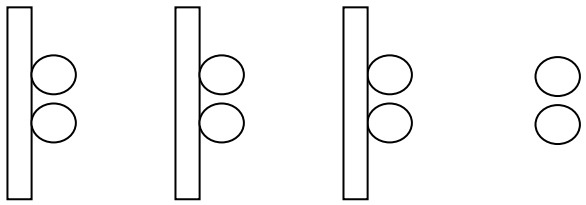


P: Boleh Aimi terangkan lapan pada ayat 8 ÷ 3 rujuk pada bahagian mana dalam susunan ini?
S: Semua (menunjukkan semua butang yang disusunnya).
P: Yang ini (menunjukkan angka tiga pada 8 ÷ 3)?
S: Kumpulan (subjek menunjukkan kumpulan yang mempunyai tiga butang).
P: Jawapannya?
S: Dua kumpulan dan dua baki (subjek menunjukkan kedua-dua kumpulan dan baki).
P: Boleh Aimi buat cerita dengan lapan bahagi tiga?
S: Ali ada lapan biji kek. Nak bahagi kepada ... dua orang kawan dia. Seorang dapat tiga kek. Ada dua kek lebih.
P: Seorang dapat berapa kek?
S: Tiga.
P: Boleh Aimi buat cerita bagi lapan bahagi tiga dengan menggunakan penyedut minuman sebagai kawan dan butang sebagai kek?
S: Ali ada lapan biji kek. Dia bahagi kepada kawan-kawannya. Seorang mendapat tiga biji. Ada dua biji baki. (Subjek menyusun dua penyedut minuman dan meletakkan tiga butang bagi setiap penyedut tersebut).

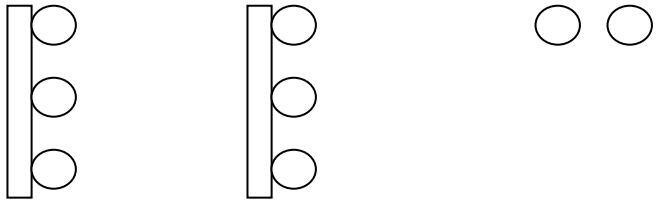


P: Kenapa asingkan yang ini (menunjukkan dua butang yang diasingkan)?

S: Baki.
P: Kenapa tak letak sini satu, sini satu (menunjukkan kedua-dua penyedut minuman)?
S: (Subjek senyap sebentar dan menjawab). Tak boleh sebab kena ada tiga sahaja.
P: Kenapa tiga?
S: Sebab ...bahagi tiga.
P: Kalau letak situ jadi bahagi berapa?
S: Empat.
P: Kawan Ali berapa orang?
S: Dua orang.
P: Kalau kawan Ali tiga orang, seorang akan dapat berapa?
S: Boleh susun balik?
P: Boleh.
S: (Subjek menyusun semula dan memberikan jawapan). Dua.

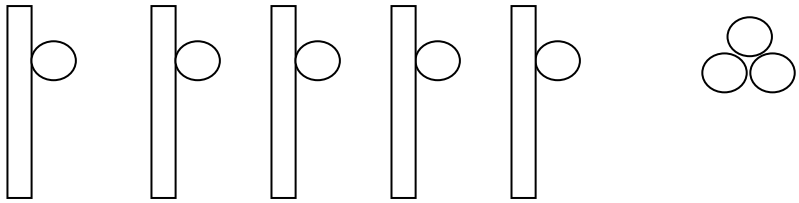


P: Ayat bahagi untuk susunan ni macam mana? Lapan bahagi tiga ke?
S: Tak, lapan bahagi dua.
P: Kenapa lapan bahagi dua?
S: Sebab seorang dapat dua (subjek menunjukkan susunannya).
P: Bukan lapan bahagi tiga ke?
S: Bukan ... lapan bahagi tiga macam ni (subjek menyusun dengan cepat seperti berikut):



P: Ada cara lain nak tunjuk lapan bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Boleh buat cerita untuk ayat 8 ÷ 5 macam tadi? Boleh guna penyedut minuman dan butang.
S: (Subjek menyusun seperti berikut kemudian bercerita). Ali ada lapan biji gula-gula, hendak bahagi kepada adik dia. Adik Ali mendapat lima.

P: Adik dia seorang sahaja?
S: Ya.
P: Yang ini (menunjukkan tiga butang yang diasingkan)?
S: Lebih. Ali simpan.
P: Kalau gunakan lima penyedut minuman? Katalah adik dia lima orang.
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Seorang dapat berapa?
S: Satu.
P: Ini lapan bahagi lima ke?
S: Tak. Lapan bahagi satu.
P: Kenapa?
S: Sebab ada satu butang sahaja. Kalau bahagi lima kena ada lima butang.
P: Ada cara lain nak tunjuk untuk lapan bahagi lima?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW222, Aimi mewakilkan 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan yang mengandungi tiga biji butang dan mengasingkan dua biji butang lagi. Aimi juga menjelaskan bahawa bilangan butang dalam setiap kumpulan bergantung kepada saiz pembahagi pada ayat bahagi. Misalnya, bagi ayat 8 ÷ 3, tiga butang dikumpulkan dalam satu kumpulan dan bagi ayat 8 ÷ 5 pula, lima butang dikumpulkan dalam satu kumpulan.

Aimi juga berpendapat bahawa bagi ayat 8 ÷ 3, terdapat dua butang yang tidak boleh dijadikan satu kumpulan. Menurut beliau butang-butang tersebut tidak boleh dikumpulkan dalam satu kumpulan kerana kurang daripada tiga. Beliau juga menjelaskan bahawa bagi ayat 8 ÷ 5 pula, terdapat tiga butang secara berlebihan dan butang tersebut juga tidak boleh dikumpulkan dalam satu kumpulan kerana bilangan butang-butang itu kurang daripada lima.

Selain itu, Aimi menjelaskan bahawa angka lapan pada ayat bahagi 8 ÷ 3 merujuk semua butang yang disusunnya termasuk dua biji butang yang dinamakannya sebagai baki. Beliau juga menjelaskan bahawa angka tiga pada ayat bahagi 8 ÷ 3 merujuk bilangan butang dalam setiap kumpulan, manakala jawapan bagi ayat tersebut pula iaitu, 'dua baki dua' merujuk bilangan kumpulan yang dapat dibentuk dan bilangan baki. Bagi ayat 8 ÷ 5, Aimi menjelaskan bahawa lima pada ayat tersebut merujuk lima butang yang dikumpulkan dalam satu kumpulan, manakala lapan pula merujuk semua butang dalam susunannya termasuk tiga butang yang diasingkan sebagai baki. Pada mulanya, Aimi memberikan lima baki tiga sebagai jawapan bagi ayat 8 ÷ 5 berpandu kepada susunan yang beliau tunjukkan. Namun setelah beliau diminta membandingkan jawapan tersebut dengan jawapan yang beliau peroleh bagi ayat 8 ÷ 3, Aimi memberikan satu baki tiga sebagai jawapan ayat 8 ÷ 5.

Aimi juga mewakilkan ayat 8 ÷ 3 dengan membentuk cerita. Dalam cerita tersebut, lapan biji kek dibahagi kepada dua orang

kawan supaya setiap kawan mendapat tiga biji kek. Aimi juga menggunakan dua penyedut minuman sebagai ‘kawan’ dan lapan biji butang sebagai ‘kek’ bagi menjelaskan lagi ceritanya. Beliau meletakkan tiga biji butang bagi setiap penyedut minuman bagi mewakili tiga biji ‘kek’. Beliau juga menjelaskan bahawa tiga biji butang tersebut merujuk ayat 8 ÷ 3. Menurut beliau lagi, dua butang yang beliau namakan sebagai ‘baki’ tidak boleh diletakkan pada penyedut minuman kerana soalannya adalah bahagi tiga. Aimi menjelaskan sekiranya kedua-dua butang ‘baki’ diletakkan pada penyedut minuman, ayat bahagi 8 ÷ 3 akan menjadi 8 ÷ 4. Apabila Aimi diminta meletakkan tiga penyedut minuman sebagai ‘kawan’, Aimi menyusun dua butang pada setiap penyedut minuman bagi mewakili ‘kek’. Menurut beliau lagi, ayat yang sesuai bagi susunan tersebut adalah 8 ÷ 2 dan bukannya 8 ÷ 3 kerana terdapat hanya dua butang pada setiap penyedut minuman.

Aimi juga mewakilkan ayat 8 ÷ 5 dengan membentuk cerita. Dalam cerita tersebut, Aimi meletakkan satu penyedut minuman sebagai ‘adik’ dan menyusun lima biji butang pada penyedut tersebut bagi mewakili ‘gula-gula’. Subjek juga menjelaskan bahawa tiga biji butang yang dinamakannya sebagai ‘baki’ tidak boleh diletakkan pada penyedut minuman kerana soalannya adalah bahagi lima. Apabila Aimi diminta menggunakan lima penyedut minuman sebagai ‘adik’, beliau berpendapat bahawa seorang ‘adik’ hanya mendapat sebiji

gula-gula sahaja dan ayat bahagi yang sesuai bagi susunan tersebut adalah 8 ÷ 1.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Aimi mewakilkan ayat 7 ÷ 7 dengan mengumpulkan tujuh biji butang dalam satu kumpulan. Bagi ayat 2 ÷ 2 pula, beliau mengumpulkan dua biji butang dalam satu kumpulan. Petikan PW223 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petkan PW223

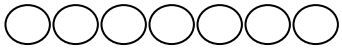
P: Boleh baca yang ini (Menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 7)
S: Tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang ini (menunjukkan tiga puluh enam biji butang)?
S: (Subjek mengambil tujuh butang dan menyusunnya dalam satu barisan seperti berikut):

P: Kenapa Aimi susun macam tu?
S: Sebab tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh terangkan yang mana menunjukkan tujuh bahagi tujuh?
S: (Subjek menunjukkan butang-butang yang telah disusunnya). Ini.
P: Itu apa?
S: Tujuh.
P: Bahagi tujuh yang mana?
S: Yang ni juga (menunjukkan butang-butang yang telah disusunnya).
P: Kenapa Aimi kata yang itu menunjukkan bahagi tujuh?
S: Bahagi tujuh ... ada tujuh butang.
P: Kalau bahagi tujuh kena ada tujuh butang?

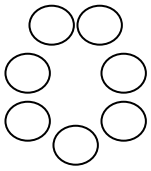
S: (Subjek mengangguk).
P: Macam mana kalau bahagi enam? Berapa butang perlu ada dalam dalam satu kumpulan?
S: Enam. (Subjek menjawab sambil menolak satu butang daripada susunannya).

P: Boleh terangkan apa yang Aimi buat?
S: Tujuh bahagi enam.
P: Ada berapa butang dalam satu kumpulan?
S: Enam.
P: Kenapa mesti ada enam?
S: Sebab bahagi enam.
P: Kalau dua bahagi dua macam mana? Berapa butang perlu ada dalam satu kumpulan?
S: Dua (subjek menjawab sambil menyusun seperti berikut):

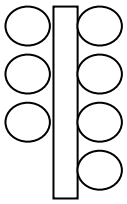
P: Boleh terangkan yang mana merujuk kepada dua dalam 2 ÷ 2?
S: Ini (subjek menunjukkan kedua-dua butang yang disusunnya)
P: Bahagi dua?
S: Ini juga (subjek menunjukkan butang yang disusunnya).
P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Kenapa hanya ada satu kumpulan?
S: Sebab ada dua butang saja.
P: Apa kaitan kumpulan tu dengan 2 ÷ 2?
S: . . . Jawapan dia. Dua bahagi dua, satu.
P: Baik, balik pada 7 ÷ 7. Berapa kumpulan Aimi dapat buat bagi 7 ÷ 7 ?
S: (Subjek menyusun semula tujuh butang dan menjawab). Satu.



P: Satu kumpulan tu merujuk kepada apa pada ayat ni (menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 7)?
S: ...Jawapan dia.
P: Kenapa Aimi kata jawapan dia?
S: Tujuh bahagi tujuh, satu.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk 7 ÷ 7?
S: (Subjek menyusun semula seperti di bawah):

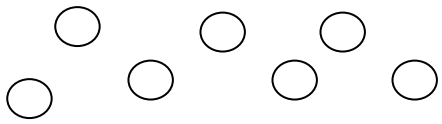


P: Boleh beritahu apa yang Aimi buat?
S: Tujuh bahagi tujuh sama dengan satu.
P: Susunan ni sama tak dengan yang tadi?
S: Tak.
P: Kenapa?
S: ...Yang ni semua butang kumpul sekali, tadi susun satu baris.
P: Ada berapa butang dalam satu kumpulan?
S: Tujuh.
P: Berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Tadi dapat berapa kumpulan bagi 7 ÷ 7?
S: Satu.
P: Tak sama ke dengan tadi?
S: Kumpulan sama, tapi cara susun tak sama.
P: Ada cara lain bagi tujuh bahagi tujuh?
S: Tak ada.
P: Boleh tak Aimi buat cerita bagi 7 ÷ 7?
S: Saya ada tujuh batang pensel. Saya nak beri kepada kawan saya.
P: Berapa orang kawan?
S: Satu.
P: Aimi bagi berapa batang pensel kepada kawan?
S: Tujuh.
P: Aimi boleh buat cerita lain dengan menggunakan penyedut minuman ni sebagai kawan?
S: Ahmad ada tujuh biji guli. Dia nak beri kepada adik dia. Adik Ahmad dapat tujuh guli. (Subjek bercerita sambil menyusun butang dan penyedut minuman).



P: Boleh terangkan kaitan ayat 7 ÷ 7 dengan susunan ini? Yang mana tujuh?
S: Yang ni (subjek menunjukkan semua butang dalam susunannya).
P: Bahagi tujuh?

S: Ini juga (subjek menunjukkan butang-butang yang disusunnya).
P: Jawapan bagi 7 ÷ 7 ?
S: Satu kumpulan (subjek menunjukkan penyedut minuman).
P: Boleh Aimi tunjuk dengan butang-butang bagi ayat ini (menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 1)?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Boleh Aimi terangkan?
S: Tujuh bahagi satu (subjek menunjukkan butang-butang susunannya).
P: Ada berapa kumpulan?
S: Tujuh.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Satu.
P: Kenapa satu?
S: Tujuh bahagi satu.
P: Kalau bahagi dua berapa butang perlu dikumpul?
S: Dua.
P: Yang mana menunjukkan tujuh?
S: Semua (subjek menunjukkan susunannya).
P: Bahagi satu?
S: Satu butang (subjek menunjukkan satu butang).
P: Jawapannya?
S: Tujuh bahagi satu, tujuh (subjek menunjukkan semua butang susunannya).
P: Boleh buat cerita untuk ayat ini (menunjukkan ayat 7 ÷ 1)?
S: Saya ada tujuh biji epal, nak bagi kawan ... tujuh orang kawan. Seorang mendapat satu.
P: Kenapa seorang hanya dapat satu?
S: Soalannya tujuh bahagi satu ... seorang dapat satulah.
P: Kalau kawan Aimi seorang saja, berapa dia akan dapat?
S: Kalau seorang dia dapat satu juga.
P: Kenapa dapat satu?
S: Sebab ... soalan dia bahagi satu. Kalau soalan dia bahagi dua baru dia dapat dua.
P: Susunan yang Aimi buat untuk 7 ÷ 1 (menunjukkan susunan subjek) sama tak dengan susunan yang Aimi buat bagi 7 ÷ 7?
S: Tak.
P: Kenapa tidak?
S: Soalannya lain.
P: Lain macam mana?

S: Yang ni 7 ÷ 1, tadi 7 ÷ 7.
P: Selain pada tu ada apa-apa perbezaan tak?
S: Jawapan dia. Yang ni jawapan tujuh, yang tadi jawapan dia satu.
P: Ada perbezaan lagi?
S: ...Tak ada.
P: Persamaan?
S: Tujuh butang. Yang ni tujuh bahagi satu. Tadi tujuh bahagi tujuh.
P: Ada cara lain nak tunjuk 7 ÷ 1?
S: Tak ada.

Pada peringkat awal Petikan PW223, Aimi mewakilkan ayat 7 ÷ 7 dengan mengumpulkan tujuh biji butang dalam satu kumpulan. Menurut beliau, tujuh butang dikumpulkan dalam satu kumpulan kerana ayat bahaginya adalah 'bahagi tujuh'. Aimi juga menjelaskan bahawa untuk ayat bahagi enam, enam butang dikumpulkan dalam satu kumpulan. Bagi ayat 2 ÷ 2 pula, Aimi mengumpulkan dua biji butang dalam satu kumpulan. Aimi juga menjelaskan bahawa angka dua pada bahagian pembahagi ayat 2 ÷ 2 merujuk kedua-dua butang yang terdapat dalam satu kumpulan. Beliau juga berpendapat jawapan bagi ayat 2 ÷ 2, iaitu satu, merujuk satu kumpulan yang dapat dibentuk. Bagi ayat 7 ÷ 7 pula, Aimi menjelaskan bahawa angka tujuh yang terdapat pada bahagian pembahagi ayat 7 ÷ 7 merujuk kepada tujuh butang yang dikumpulkan dalam satu kumpulan. Manakala jawapan bagi 7 ÷ 7 pula merujuk satu kumpulan yang dapat dibentuk.

Di bahagian pertengahan Petikan PW223, Aimi menunjukkan cara penyusunan yang berbeza bagi ayat 7 ÷ 7, tetapi penyusunan

beliau masih mempunyai tujuh biji butang dalam satu kumpulan. Subjek juga menjelaskan bahawa kedua-dua cara penyusunan yang ditunjukkan bagi ayat 7 ÷ 7 adalah berbeza. Aimi berpendapat bahawa walaupun kedua-dua penyusunan yang beliau tunjukkan mempunyai satu kumpulan yang mengandungi tujuh biji butang, namun kedua-dua cara yang beliau tunjukkan adalah berbeza kerana cara penyusunan adalah berbeza. Selain itu, Aimi juga membentuk cerita bagi ayat 7 ÷ 7. Dalam cerita tersebut, beliau menerangkan bagaimana tujuh batang pensel dibahagikan kepada seorang kawan, dan kawan tersebut mendapat ketujuh-tujuh batang pensel.

Aimi juga menggunakan penyedut minuman dan butang untuk menjelaskan satu lagi cerita bagi ayat 7 ÷ 7. Dalam cerita tersebut, beliau menerangkan bagaimana 'Ahmad' membahagikan tujuh biji guli kepada seorang adiknya. Bagi cerita itu, Aimi menyusun satu penyedut dikelilingi oleh tujuh biji butang yang mewakili tujuh biji guli. Beliau juga menjelaskan bahawa angka tujuh pada ayat 7 ÷ 7 merujuk tujuh biji butang yang dikumpulkan dalam satu kumpulan, manakala jawapan bagi ayat tersebut merujuk sebatang penyedut minuman yang diletakkan di tengah kumpulan butang-butang.

Pada peringkat akhir Petikan PW223, Aimi mewakilkan ayat 7 ÷ 1 dengan meletakkan tujuh biji butang secara tidak tersusun. Menurut beliau, penyusunan tersebut mewakili tujuh kumpulan yang mempunyai sebiji butang di dalam setiap kumpulan. Aimi juga menjelaskan bahawa setiap kumpulan hanya mempunyai satu butang

kerana ia mewakili ayat tujuh bahagi satu. Selain itu, Aimi juga berpendapat bahawa angka tujuh pada ayat $7 \div 1$ merujuk tujuh biji butang yang disusun secara tidak tersusun, angka satu merujuk satu butang dalam setiap kumpulan manakala bilangan kumpulan merujuk jawapan bagi ayat $7 \div 1$. Aimi juga membentuk cerita bagi ayat $7 \div 1$. Dalam cerita tersebut, beliau membahagikan tujuh biji epal kepada tujuh orang kawan, dengan setiap 'kawan' mendapat sebiji epal. Beliau juga menjelaskan bahawa sekiranya bilangan kawan dalam ceritanya adalah seorang, kawan tersebut tetap akan mendapat sebiji epal sahaja kerana soalannya ialah 'bahagi satu'. Menurut beliau lagi, sekiranya soalannya adalah 'bahagi dua' maka seorang 'kawan' akan mendapat dua biji epal.

Aimi juga berpendapat bahawa penyusunan yang dibuat bagi ayat $7 \div 1$ dan ayat $7 \div 7$ adalah berbeza kerana pembahaginya adalah berbeza, iaitu satu dan tujuh. Beliau menjelaskan bahawa jawapan yang diperoleh bagi kedua-dua ayat bahagi tersebut adalah juga berbeza. Aimi berpendapat terdapat hanya satu persamaan bagi ayat $7 \div 1$ dan ayat $7 \div 7$, iaitu angka tujuh yang terdapat pada nombor yang hendak dibahagi.

Gambar Rajah

Gambar Rajah Diskrit

Aimi mewakilkan gambar lima belas biji bola yang dikumpulkan dalam lima kumpulan dengan menulis persamaan 15 ÷ 3 = 5. Beliau juga menulis ayat bahagi 15 ÷ 5 = 3 bagi mewakilkan gambar rajah tersebut. Tingkah laku beliau dipaparkan dalam Petikan PW224 yang berikut.

Petikan PW224

P: Cuba lihat gambar ni? (Menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas biji bola) Boleh tak tulis ayat bahagi tentang gambar ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

15 ÷ 3 = 5

P: Boleh terangkan apa yang Aimi tulis?
S: Lima belas bahagi tiga sama dengan lima.
P: Kenapa Aimi tulis macam tu (menunjukkan ayat yang telah ditulis oleh subjek)?
S: Sebab semua ada lima belas, sini ada tiga bola (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lima belas bola)
P: Kenapa lima belas?
S: Semua ada lima belas bola.
P: Tiga?
S: Tiga sebab ada tiga bola dalam satu kumpulan.
P: Lima tu dari mana?
S: Lima sebab ada lima kumpulan (subjek menunjukkan kelima-lima kumpulan yang terdapat dalam gambar rajah).
P: Ada cara lain tulis ayat bahagi bagi gambar rajah tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

15 ÷ 5 = 3

P: Boleh Aimi terangkan apa yang Aimi tulis?
S: Lima belas bahagi lima sama dengan tiga.
P: Lima belas ni dari mana?
S: Semua bola.
P: Lima?
S: Sebab ada lima kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan angka 3 pada ayat 15 ÷ 5 = 3)?
S: Ada tiga bola (subjek menunjukkan bola dalam satu kumpulan).
P: Ayat tadi dengan ayat ni sama tak?
S: Tak
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni bahagi lima, yang ni bahagi tiga (Subjek menunjukkan kedua- dua ayat).
P: Apa lagi yang tak sama dengan kedua-dua ayat tadi?
S: Jawapan dia. Yang ni tiga (menunjukkan ayat 15 ÷ 5 = 3), yang ini lima (menunjukkan ayat 15 ÷ 3 = 5).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Ada tak apa-apa persamaan antara kedua-dua ayat tu?
S: Tak ada.
P: Tak ada?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW224, Aimi menulis persamaan 15 ÷ 3 = 5 bagi gambar rajah lima belas biji bola yang dikumpulkan dalam lima kumpulan. Menurut beliau, nombor lima belas yang terdapat pada ayat 15 ÷ 3 = 5 merujuk semua bola yang terdapat di dalam gambar rajah itu. Aimi juga menjelaskan bahawa angka tiga yang terdapat pada ayat 15 ÷ 3 = 5 merujuk tiga biji bola yang dikumpulkan dalam satu kumpulan, manakala angka lima pula merujuk lima kumpulan yang terdapat dalam gambar rajah tersebut.

Selain itu, Aimi juga mewakilkan gambar rajah yang mempunyai lima belas biji bola itu dengan menulis ayat 15 ÷ 5 = 3. Beliau menjelaskan bahawa lima belas yang terdapat pada ayat

15 ÷ 5 = 3 merujuk semua bola yang terdapat dalam gambar rajah itu. Menurut Aimi lagi, angka 5 dan 3 yang terdapat pada ayat 15 ÷ 5 = 3, masing-masing merujuk bilangan kumpulan, dan bilangan bola yang terdapat dalam setiap kumpulan.

Aimi juga berpendapat bahawa ayat 15 ÷ 3 = 5 dan ayat 15 ÷ 3 = 5 adalah berbeza. Menurut beliau lagi, kedua-dua ayat tersebut berbeza kerana kedua-dua ayat itu mempunyai pembahagi dan jawapan yang berbeza.

Aimi mewakilkan gambar enam belas ekor kura-kura yang dikumpulkan dalam empat kumpulan dengan menulis ayat 16 ÷ 4 = 4. Petikan PW225 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan PW225

P: Cuba lihat gambar ni pula. (Menunjukkan gambar enam belas ekor kura-kura) Boleh buat ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis 16 ÷ 4 = 4 dan membacanya) Enam belas bahagi empat sama dengan empat.
P: Kenapa enam belas?
S: Jumlah kura-kura ada enam belas.
P: Bahagi empat?
S: Empat kura-kura.
P: Yang ni (menunjukkan 4 pada jawapan)?
S: Ada empat kumpulan.
P: Boleh buat ayat lain?
S: (Subjek menulis seperti beikut dan menjawab). Sama dengan tadi.

16 ÷ 4 = 4

P: Kenapa sama?
S: Kura-kura dan kumpulan ada empat.
P: Dua-dua ayat bahagi sama tak?
S: Sama.

P: Kenapa sama?
S: Enam belas bahagi empat sama dengan empat.

Aimi menulis ayat 16 ÷ 4 = 4 bagi mewakili gambar enam belas ekor kura-kura yang dikumpulkan dalam empat kumpulan. Menurut beliau, enam belas yang terdapat pada ayat 16 ÷ 4 = 4 merujuk semua kura-kura, bahagi empat merujuk empat ekor kura-kura dalam setiap kumpulan dan empat pada jawapan pula merujuk empat kumpulan yang terdapat dalam gambar rajah.

Aimi juga menulis satu lagi ayat, iaitu 16 ÷ 4 = 4 dan menjelaskan bahawa ayat tersebut adalah sama dengan ayat yang ditulisnya di awal petikan. Menurut beliau, kedua-dua ayat yang beliau tulis bagi gambar rajah yang diberi, iaitu 16 ÷ 4 = 4 adalah sama kerana kedua-duanya mempunyai pembahagi dan jawapan yang sama, iaitu empat.

Gambar Rajah Selanjar

Aimi mewakilkan gambar rajah dua puluh satu petak yang dibahagikan kepada tiga bahagian, dengan menulis ayat 21 ÷ 7 = 3. Beliau juga menulis ayat 21 ÷ 3 = 7 bagi mewakili gambar rajah berbentuk selanjar. Tingkah laku beliau dipaparkan dalam Petikan PW226 yang berikut.

Petikan PW226

P: Sekarang cuba tengok gambar ini. Sama macam tadi boleh tak buat ayat bahagi untuk gambar ni (menunjukkan gambar rajah selanjar dua puluh satu petak)?
S: Dua puluh satu bahagi tujuh .
P: Boleh tulis ayatnya?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$21 \div 7 = 3$$

P: Macam mana dapat dua puluh satu?
S: Ada dua puluh satu kotak.
P: Yang ini (menunjukkan angka 7)?
S: Ada tujuh kotak satu bahagian.
P: Tiga?
S: Tiga tu bahagian
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Dua puluh satu bahagi tiga sama dengan tujuh.

$$21 \div 3 = 7$$

P: Boleh Aimi terangkan, dua puluh satu ini dari mana?
S: Semua kotak.
P: Yang ini (menunjukkan 7 pada ayat $21 \div 3 = 7$)?
S: Bilangan kotak, satu kumpulan.
P: Tiga ni (menunjukkan 3 pada ayat $21 \div 3 = 7$)?
S: Bahagian ada tiga.
P: Ayat-ayat tadi sama tak?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Nombor dia lain. Ini bahagi tiga, yang ni bahagi tujuh. (Subjek menunjukkan bahagi tiga dan bahagi tujuh)
P: Ada perbezaan lain?
S: Jawapan dia. Yang ini tiga (menunjukkan tiga pada ayat $21 \div 7 = 3$), yang ni tujuh (menunjukkan ayat $21 \div 3 = 7$)
P: Ada cara lain menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Aimi menulis ayat $21 \div 7 = 3$ bagi mewakili gambar rajah dua puluh satu petak yang dibahagi kepada

tiga bahagian. Beliau menjelaskan bahawa dua puluh satu pada ayat 21 ÷ 7 = 3 merujuk semua petak yang terdapat pada gambar rajah itu. Menurut Aimi lagi, beliau menulis persamaan 21 ÷ 7 = 3 kerana terdapat tujuh petak dalam setiap bahagian. Manakala angka tiga yang terdapat pada ayat 21 ÷ 7 = 3 pula merujuk bilangan bahagian yang terdapat dalam gambar rajah itu.

Selain itu, Aimi juga mewakilkan gambar rajah selanjar tersebut dengan menulis ayat 21 ÷ 3 = 7. Menurut beliau, angka tiga dan tujuh yang terdapat pada ayat 21 ÷ 3 = 7, masing-masing merujuk bilangan bahagian, dan bilangan petak dalam setiap bahagian. Aimi menjelaskan bahawa nombor dua puluh satu yang ditulis pada ayat 21 ÷ 3 = 7 merujuk semua petak yang terdapat pada gambar rajah itu.

Aimi juga berpendapat, kedua-dua ayat 21 ÷ 7 = 3 dan ayat 21 ÷ 7 = 3 adalah berbeza. Menurut beliau, perbezaan tersebut adalah kerana pembahagi dan jawapan yang terdapat di kedua-dua ayat itu tidak sama.

Penolakan Berulang

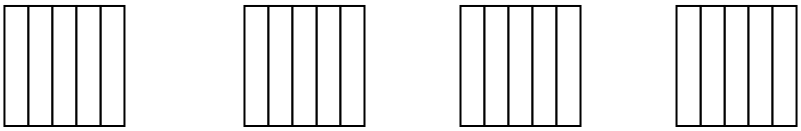
Pembahagian Tanpa Baki

Aimi mewakilkan pembahagian 20 ÷ 5 dengan mengeluarkan lima penyedut minuman sebanyak empat kali daripada dua puluh

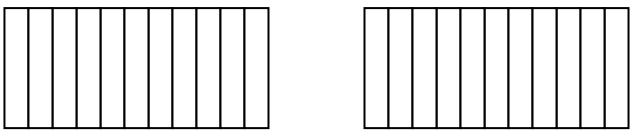
penyedut minuman yang telah dihitungkan. Beliau juga melakukan penolakan secara berulang dengan mengeluarkan empat penyedut minuman setiap kali dari kumpulan yang mengandungi dua puluh penyedut minuman bagi menunjukkan ayat bahagi 20 ÷ 4. Petikan PW227 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan PW227

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5). Boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua puluh bahagi lima.
P: Boleh Aimi tunjuk dengan penyedut minuman ini bagaimana dua puluh bahagi lima?
S: (Subjek menyusun penyedut minuman seperti berikut).



P: Kenapa susun macam ini (menunjukkan penyedut minuman yang telah disusun).
S: Sebab dua puluh bahagi lima (subjek menunjukkan angka lima pada kad).
P: Kalau dua puluh bahagi sepuluh, bagaimana?
S: (Subjek menyusun semula penyedut minuman yang diberi seperti berikut).



P: Kenapa kumpulkan sepuluh penyedut dalam satu longgokan?
S: Sebab bahagi sepuluh.
P: Baiklah. Balik kepada soalan tadi, dua puluh bahagi lima. Apa jawapan yang Aimi akan dapat?
S: (Subjek menyususn semula kepada empat bahagian dan memberi jawapan). Empat

P: Bagaimana tahu empat?

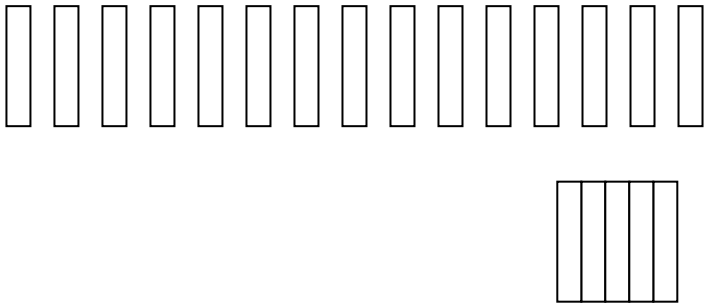
S: Sebab ada empat kumpulan. (Subjek menunjukkan empat longgokan yang telah disusun).

P: Baik yang ini kita simpan dulu. Sekarang boleh tak Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5)?

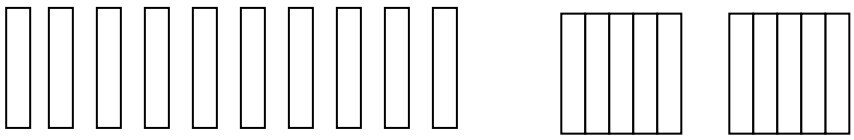
S: Dua puluh tolak lima.

P: Baik boleh Aimi tunjuk macam tadi menggunakan penyedut minuman yang lain?

S: (Subjek tidak menjawab).
P: Tadi dua puluh bahagi lima, sekarang dua puluh tolak lima.
S: (Subjek meletakkan dua puluh penyedut minuman kemudian mengasingkan lima daripada dua puluh penyedut minuman seperti berikut). Dua puluh tolak lima … lima belas.



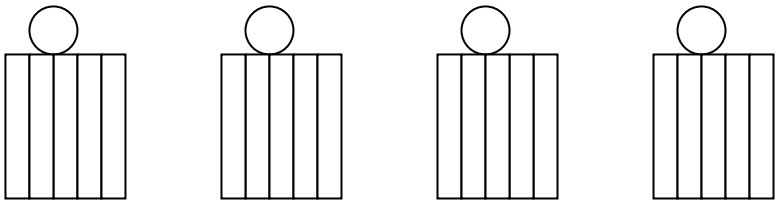
P: Boleh terangkan apa yang Aimi buat tu?
S: Dua puluh tolak lima.
P: Boleh Aimi tolak lima lagi?
S: Dari sini (subjek menunjukkan longgokan yang mengandungi lima belas penyedut)?
P: Ya
S: (Subjek mengasingkan lima lagi seperti berikut)



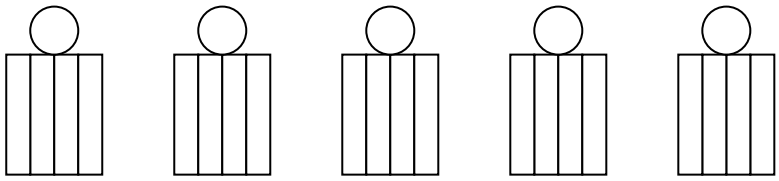
P: Ada berapa yang tinggal?
S: (Subjek menghitung dan memberi jawapan) Sepuluh.
P: Sekarang boleh tolak lima lagi dan beritahu berapa yang tinggal?
S: (Subjek mengeluarkan lima dan memberi jawapan). Lima.
P: Keluarkan lagi lima.
S: (Subjek menolak lima penyedut minuman yang tinggal dan menjawab). Jawapannya kosong.

P: Baik Aimi menolak berapa penyedut minuman setiap kali?
S: Lima.
P: Berapa kali Aimi keluarkan lima penyedut minuman?
S: Lima.
P: Macam mana tahu lima?
S: (Subjek diam).
P: Tak ingat ke?
S: (Subjek menggelengkan kepala).
P: Cuba buat semula. Ambil dua puluh tadi dan tolak lima-lima sampai habis? Kali ini cuba asingkan setiap lima yang ditolak.
S: (Subjek mengambil semula dua puluh penyedut minuman dan mengeluarkan dalam kumpulan lima sampai habis).
P: Ada berapa?
S: Empat
P: Tadi dua puluh bahagi lima dapat berapa? Cuba tengok susunan tadi?
S: Empat.
P: Yang baru Aimi buat tadi, $20 - 5$ secara berulang perlu tolak lima berapa kali?
S: Empat.
P: Sama tak kedua-dua ayat tadi?
S: (Subjek mengangguk).
P: Apa yang sama?
S: Jawapannya empat.
P: Yang mana jawapannya empat?
S: Dua-dua pun ada empat longgokan.
P: Ada lagi persamaan?
S: Tak ada.
P: Perbezaan ada tak?
S: Yang ni bahagi (subjek menunjukkan susunan yang dibuat bagi $20 \div 5$) yang ni tolak (subjek menunjukkan susunan
$20 - 5$).
P: Ada lagi tak yang berbeza atau sama?
S: Tak ada.
P: Apa persamaan kedua-dua susunan tadi? Ada tak yang sama?
S: Ada.
P: Apa yang sama?
S: Dua-dua pun ada dua puluh.
P: Apa lagi yang sama?
S: Lima. Satu kumpulan ada lima
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Apa kaitan ayat bahagi dan ayat tolak?
S: (Subjek tidak menjawab).

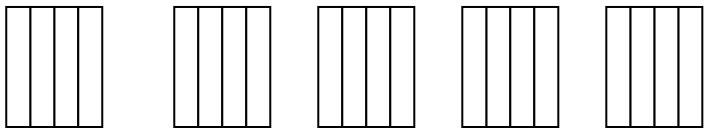
P: Aimi rasa kenapa agaknya ayat bahagi dan ayat tolak dapat susunan yang sama macam yang Aimi tunjuk tadi?
S: Sebab kalau tolak lima-lima jawapannya sama dengan bahagi.
P: Sama macam mana?
S: Macam ni (subjek menunjukkan susunan yang telah dibuatnya).
P: Apa jawapannya yang sama bagi kedua-dua susunan?
S: Lima ... empat.
P: Lima atau empat?
S: Empat.
P: Baik ada cara lain tak nak tunjuk dua puluh bahagi lima?
S: Tak ada.
P: Cuba buat cerita?
S: Saya ada dua puluh pembaris. Nak bahagi kepada kawan. Seorang dapat lima.
P: Kawan ada berapa orang?
S: Empat.
P: Boleh tunjuk dengan penyedut minuman ni? Katakan butang ni orang (memberikan butang kepada subjek)
S: (Subjek meletakkan lima butang dan kemudian menyusun empat penyedut minuman setiap satu). Empat.



P: Boleh terangkan apa yang Aimi buat?
S: Dua puluh pembaris bahagi kepada kawan-kawan. Seorang mendapat lima (subjek menunjukkan butang dan penyedut minuman sambil menerangkan).
P: Cerita tu menunjukkan dua puluh bahagi berapa?
S: Lima.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk dua puluh bahagi lima?
S: (Subjek berfikir sebentar). Tak ada.
P: Cuba Aimi buat cerita untuk dua puluh bahagi empat.
S: Ah Chong ada dua puluh pensel. Hendak bahagi kepada adik-adik dia. Seorang mendapat empat.
P: Adik dia berapa orang?
S: Adik dia lima orang.
P: Ah Chong dapat tak?
S: Tak.
P: Boleh tunjuk dengan penyedut minuman dan butang macam tadi?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Boleh Aimi tunjuk macam mana dua puluh tolak empat? Buat macam tadi sampai habis.
S: (Subjek mengeluarkan penyedut minuman dalam kumpulan empat sehingga habis dan menyusunnya dalam lima longgok yang berasingan seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan empat penyedut yang telah dikeluarkan?
S: Lima.
P: Ada tak apa-apa persamaan dengan cerita tadi?
S: Tak ada.
P: Macam mana dengan bilangan penyedut minuman yang dikeluarkan setiap kali?
S: Empat.
P: Dalam cerita bahagi tadi?
S: Empat juga.
P: Sama tak?
S: Sama.
P: Apa lagi yang sama? Ada lagi tak?
S: Kumpulan, ada lima.
P: Dalam cerita ada berapa?
S: Lima juga.
P: Ada lagi tak yang sama?
S: ... Tak ada.
P: Yang tak sama?
S: Ini tolak (subjek menunjukkan penyedut minuman bagi penolakan), ini bahagi (subjek menunjukkan susunan bagi pembahagian).
P: Kenapa agaknya Yang Aimi susun untuk dua puluh bahagi empat boleh sama dengan dua puluh tolak empat? Apa kaitan bahagi dengan tolak?
S: Kalau tolak-tolak sampai habis sama macam bahagi.
P: Tolak macam mana? Kena tolak bilangan yang sama ke setiap kali?
S: Kena sama.
P: Kalau ayat bahagi 20 ÷ 5 kena tolak berapa setiap kali?
S: Lima.

P: Kenapa lima? Kenapa tidak empat?
S: Lima, satu kumpulan ada lima.
P: Kalau tolak empat lima kali boleh tak?
S: … Tak boleh. Tolak empat kalau 20 ÷ 4.
P: Apa lagi yang sama tentang bahagi dengan tolak?
S: Tak ada.

Di bahagian awal Petikan PW227, Aimi menunjukkan pembahagian 20 ÷ 5 dengan membentuk empat kumpulan yang mempunyai lima penyedut minuman dalam setiap kumpulan. Beliau menjelaskan bahawa lima penyedut minuman disusun dalam satu kumpulan kerana pembahagi dalam ayat 20 ÷ 5 adalah lima.

Aimi berpendapat, bagi ayat 20 ÷ 10 pula, sepuluh penyedut minuman dikumpulkan dalam satu kumpulan. Subjek mengukuhkan penerangan beliau dengan membentuk dua kumpulan yang mempunyai sepuluh penyedut minuman dalam satu kumpulan. Aimi menjelaskan bahawa jawapan bagi ayat bahagi 20 ÷ 5 dapat diperolehi dengan mengira bilangan kumpulan yang dibentuk. Beliau berpendapat jawapan bagi ayat 20 ÷ 5 adalah empat sebab empat kumpulan boleh dibentuk bagi ayat tersebut.

Bagi ayat 20 − 5 pula, Aimi menghitung dua puluh penyedut minuman dan kemudiannya mengasingkan lima penyedut minuman tersebut bagi mewakilkan ayat tersebut. Beliau, seterusnya mengeluarkan lima penyedut yang membentuk satu himpunan daripada baki penyedut minuman yang tinggal sehingga semua penyedut minuman dikeluarkan. Aimi juga berpendapat, 20 ÷ 5 adalah sama dengan penolakan berulang 20 − 5 kerana bilangan ‘himpunan lima’

penyedut minuman yang dikeluarkan daripada longgokan asal yang mengandungi dua puluh penyedut minuman, adalah sama dengan jawapan bagi ayat bahagi 20 ÷ 5, iaitu empat.

Selain itu, Aimi menjelaskan bilangan penyedut minuman yang dikeluarkan secara berulang-ulang juga adalah sama dengan pembahagi bagi ayat 20 ÷ 5. Aimi juga berpendapat bahawa apa yang membezakan antara ayat bahagi (20 ÷ 5) dan ayat tolak (20 – 5) adalah simbol dan operasi, iaitu bahagi dan tolak.

Di bahagian pertengahan Petikan PW227, Aimi membentuk cerita berdasarkan ayat 20 ÷ 5. Dalam cerita tersebut, dua puluh batang pembaris dibahagi kepada empat orang supaya setiap orang dalam cerita itu mendapat lima batang pembaris. Beliau menjelaskan lagi cerita tersebut dengan menggunakan penyedut minuman dan butang. Aimi meletakkan empat butang, sebagai ‘kawan’ dan menyusun lima penyedut minuman sebagai ‘pembaris’ bagi setiap butang. Beliau menjelaskan bahawa seorang ‘kawan’ mendapat lima pembaris berdasarkan ayat bahagi 20 ÷ 5 , di mana angka lima adalah pembahagi.

Seterusnya, bagi ayat 20 ÷ 4 pula, Aimi membentuk cerita tentang Ah Chong yang membahagi dua puluh batang pensel kepada lima orang adik-adiknya. Dalam cerita tersebut, seorang ‘adik’ mendapat empat batang pensel sebab ayat bahagi yang dikemukakan adalah 20 ÷ 4. Aimi juga menggunakan butang sebagai ‘adik Ah Chong’ dan penyedut minuman sebagai ‘pensel’ bagi

menjelaskan lagi cerita beliau. Misalnya, beliau meletakkan lima biji butang dan kemudiannya menyusun empat penyedut minuman bagi setiap butang.

Di bahagian akhir Petikan PW227, Aimi menunjukkan penolakan 20 − 4 secara berulang dengan mengeluarkan empat penyedut minuman secara berulang-ulang sehingga habis daripada himpunan yang mengandungi dua puluh penyedut minuman. Beliau berpendapat bahawa penyusunan beliau bagi ayat bahagi 20 ÷ 4 dan ayat tolak 20 − 4 adalah sama sebab kedua-dua penyusunan tersebut mempunyai bilangan kumpulan yang sama, iaitu lima. Beliau juga menjelaskan bahawa bilangan penyedut minuman dalam setiap kumpulan adalah sama bagi kedua-dua operasi bahagi dan tolak.

Aimi berpendapat ayat bahagi 20 ÷ 5 adalah sama dengan ayat tolak, di mana lima ditolak secara berulang-ulang sebanyak empat kali daripada dua puluh. Menurut beliau lagi, ayat 20 ÷ 4 pula adalah sama dengan ayat tolak sebab empat ditolak secara berulang-ulang sebanyak lima kali daripada dua puluh.

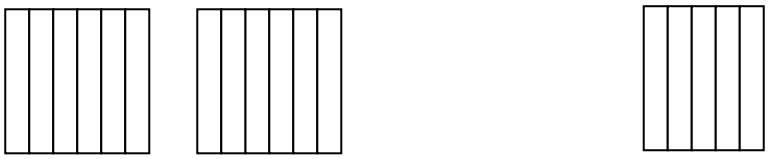
Pembahagian Yang Mempunyai Baki

Aimi mewakilkan pembahagian 17 ÷ 6 dengan mengeluarkan enam penyedut minuman sebanyak dua kali daripada tujuh belas penyedut minuman yang telah dihitungkan. Beliau juga melakukan penolakan secara berulang dengan mengeluarkan tiga penyedut

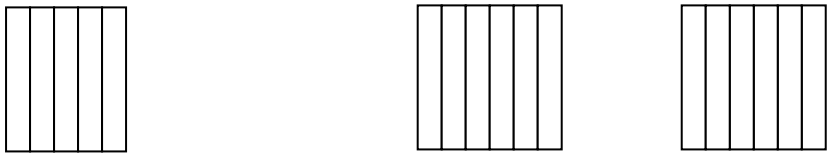
minuman setiap kali dari kumpulan yang mengandungi tujuh belas penyedut minuman bagi menunjukkan ayat bahagi 17 ÷ 3. Petikan PW228 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan PW228

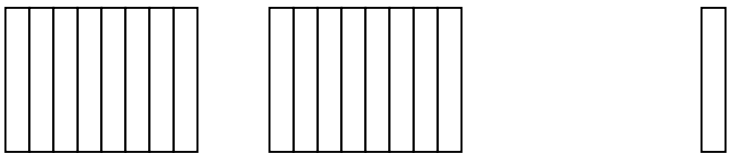
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6) Boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Tujuh belas bahagi enam.
P: Boleh tunjuk dengan penyedut minuman macam tadi?
S: (Subjek menyusun seperti berikut dan memberi jawapan). Tak cukup.



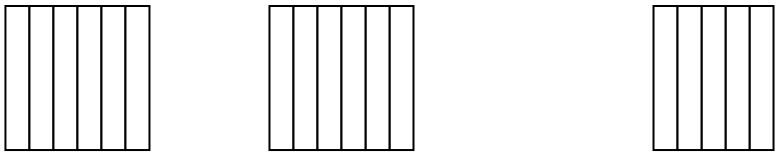
P: Apa yang tak cukup?
S: Kurang satu.
P: Jadi apa jawapan bagi 17 ÷ 6 ?
S: Dua
P: Macam mana Aimi dapat dua?
S: Sebab kumpulan ada dua.
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan lima penyedut yang diasingkan)?
S: Yang tu tak cukup.
P: Kalau tak cukup tak boleh kira?
S: Boleh kena sebut baki.
P: Sebut baki macam mana?
S: Dua dan baki lima.
P: Boleh Aimi tunjuk cara tadi secara penolakan? (Menunjukkan ayat 17 - 6). Gunakan penyedut minuman yang lain.
S: Tujuh belas tolak enam. (Subjek menghitung tujuh belas penyedut minuman dan mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang dan mengumpulkannya secara berasingan)



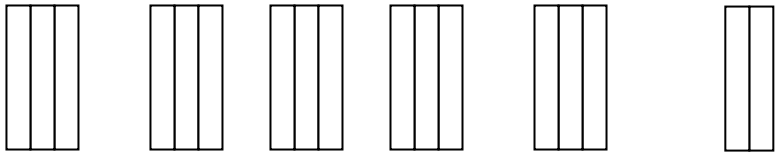
P: Apa yang Aimi dapat?
S: Tak cukup satu.
P: Berapa kali Aimi dapat keluarkan enam?
S: Dua
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan longgokan yang mempunyai lima penyedut minuman)?
S: Tak cukup enam. Ada lima saja.
P: Cuba bandingkan dengan longgokan tadi. Sama tak?
S: (Subjek mendapati kedua-dua longgokan sama) Sama.
P: Apa yang sama dalam kedua-dua susunan?
S: Ada dua kumpulan enam penyedut minuman
P: Yang ini (menunjukkan longgokan yang mempunyai lima penyedut minuman)?
S: …Satu kumpulan lima penyedut minuman.
P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh belas bahagi enam?
S: Cara cerita?
P: Ok, cara cerita.
S: Ada tujuh belas biji limau bahagi kepada dua orang. (Subjek bercerita sambil menyusun penyedut minuman)



P: Seorang dapat berapa?
S: Lapan
P: Yang ini (menunjukkan satu penyedut yang diasingkan)?
S: Yang tu baki.
P: Baik yang Aimi susun ni untuk tujuh belas bahagi enam ke?
S: Bahagi lapan.
P: Tadi cikgu suruh buat cerita untuk yang ini kan (menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6)?
S: Nak buat cerita?
P: Boleh buat cerita macam tadi?
S: Saya ada tujuh belas limau nak bahagi kepada …dua orang kawan. Seorang mendapat enam. (Subjek bercerita sambil memenyusun menyedut minuman seperti berikut):

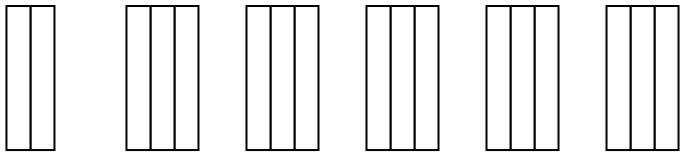


P: Seorang mendapat berapa?
S: Enam.
P: Yang ini (menunjukkan lima penyedut yang diasingkan)?
S: Simpan.
P: Tak boleh bahagi lagi ke?
S: Tak boleh. Sebab seorang kena dapat enam.
P: Kenapa enam?
S: Sebab ayat tu bahagi enam.
P: Sekarang boleh tunjuk bagi ayat ini (menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 3)?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Boleh beritahu apa yang Aimi buat?
S: Tujuh belas bahagi tiga.
P: Ada berapa dalam satu kumpulan?
S: Tiga
P: Kenapa tiga?
S: Sebab bahagi tiga.
P: Dapat berapa kumpulan?
S: Lima.
P: Yang ini (menunjukkan dua penyedut yang diasingkan)?
S: Baki dua.
P: Boleh Aimi tunjuk cara penolakan macam tadi (menunjukkan ayat 17 − 3)?
S: Tujuh belas tolak tiga?
P: Kalau tujuh belas tolak tiga sama macam tadi. Tujuh belas perlu tolak berapa?
S: Enam.
P: Aimi jangan lupa cuma ada tujuh belas sahaja. Cukup ke nak tolak enam kali?
S: Lima
P: Kenapa bukan enam?
S: Kalau tolak tiga dapat tolak lima kali saja. Kalau lapan belas penyedut minuman boleh tolak enam kali.
P: Boleh Aimi tunjuk?

S: (Subjek mengeluarkan tiga-tiga dalam lima kumpulan dan meninggalkan dua pada kedudukan asal) Lima kali.



P: Yang ini (menunjukkan dua penyedut yang tinggal)?
S: Tak cukup.
P: Tak cukup berapa lagi?
S: Satu lagi.
P: Kalau tujuh belas bahagi tiga?
S: (Subjek mengumpulkan tiga-tiga dalam lima longgokan dan dua dalam satu longgokan) Lima
P: Yang ini (menunjukkan dua penyedut)
S: Tak cukup tiga.
P: Aimi rasa tujuh belas bahagi tiga dengan tujuh belas tolak tiga secara berturut-turut sama tak?
S: Sama.
P: Kenapa?
S: Jawapan sama.
P: Jawapan yang mana?
S: Lima baki dua
P: Tapi cara buat tak sama?
S: Cara tak sama, jawapan sama

Di bahagian awal Petikan PW228, Aimi menunjukkan pembahagian 17 ÷ 6 dengan membentuk dua kumpulan yang mempunyai enam penyedut minuman dalam setiap kumpulan dan satu kumpulan lagi yang mempunyai lima penyedut minuman. Beliau menjelaskan bahawa enam penyedut minuman disusun dalam satu kumpulan kerana pembahagi dalam ayat 17 ÷ 6 adalah enam. Menurut beliau lagi, jawapan bagi pembahagian tersebut adalah dua baki lima. Aimi menjelaskan bahawa jawapan bagi ayat bahagi 17 ÷ 6 dapat diperolehi dengan mengira bilangan kumpulan yang telah dibentuk. Aimi juga berpendapat kumpulan yang mempunyai

lima penyedut minuman itu tidak boleh dikira sebagai satu kumpulan kerana bilangan penyedut minuman di dalamnya kekurangan satu.

Bagi ayat 17 − 6 pula, Aimi menghitung tujuh belas penyedut minuman dan kemudiannya mengasingkan enam penyedut minuman bagi mewakilkan ayat tersebut. Seterusnya, beliau mengeluarkan enam lagi daripada baki penyedut minuman, iaitu sebelas batang, meninggalkan lima penyedut minuman sebagai baki. Aimi berpendapat, ayat 17 ÷ 6 adalah sama dengan penolakan berulang 17 − 6 kerana bilangan kumpulan yang mempunyai enam penyedut minuman, yang dikeluarkan daripada himpunan asal yang mengandungi tujuh belas penyedut minuman, adalah sama dengan jawapan bagi ayat bahagi 17 ÷ 6, iaitu dua baki lima. Aimi menjelaskan bilangan penyedut minuman yang dikeluarkan secara berulang-ulang juga adalah sama dengan pembahagi yang terdapat pada ayat 17 ÷ 6.

Di bahagian pertengahan Petikan PW228, Aimi membentuk cerita berdasarkan ayat 17 ÷ 6. Dalam cerita tersebut, tujuh belas biji limau dibahagi kepada dua orang. Pada mulanya, Aimi membentuk dua kumpulan dengan mengumpulkan lapan penyedut minuman dalam satu kumpulan dan meninggalkan satu penyedut minuman sebagai baki. Subjek juga menjelaskan bahawa penyusunan itu adalah bagi ayat 17 ÷ 8 kerana lapan penyedut minuman dikumpulkan dalam satu kumpulan. Beliau kemudiannya mengulang cerita yang beliau ceritakan itu sambil membentuk dua kumpulan yang

mempunyai enam penyedut minuman dan satu kumpulan yang mempunyai lima penyedut minuman. Menurut beliau, kedua-dua orang dalam cerita beliau itu akan mendapat enam biji limau seorang kerana pembahagi bagi ayat 17 ÷ 6 adalah enam.

Seterusnya, bagi ayat 17 ÷ 3 pula, Aimi membentuk lima kumpulan yang mempunyai tiga penyedut minuman dalam setiap kumpulan. Selain itu beliau juga mengasingkan satu kumpulan yang mempunyai dua penyedut minuman. Menurut Aimi, sekiranya kumpulan yang diasingkan itu mempunyai satu lagi penyedut minuman, ia boleh dikira sebagai satu kumpulan dan jawapan bagi ayat bahagi tersebut akan menjadi enam.

Di bahagian akhir Petikan PW228, Aimi menunjukkan penolakan 17 − 3 secara berulang dengan mengeluarkan tiga penyedut minuman secara berturut-turut daripada himpunan yang mengandungi tujuh belas penyedut minuman. Penolakan berulang tersebut meninggalkan dua penyebut minuman sebagai baki. Beliau berpendapat bahawa penyusunan yang beliau tunjukkan bagi ayat bahagi 17 ÷ 3 dan ayat tolak 17 − 3 adalah sama sebab kedua-dua penyusunan tersebut mempunyai lima kumpulan yang mempunyai tiga penyedut minuman dan satu kumpulan yang mempunyai dua penyedut minuman. Beliau juga menjelaskan bahawa bilangan penyedut minuman dalam lima kumpulan adalah sama bagi kedua-dua operasi bahagi dan tolak, iaitu tiga. Aimi seterusnya menjelaskan bahawa bilangan baki yang diperolehi bagi ayat bahagi 17 ÷ 3 adalah sama

dengan bilangan baki yang terdapat apabila tiga penyedut minuman ditolak secara berulang-ulang dariapada himpunan asal. Beliau juga berpendapat, walaupun operasi yang dilakukan, iaitu bahagi dan tolak adalah berbeza, namun kedua-dua operasi memberikan jawapan yang sama.

Masalah Berkotak

Menentukan Nama Kotak.

Aimi berpendapat bahawa 'kotak ajaib' dapat membahagi nombor-nombor yang dimasukkan ke dalamnya dan memberikan jawapan. Beliau juga menunjukkan apa yang berlaku di dalam kotak ajaib secara lukisan. Tingkah laku yang tunjukkan oleh Aimi dipaparkan dalam Petikan MK231 berikut.

Petikan MK231

P: (Menunjukkan satu kotak). Kotak ini apabila kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A) satu nombor akan keluar melalui lubang ni (menunjukkan lubang B). Dua nombor masuk di sini (menunjukkan lubang A), kotak ni proses kemudian jawapannya akan keluar di sini. (menunjukkan lubang B) Sekarang kita masukkan dua nombor ya. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 14)?

S: Empat belas.

P: Kita masukkan nombor tadi di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A). Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 2)?

S: Dua.

P: Baik. Nombor ni pun kita masukkan di sini (memasukkan nombor tersebut di A). Boleh ingat tak kedua-dua nombor tadi?

S: Empat belas dengan dua.

P: Baik. Kita tengok nombor apa yang akan keluar dari sini. Ini nombor apa (Menunjukkan kad yang tertulis 7)?

S: Tujuh.

P: Apa kotak ini dah buat kepada empat belas dengan dua tadi, sehingga menghasilkan nombor tujuh. Empat belas dengan dua menghasilkan tujuh.

S: (Subjek tidak menjawab).

P: Kita cuba satu lagi. (Menunjukkan kad yang tertulis 10). Ini nombor apa?

S: Sepuluh.
P: Kita masukkan nombor sepuluh di lubang ni. (Memasukkan kad tersebut di lubang A.) Nombor apa ni (menunjukkan kad yang tertulis 5)?
S: Lima.
P: Baik. Kita masukkan dalam lubang ni macam tadi (memasukkan kad tersebut ke dalam lubang A). Nombor apa yang keluar dari sini (menunjukkan kad yang keluar dari lubang B).
S: Dua.
P: Nombor yang masuk sepuluh dan lima, nombor yang keluar dua. Tadi nombor yang masuk empat belas dan dua, nombor yang keluar tujuh. Apa agaknya kotak ini dah buat kepada nombor-nombor tadi?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Kotak ni buat apa kepada sepuluh dan lima hingga dapat jawapan dua? Tadi empat belas dengan dua dapat jawapan tujuh?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Kita cuba satu lagi. Ini apa (menunjukkan nombor 4)?
S: Empat.
P: Ini (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Nombor yang keluar (menunjukkan nombor 2).
S: Dua
P: Apa kotak ni dah buat kepada empat dan dua hingga dapat jawapan dua?
S: Tolak.
P: Kalau tolak, tadi kita masukkan empat belas dan dua dapat tujuh. Empat belas tolak dua dapat tujuh ke?
S: Tak
P: Tadi kita masukkan sepuluh dengan lima, jawapannya dua. Kalau sepuluh tolak lima berapa?
S: Lima.
P: Jadi apa agaknya kotak ni dah buat?
S: Bahagi.
P: Bahagi? Kenapa bahagi?
S: Sebab sepuluh kalau bahagi dengan lima sama dengan dua.
P: Kenapa tidak darab?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab kalau darab jawapan dia bukan dua.
P: Tadi empat belas dengan dua dapat tujuh. Apa kotak dah buat?
S: Bahagi. Empat belas bahagi dua dapat tujuh.
P: Yang ini tadi empat dengan dua dapat dua?
S: Tolak.

P: Tapi kita guna kotak yang sama. Kalau tolak yang tadi (menunjukkan set empat belas dan sepuluh) pun kena tolak juga.
S: Bahagi
P: Bahagi?
S: Ya
P: Bukan tolak?
S: Bukan. Empat bahagi dua, dua.
P: Kita cuba satu set lagi. Ini apa (menunjukkan 8)?
S: Lapan.
P: Ini (menunjukkan 4)?
S: Empat.
P: Jawapannya (menunjukkan 2)?
S: Dua.
P: Jadi apa kotak ni dah buat?
S: Bahagi.
P: Bukan tolak ya?
S: Bukan.
P: Baik sekarang boleh tak Aimi tunjuk apa kotak dah buat kepada nombor-nombor sepuluh dan lima hingga dapat nombor dua?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut):

P: Apa ni?
S: Guli
P: Boleh Aimi terangkan apa yang Aimi lukis ni?
S: Ini sepuluh (menunjukkan keseluruhan bulatan) ini bahagi lima (menunjukkan satu longgokan).
P: Yang keluar dari lubang B tadi tu?
S: Dua. Ini ada dua kumpulan (subjek menunjukkan dua longgokan yang dilukisnya).
P: Agaknya ada tak cara lain sepuluh boleh dibahagi lima oleh kotak ni?
S: (Subjek diam sebentar). Tak ada.
P: Tak ada cara lain?
S: Tak ada.
P: Boleh Aimi tuliskan ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak tu?
S: (Subjek menulis ayat berikut) Macam ni?

$$10 \div 5 = 2$$

P: Boleh terangkan apa yang Aimi tulis ni?
S: Sepuluh bahagi lima sama dengan dua.

P: Kenapa Aimi lukiskan seperti ini (menunjukkan kumpulan lima limau)?
S: Sebab sepuluh bahagi dengan lima.
P: Angka ni merujuk pada bahagian mana pada gambar Aimi tu (menunjukkan angka 10)?
S: Semua.
P: Yang ini (menunjukkan 5)?
S: Lima ni (menunjukkan lima biji bola yang dilukiskan rapat-rapat).
P: Jawapannya (menunjukkan 2)?
S: (Subjek menunjukkan dua kumpulan bola). Yang ni.
P: Ada tak cara lain kotak ni boleh bahagi sepuluh sehingga dapat jawapan dua?
S: Tak ada.

Pada awal Petikan MK231, Aimi berpendapat bahawa operasi yang dilakukan oleh 'kotak ajaib' adalah operasi tolak. Namun, beliau menukar pandangan beliau itu apabila diminta untuk menjelaskan tentang empat belas dan dua yang menghasilkan jawapan tujuh. Seterusnya, Aimi berpendapat bahawa operasi yang berlaku di dalam kotak tersebut adalah operasi bahagi. Beliau menjelaskan bahawa sepuluh bahagi lima akan menghasilkan jawapan dua. Beliau juga menjelaskan bahawa sekiranya operasi darab yang berlaku di dalam kotak jawapan yang harus diperoleh adalah bukan dua.

Aimi juga berpendapat empat belas dibahagi dua akan menghasilkan tujuh. Beliau juga menjelaskan walaupun, empat tolak dua akan menghasilkan dua, namun operasi yang berlaku adalah bahagi. Menurut beliau lagi empat bahagi dua menghasilkan dua. Beliau mengesahkan jawapan beliau apabila nombor lapan dan empat dimasukkan dan sebelum jawapan keluar, Aimi dapat meneka nombor dua yang akan keluar.

Selain itu, Aimi menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak bagi 10 ÷ 5 secara lukisan. Beliau melukis dua kumpulan yang mengandungi lima guli di dalamnya. Beliau menjelaskan bahawa kesemua guli tersebut adalah sama dengan sepuluh, lima guli yang dihimpunkan dalam satu kumpulan adalah sama dengan angka 5 dan bilangan kumpulan yang dapat dibentuk adalah sama dengan jawapan yang keluar melalui lubang B. Aimi juga menulis persamaan bahagi, iaitu 10 ÷ 5 = 2 bagi gambar rajah yang dilukisnya. Beliau juga menjelaskan bahawa lima pada persamaan 10 ÷ 5 = 2 merujuk lima guli dalam satu kumpulan.

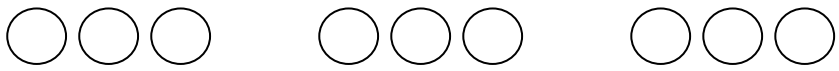
Menentukan Hasil Bahagi

Aimi menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Beliau juga menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Tingkah beliau dipaparkan melalui Petikan MK232 berikut.

Petikan MK232

P: Tadi Aimi sebut kotak ni boleh bahagi. Jadi nama kotak ni bahagi Sekarang kita akan masukkan nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis 9). Nombor berapa ni?
S: Sembilan.
P: Macam tadi kita masukkan dalam ni (memasukkan kad tersebut ke dalam kotak). Yang ini nombor apa? (menunjukkan kad yang tertulis tiga)?
S: Tiga.

P: Kita masukkan juga nombor ni. Nombor apa agaknya yang akan keluar dari kotak ni?
S: Tiga.
P: Kenapa kata tiga.
S: Sebab sembilan bahagi tiga sama dengan tiga.
P: Boleh Aimi tunjuk apa yang kotak tu buat kepada sembilan dan tiga hingga dapat jawapan?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Boleh Aimi terangkan?
S: Sembilan bahagi tiga sama dengan tiga (Subjek menunjukkan lukisannya semasa menjawab).
P: Kenapa lukiskan tiga-tiga?
S: Sebab sembilan bahagi dengan tiga.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \div 3 = 3$$

P: Angka sembilan ni merujuk kepada bahagian mana dalam lukisan?
S: Semua buah.
P: Yang ni (menunjukkan 3)?
S: Tiga ni (menunjukkan tiga biji buah).
P: Jawapannya?
S: Semua bulatan (subjek menunjukkan bahagian yang telah dibulatkan)
P: Selain cara tadi ada tak cara lain kotak tu bahagi sembilan sehingga
nombor keluar nombor keluar?
S: (subjek diam sebentar). Tak ada.
P: Sekarang kita cuba dengan satu lagi nombor. Ini apa (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan 1)?
S: Satu.
P: Apa agaknya yang akan keluar dari lubang ini (menunjukkan lubang B)?
S: Dua.
P: Macam mana tahu dua?
S: Dua bahagi satu sama dengan dua. (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut):

P: Baik. Kalau dua tadi kita gantikan dengan dua puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua puluh.
P: Kenapa dua puluh?
S: Dua puluh bahagi satu jawapannya dua puluh.
P: Kalau kita ganti dengan dua ratus?
S: Jawapannya dua ratus.
P: Kenapa dua ratus?
S: Dua ratus bahagi satu dua ratus.
P: Kalau nombor ini (menunjukkan nombor 4)
S: Empat
P: Dan nombor ini (menunjukkan 2)
S: Dua
P: Kita masukkan di sini (menunjukkan lubang A) nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua. (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut):

P: Kalau kita gantikan empat dengan empat puluh, apa nombor yang akan keluar?
S: (Subjek senyap sambil menulis ayat berikut)

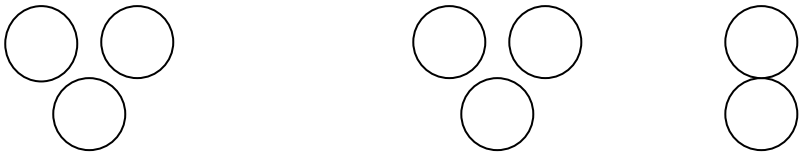
$$40 \div 2 = 20$$

P: Apa yang Aimi tulis?
S: Empat puluh bahagi dua.
P: Dapat berapa?
S: Dua puluh.
P: Mana tahu dua puluh?
S: Empat puluh bahagi dua sama dua puluh.
P: Kenapa tidak dua ke?
S: Mana boleh. Empat bahagi dua dapat dua.
P: Kalau empat puluh bahagi dua bukan empat puluh ke?
S: Tak boleh. Empat puluh bahagi dua dua puluh.
P: Kalau empat empat diganti dengan empat ratus?
S: Dua ratus
P: Kenapa Aimi berkata demikian?
S: Empat ratus bahagi dua sama dua ratus.
P: Bukan dua puluh?
S: Dua puluh kalau empat puluh bahagi dua.

P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menuliskan ayat berikut):

$$400 \div 2 = 200$$

P: Baik sekarang kita masukkan nombor ini (menunjukkan 8)?
S: Lapan.
P: Dan nombor ini (menunjukkan 3)?
S: Tiga.
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: (Subjek melukis seperti berikut dan memberi jawapan) Tak ada.



P: Kenapa tak ada?
S: Tak cukup.
P: Apa yang tak cukup?
S: Satu lagi.
P: Jadi nombor apa yang akan keluar?
S: Tak ada

Dalam Petikan MK232 Aimi menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B dengan menggunakan kaedah operasi bahagi. Bagi nombor sembilan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak Aimi memberikan jawapannya sebagai tiga dengan menggunakan pembahagian sembilan bahagi tiga. Beliau juga menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak, iaitu bagaimana $9 \div 3 = 3$ secara lukisan. Dalam lukisan tersebut, Aimi mengumpulkan tiga biji bola dalam tiga himpunan menjumlahkan sembilan biji bola. Aimi menjelaskan bahawa tiga biji bola dihimpunkan dalam satu kumpulan kerana operasi yang terlibat adalah bahagi tiga.

Seterusnya, Aimi menulis ayat bahagi, 9 ÷ 3 = 3. Beliau juga menjelaskan nombor sembilan pada persamaan bahagi merujuk kesemua bola dalam lukisannya. Menurut beliau, angka tiga dibahagian pembahagi pula merujuk tiga biji bola dalam satu kumpulan, manakala tiga di bahagian hasil bahagi merujuk tiga kumpulan yang dibentuk.

Aimi berpendapat nombor yang bakal keluar melalui lubang B apabila nombor dua dan satu dimasukkan melalui lubang A adalah dua. Menurut beliau jawapan tersebut beliau perolehi dengan membahagi dua dengan satu. Beliau juga melukiskan gambar rajah dua bulatan yang dilukiskan agak berjauhan antara satu sama lain. Aimi menjelaskan lukisan beliau menggambarkan dua kumpulan yang mempunyai sebiji bola di dalamnya. Beliau menerangkan sebiji bola merujuk pembahagi yang bernilai satu. Dua kumpulan pula merujuk nombor yang keluar melalui lubang B.

Aimi berpendapat sekiranya nombor dua pada ayat bahagi 2 ÷ 1 diganti dengan nombor dua puluh, nombor yang bakal keluar juga adalah dua puluh. Beliau juga menjelaskan bahawa sekiranya nombor dua diganti dengan nombor dua ratus, maka nombor yang bakal keluar melalui lubang B adalah dua ratus. Bagi ayat bahagi 4 ÷ 2 pula, beliau menurut Aimi apabila nombor empat diganti dengan empat puluh nombor yang akan keluar adalah dua puluh. Selain itu, Aimi juga menjelaskan bahawa apabila nombor empat diganti dengan empat ratus jawapannya adalah dua ratus.

Aimi juga menulis persamaan bahagi bagi empat puluh bahagi dua, iaitu 40 ÷ 2 = 20. Selain itu, Aimi juga menulis persamaan bahagi untuk empat ratus bahagi dengan dua, iaitu 400 ÷ 2 = 200. Beliau juga melukis gambar rajah bagi menjelaskan lagi persamaan 4 ÷ 2 = 2. Dalam gambar rajah tersebut, terdapat dua kumpulan yang mempunyai dua biji bola di dalamnya.

Bagi nombor lapan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak (8 ÷ 3) pula, Aimi berpendapat bahawa tidak akan ada sebarang nombor yang keluar. Menurut beliau ini adalah kerana nombor lapan tidak mencukupi untuk dibahagi dengan tiga. Aimi juga melukis gambar rajah yang menunjukkan dua kelompok yang mengandungi tiga biji bola di dalamnya dan terdapat dua bola lagi yang diasingkan.

Tafsiran Ayat Matematik

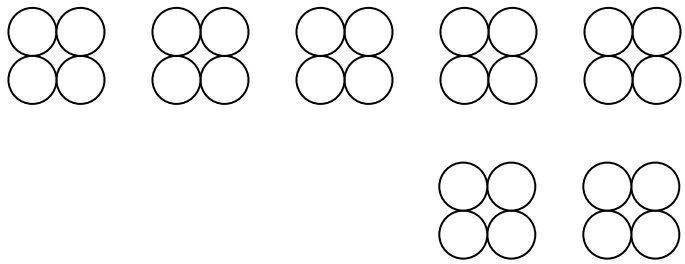
Tafsiran Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Aimi mentafsirkan ayat bahagi 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan yang mempunyai empat bola di dalamnya. Beliau juga menulis persamaan 4 x 7 = 28 bagi mewakili persaman 28 ÷ 4 = 7. Aimi juga membentuk cerita bagi menjelaskan lagi ayat 28 ÷ 4. Tingkah laku yang ditunjukkan oleh beliau dipaparkan dalam Petikan TA241.

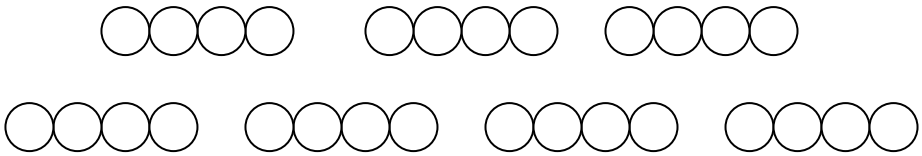
Petikan TA241

P: Boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Boleh Aimi terangkan macam mana dua puluh lapan bahagi empat.
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada kertas):



P: Boleh jelaskan apa yang Aimi lukis?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Kenapa kumpulkan empat-empat?
S: Sebab bahagi empat.

P: Kalau bahagi dua?
S: Nak lukis ke?
P: Boleh jawab tanpa lukis? Kalau bahagi dua perlu ada berapa dalam satu kumpulan.
S: Dua.
P: Bahagi lapan?
S: Lapan.
P: Baik, dua puluh lapan bahagi empat sama dengan berapa?
S: (Subjek menghitung bilangan kumpulan dan menjawab). Tujuh.
P: Macam mana dapat tujuh?
S: (Subjek menunjukkan bulatan yang dikumpulkan dalam kumpulan empat). Ada tujuh kumpulan.
P: Dua puluh lapan ni rujuk pada bahagian mana dalam gambar Adila?
S: Semua (subjek menunjukkan semua bulatan dalam lukisannya).
P: Empat?
S: (Subjek menunjukkan empat bola yang dikumpulkan sekali) Ini.
P: Tujuh?
S: (Subjek menunjukkan kumpulan empat bola dalam gambarnya) Ini.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat.
S: (Subjek melukis seperti berikut)



P: Boleh Aimi jelaskan?
S: (Subjek menunjukkan lukisannya) Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Empat.
P: Kenapa empat?
S: Sebab kena bahagi empat.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Tujuh.
P: Lukisan ini dengan lukisan tadi sama tak?
S: Lain sikit.
P: Lain macam mana?
S: Susunan dia. Yang ni panjang (menunjukkan lukisan terbarunya), yang ni macam ni (menunjukkan lukisan awalnya)

P: Susunan tak sama, bilangan dalam satu kumpulan sama tak?
S: Sama.
P: Kumpulan macam mana? Sama tak?
S: Kumpulan ada tujuh. Sama.
P: Boleh Aimi buat cerita tentang dua puluh lapan bahagi empat?
S: Saya ada dua puluh lapan biji gula-gula. Nak bagi kawan. Seorang dapat empat.
P: Kawan berapa orang?
S: (Subjek merujuk gambar rajah yang dilukisnya dan menjawab). Tujuh.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Boleh Aimi tulis ayat darab daripada ayat bahagi ini (menunjukkan 28 ÷ 4).
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$28 \times 4 = 7$$

P: Kenapa Aimi tulis seperti itu?
S: Ayat bahagi tukar ke ayat darab.
P: Cuba tengok semula ayat tu dua puluh lapan kalau darab empat dapat ke tujuh?
S: (Subjek diam)
P: Boleh tunjuk dua puluh lapan darab empat.
S: (Subjek menulis semula seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Yang mana satu yang ini atau yang tadi?
S: Ini (Subjek menunjukkan ayat darab yang baru ditulis)
P: Bagaimana dengan yang tadi?
S: Salah.
P: Boleh Aimi jelaskan menggunakan gambar rajah tadi bagaimana Adila dapat ini (menunjukkan 4 x 7 = 28) daripada ayat bahagi ini (menunjukkan 28 ÷ 4)?
S: (Subjek berdiam diri)
P: Empat dalam 4 x 7 = 28 rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: (Subjek menunjukkan empat bulatan dalam satu kumpulan)
P: Yang ini (menunjukkan 7 pada ayat 4 x 7 = 28)
S: (Subjek menunjukkan tujuh kumpulan yang terdapat pada gambar rajah).
P: Yang ini (menunjukkan 28 pada ayat darab)?
S: Semua.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$5 \times 28 = 7$$

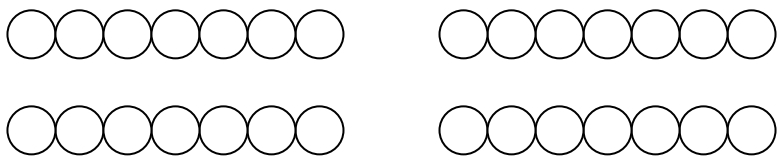
P: Boleh Aimi terangkan macam mana dapat ayat darab tu?
S: Salah. (Subjek memadam ayat tadi dan menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Ayat tu sama dengan tadi kan? Cara lain?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \times 4 = 28$$

P: Ayat ini sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Nombor dia lain.
P: Nombor yang mana?
S: Yang ni empat (menunjukkan 4 pada $4 \times 7 = 28$) yang ini tujuh (menunjukkan 7 pada $7 \times 4 = 28$)
P: Jawapan dia sama tak?
S: Sama.
P: Baik. Sekarang boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis $28 \div 7$)?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Boleh Aimi beritahu macam mana dua puluh lapan bahagi tujuh?
S: Lukis ke?
P: Boleh lukis.
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh terangkan tentang lukisan Aimi?
S: Bahagi tujuh. Ada tujuh bola (menunjukkan satu kumpulan yang mempunyai tujuh bola)
P: Lukisan ni sama tak dengan kedua-dua lukisan Aimi tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab tadi ada empat bola (menunjukkan kedua-dua lukisan tadi) yang ini ada tujuh (menunjukkan lukisan yang baru di buat)
P: Apa lagi yang beza?
S: Kumpulan. Tadi ada tujuh, yang ni empat.

P: Ada lagi yang beza?
S: Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Tak ada.
P: Tak ada yang sama?
S: Tak ada.
P: Ada berapa bola semua?
S: (Subjek menghitung kesemua bola dan menjawab) Dua puluh lapan.
P: Dalam lukisan tadi?
S: Sama. Dua puluh lapan.
P: Ada cara lain nak terangkan tentang 28 ÷ 7?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat darab bagi ayat bahagi ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$28 \times 7$$

P: Boleh tulis dengan lengkap, sama dengan berapa?
S: (Subjek memadam ayat tadi dan menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Boleh terangkan macam mana Aimi dapat ayat darab tu daripada ayat dua puluh lapan bahagi tujuh?
S: (Subjek diam)
P: Ataupun boleh Aimi terangkan gunakan gambar rajah yang Aimi lukis tadi.
S: Satu kumpulan ada tujuh bola, kumpulan ada empat. Semua ada dua puluh lapan bola (Subjek menunjukkan gambar rajah yang telah dilukisnya).
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat yang Aimi tulis tadi (menunjukkan ayat 7 x 4 = 28)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Nombor tujuh dengan empat. Tapi jawapan dia sama, dua puluh lapan.
P: Kenapa agaknya jawapan masih sama, walaupun nombor-nombor yang didarab tak sama?
S: Sebab empat kali tujuh sama dengan dua puluh lapan, tujuh kali empat pun dua puluh lapan.
P: Jadi, kedua-dua ayat tu sama ke?

S: Ayat tak sama, tapi jawapan sama.

Dalam Petikan TA241, Aimi mentafsirkan ayat 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan dan setiap kumpulan itu mempunyai empat bola. Beliau juga menjelaskan bahawa setiap kumpulan dalam lukisannya mempunyai empat bola kerana pembahagi pada ayat 28 ÷ 4 adalah empat. Beliau juga berpendapat bahawa sekiranya pembahagi dalam ayat bahagi adalah dua, maka bilangan bola yang perlu dilukis dalam satu kumpulan adalah dua.

Aimi melukis satu lagi gambar rajah yang juga mempunyai empat bola dalam satu kumpulan. Menurut beliau, gambar rajah tersebut berbeza berbanding dengan gambar rajah pertama beliau kerana susunan bolanya berbeza. Namun, Aimi berpendapat bilangan kumpulan dan saiz setiap kumpulan bagi kedua-dua gambar rajah adalah sama.

Aimi juga membentuk cerita bagi mentafsir makna 28 ÷ 4. Dalam cerita tersebut, Aimi membahagikan dua puluh lapan biji gula-gula kepada tujuh orang kawan-kawannya agar setiap kawan mendapat empat biji gula-gula.

Selain itu, Aimi menulis persamaan darab merujuk ayat bahagi yang diberi. Pada mulanya, beliau menulis 28 x 4 = 7 sebagai persamaan darab bagi ayat bahagi 28 ÷ 4. Setelah diminta menjelaskan tentang persamaan tersebut, Aimi membetulkan persamaan yang telah ditulis dengan menulis 4 x 7 = 28. Beliau juga

menulis satu lagi persamaan bagi ayat bahagi 28 ÷ 4, iaitu 7 x 4 = 28. Aimi juga menjelaskan bahawa kedua-dua persamaan darab yang ditulisnya adalah berbeza kerana pendarab pertama dan kedua bagi kedua-dua persamaan adalah berbeza. Namun, Aimi mendapati jawapan bagi kedua-dua persamaan adalah sama.

Bagi ayat 28 ÷ 7 pula, Aimi melukis empat kumpulan yang mengandungi tujuh biji bola di dalamnya. Beliau juga berpendapat bahawa lukisan tersebut tidak sama dengan lukisan yang beliau lakukan bagi ayat 28 ÷ 4. Menurut Aimi, saiz kumpulan dan bilangan kumpulan adalah berbeza bagi kedua-dua gambar rajah itu.

Selain itu, Aimi menulis dua ayat darab bagi ayat bahagi 28 ÷ 7. Persamaan-persamaan tersebut adalah 4 x 7 = 28 dan 7 x 4 = 28. Pada mulanya, beliau menulis persamaan 28 x 7 = 4 sebagai persamaan darab tetapi beliau membetulkannya apabila diminta menjelaskan tentang ayat tersebut. Aimi berpendapat bahawa kedua-dua persamaan darab yang ditulisnya tidak sama kerana kedua-dua persamaan tersebut mempunyai pendarab yang berbeza, iaitu empat dan tujuh. Selain itu, Aimi menjelaskan bahawa jawapan bagi persamaan 4 x 7 dan 7 x 4 adalah sama kerana kedua-dua ayat darab itu akan menjurus kepada jawapan yang sama, iaitu dua puluh lapan.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

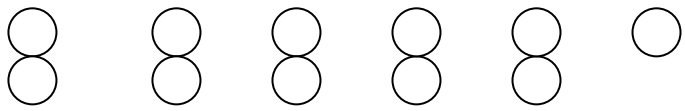
Aimi mentafsirkan ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan yang mengandingi dua bola di dalamnya, dan satu bola lagi dilukiskan berasingan. Beliau juga mentafsirkan ayat 11 ÷ 2 dengan membentuk cerita Petikan TA242 berikut menunjukkan tingkah laku yang beliau tunjukkan.

Petikan TA242

P: Cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 2)?.
S: Sebelas bahagi dua.
P: Macam tadi boleh terangkan tak macam mana sebelas bahagi dua?
S: (Subjek melukis seperti berikut pada kertas):

P: Kenapa Aimi kumpulkan dua-dua macam tu?
S: Sebab bahagi dua.
P: Kalau bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Balik pada ayat ini (menunjukkan ayat 11 ÷ 2). Kenapa yang ini ada satu (menunjukkan bola tunggal) yang lain ada dua?
S: Tak cukup.
P: Tak cukup? Macam tu sebelas bahagi dua dapat berapa?
S: Lima baki satu.
P: Macam mana Aimi dapat lima baki satu?
S: Kira (Subjek menunjukkan kumpulan dua bola)
P: Yang ini (menunjukkan bola yang tunggal) tak kira?
S: Baki satu.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Sama tak dengan tadi?
S: Lain sikit.
P: Lain macam mana?
S: Susunan dia.
P: Macam mana dengan bilangan bola satu kumpulan?
S: Dua.
P: Sama ke tak dengan tadi?
S: Susunan tak sama, bilangan bola sama.
P: Ada cara lain nak terangkan tentang 11 ÷ 2?
S: Tak ada.
P: Boleh Aimi tulis ayat darab bagi yang ini (menunjukkan 11 ÷ 2)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab ada baki.
P: Kalau ada baki tak boleh tulis ayat darab?
S: Susah nak tulis.
P: Kenapa susah?
S: Sebab ada baki.
P: Boleh Aimi buat cerita tentang ayat bahagi tadi?
S: Siti ada sebelas biji kek. Dia nak bagi kepada kawan-kawan dia. Seorang dapat dua kek.
P: Kawan Siti berapa orang?
S: (Subjek menghitung kumpulan bola dalam lukisannya dalam menjawab) Lima.
P: Kalau lima orang, seorang dapat dua baru sepuluh. Semua ada sebelas kan?
S: Satu lagi Siti makan.
P: Siti ambil satulah.
S: (Subjek mengangguk)
P: Ada cara lain nak tunjuk 11 ÷ 2?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh Aimi baca apa yang tertulis di sini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 5)?
S: Sebelas bahagi lima.
P: Boleh Aimi jelaskan macam mana sebelas bahagi lima tu?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Boleh Aimi jelaskan?
S: Sebelas bahagi lima.

P: Kenapa ada lima bola (menunjukkan satu kumpulan)?
S: Sebab bahagi lima.
P: Yang ini kenapa asingkan (menunjukkan satu bola yang dilukis agak jauh)?
S: Yang tu terlebih.
P: Terlebih, boleh diambil kira tak?
S: Tak boleh sebab tak cukup.
P: Tak cukup banyak mana?
S: Lima….empat.
P: Lima atau empat?
S: Empat.
P: Kalau ada empat lagi berapa jawapan dia?
S: (Subjek diam)
P: Kalau ada empat lagi, ada baki tak?
S: Tak ada.
P: Kenapa Aimi kata tak ada baki?
S: (Subjek diam)
P: Jika ada empat lagi berapa jumlah semua?
S: (Subjek melukis lagi empat bola, menghitung secara senyap dan menjawab) Lima belas.

P: Macam mana dapat lima belas?
S: Kira.
P: Baik, kalau lima belas bahagi lima ada baki tak?
S: Tak ada.
P: Kenapa tak ada.
S: Sebab ada lima-lima, tak ada bakilah.

Dalam Petikan TA242, Aimi mentafsir ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan yang mempunyai dua bola dan satu kumpulan yang mempunyai satu bola. Menurut beliau, satu kumpulan mempunyai dua biji bola kerana pembahagi ayat 11 ÷ 2 adalah dua. Beliau juga berpendapat bahawa kumpulan yang mempunyai satu bola diasingkan kerana kumpulan itu tidak mencukupi dua. Bagi ayat

11 ÷ 3 pula, Aimi melukiskan tiga kumpulan yang mempunyai tiga bola dan satu kumpulan yang mempunyai dua bola.

Aimi juga melukis satu lagi gambar rajah yang mempunyai lima kumpulan dua bola dan satu kumpulan satu bola, tetapi susunan bola-bola itu berbeza. Menurut Aimi, walaupun kedua-dua gambar rajah itu mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang sama, kedua-duanya adalah berbeza kerana susunan bola-bola yang dilukisnya adalah berbeza.

Aimi menjelaskan bahawa lima baki satu adalah jawapan bagi ayat bahagi 11 ÷ 2. Beliau berpendapat persamaan darab tidak boleh ditulis bagi ayat 11 ÷ 2 kerana pembahagian tersebut mempunyai baki. Aimi juga membentuk cerita bagi menjelaskan tentang ayat 11 ÷ 2. Dalam cerita beliau, Siti yang mempunyai sebelas biji kek membahagikan kek-kek tersebut kepada lima orang kawan. Setiap kawan dalam cerita beliau mendapat dua biji kek dan Siti memakan sebiji kek.

Bagi ayat 11 ÷ 5 pula, Aimi melukis dua kumpulan yang mempunyai lima bola dan satu kumpulan yang mempunyai satu bola. Beliau menjelaskan bahawa jawapan bagi pembahagian tersebut adalah dua baki satu. Beliau juga berpendapat bahawa sekiranya ada tiga lagi bola, maka bola-bola itu boleh dibahagi lima tanpa sebarang baki.

Ayat Bahagi Membabitkan Sifar, Satu, Dan Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Aimi mentafsirkan ayat $3 \div 0$ dengan melukis tiga biji bola yang disusun rapat-rapat. Beliau menjelaskan bahawa bahagi dengan sifar bermakna 'tidak bahagi'. Aimi juga menjelaskan bahawa sifar yang dibahagi dengan sebarang angka akan menghasilkan jawapan sifar. Petikan TA243 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan TA243

P: Baik cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis $0 \div 3$)?
S: Kosong bahagi tiga
P: Boleh terangkan tak?
S: Kosong.
P: Kenapa kosong?
S: Kosong bahagi apa-apa pun kosong. Kosong mana boleh lukis!
P: Kosong tak boleh bahagi ke?
S: Kosong tak ada apa-apa. Mana boleh bahagi?
P: Kalau yang ini (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 0$)?
S: Tiga bahagi kosong, tigalah.
P: Kenapa Aimi kata tiga?
S: Sebab tiga kalau bahagi kosong, tigalah.
P: Boleh tunjuk, lukis ke?
S: (Subjek melukis gambar berikut):

P: Itu apa boleh terangkan?
S: Tiga bola bahagi kosong, tak bahagilah.
P: Kalau bahagi kosong maksudnya tak bahagi.
S: (Subjek mengangguk)
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 0 = 3$$

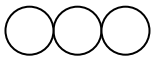
P: Boleh jelaskan?
S: Tiga bahagi kosong sama dengan tiga.
P: Boleh tulis ayat darab bagi ayat bahagi $3 \div 0$?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 0 = 3$$

P: Boleh terangkan?
S: Tiga darab kosong sama dengan tiga.
P: Tiga darab dengan kosong macam mana dapat tiga?
S: Tiga darab kosong, tigalah. Tak darab sama dengan tigalah.
P: Tiga darab kosong maknanya tak darab ke?
S: (Subjek mengangguk)
P: Ada cara lain tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \times 3 = 3$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Lain sikit. Yang ni tiga (menunjukkan ayat $3 \times 0 = 3$) yang ni kosong (menunjukkan $0 \times 3 = 3$)
P: Ada yang sama?
S: Jawapan dia, tiga.
P: Kalau yang ini (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 3$)?
S: (Subjek menjawab sambil melukis yang berikut):

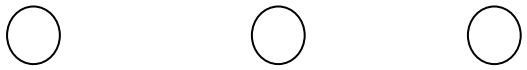


P: Boleh Aimi jelaskan tentang lukisan tu?
S: Tiga bahagi tiga.
P: Kenapa kumpulkann semua sekali?
S: Sebab bahagi tiga.
P: Jawapannya berapa?
S: Satu.
P: Macam mana Aimi dapat satu?
S: Sebab ada satu kumpulan.
P: Boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 3 = 1$$

P: Ada cara lain nak tunjuk ini (menunjukkan $3 \div 3$)?
S: Nak cerita?
P: Baik. Buat cerita.
S: Saya ada tiga batang pembaris. Saya bagi kepada kawan tiga.

P: Berapa orang kawan?
S: Satu.
P: Ada cara lain nak jelaskan tentang 3 ÷ 3?
S: Tak ada.
P: Cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis 3 ÷ 1).
S: Tiga bahagi satu?
P: Berapa?
S: Tiga
P: Boleh terangkan macam mana tiga bahagi satu dapat tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang mana tiga dalam gambar?
S: Semua.
P: Satu?
S: Yang dalam
P: Jawapannya?
S: Tiga (subjek menunjukkan setiap bola)
P: Ada cara lain tak nak terangkan?
S: Cerita?
P: Cerita.
S: Saya ada tiga batang pensel, bagi kepada tiga orang kawan. Seorang dapat satu.
P: Kenapa seorang dapat satu?
S: Sebab bahagi satu, seorang dapat satulah!
P: Ada cara lain nak terangkan?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat darab bagi 3 ÷ 1?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

3 x 1

P: Boleh jelaskan tentang ayat tu?
S: Tiga darab satu.
P: Tiga darab dengan satu sama dengan apa?
S: Tiga. (Subjek menjawab sambil menulis yang berikut):

3 x 1 = 3

P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis 3 x 3, kemudian memadam dan menjawab) Tak ada.
P: Tak ada cara lain nak tunjuk?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA243, Aimi menjelaskan bahawa sifar dibahagi dengan sebarang nombor akan memperoleh jawapan sifar. Beliau menjelaskan jawapan bagi ayat 0 ÷ 3 adalah sifar kerana menurut beliau, sifar bermakna tidak ada apa-apa nilai. Bagi ayat 3 ÷ 0 pula, Aimi berpendapat bahawa jawapannya adalah tiga kerana menurut beliau, bahagi kosong bermakna tidak menjalankan sebarang operasi bahagi. Beliau menjelaskan lagi penerangan beliau dengan melukis tiga bola sebagai penyelesaian bagi ayat tersebut.

Aimi juga mentafsir ayat 3 ÷ 0 dengan menulis ayat darab 3 x 0 = 3. Bagi ayat 0 ÷ 3 pula, Aimi menulis ayat 0 x 3 = 3. Menurut beliau, sifar yang terdapat pada ayat 3 x 0 = 3 dan 0 x 3 = 3 bermakna tidak jalankan operasi darab.

Bagi ayat 3 ÷ 1 pula, Aimi melukis tiga biji bola yang diletakkan secara tidak tersusun. Menurut beliau, bahagi satu bermakna satu kumpulan perlu ada satu bola sahaja. Beliau juga membentuk cerita bagi mentafsir ayat 3 ÷ 1. dalam cerita beliau, tiga batang pensel dibahagi kepada tiga orang kawan supaya seorang mendapat sebatang pensel. Aimi juga menjelaskan bahawa seorang kawan akan mendapat sebatang pensel kerana pembahagi bagi ayat bahagi 3 ÷ 1 adalah satu.

Aimi juga menulis persamaan 3 x 1 = 3 sebagai ayat darab bagi 3 ÷ 1. Beliau juga menulis persamaan 3 x 3 = 1 bagi ayat bahagi 3 ÷ 3. Bagi ayat bahagi 3 ÷ 3 itu, Aimi melukis tiga

biji bola yang disusun rapat-rapat. Menurut beliau lagi, satu kumpulan mempunyai tiga biji bola kerana pembahaginya adalah tiga.

Ayat Darab

Aimi menulis persamaan 8 ÷ 4 = 2 bagi ayat darab 4 x 2. Beliau juga melukis dua kumpulan yang mempunyai empat bola di dalamnya bagi menjelaskan lagi persamaan bahagi 8 ÷ 4 = 2. Petikan TA244 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau semasa temu duga.

Petikan TA244

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 4 x 2) Boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Empat kali dua.
P: Empat darab berapa?
S: Empat darab dua.
P: Baik. Boleh tak Aimi tulis ayat darab secara lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

4 x 2 = 8

P: Boleh Aimi jelaskan?
S: Empat kali dua sama dengan lapan.
P: Cuba buat ayat bahagi daripada ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

4 ÷ 2 = 8

P: Boleh terangkan apa yang Aimi tulis tu?
S: Empat bahagi dua sama dengan lapan.
P: Empat bahagi dua sama dengan lapan ke? Boleh tunjuk?
S: (Subjek menulis semula ayat darab seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Kenapa tulis seperti tu?
S: Sebab empat kali dua lapan, kena tulis lapan bahagi dua.
P: Apa kaitan ayat bahagi yang Aimi tulis ni dengan ayat darab tadi?
S: (Subjek diam)
P: Darab dengan bahagi ada kaitan tak?
S: Ada.
P: Kaitan macam mana?
S: (Subjek diam)
P: Empat pada ayat ni (menunjukkan 4 x 2 = 8) sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: (Subjek menunjukkan nombor 4 pada 8 ÷ 4 = 2).
P: Lapan?
S: (Subjek menunjukkan nombor 8 pada 8 ÷ 4 = 2).
P: Jadi apa kaitan darab dan bahagi?
S: Terbalik.
P: Terbalik macam mana?
S: Bahagi terbalik pada darab.
P: Boleh bagi contoh terbalik macam mana, gunakan ayat tadi.
S: Kalau empat kali dua sama dengan lapan, lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Boleh beritahu apa yang Aimi tulis tu?
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Apa beza dengan ayat tadi.
S: Tadi jawapan dia empat.
P: Yang ini (menunjukkan ayat yang baru ditulis)?
S: Jawapan dia dua.
P: Ada lagi tak perbezaan?
S: Yang ini bahagi empat (menunjukkan ayat 8 ÷ 4 = 2) tadi bahagi dua.
P: Boleh tunjuk dengan lukisan lapan bahagi empat?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut):

P: Boleh Aimi terangkan?
S: Lapan bola bahagi empat. (Subjek menunjukkan lukisannya)
P: Kenapa kumpulkan empat bola?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kalau lapan bahagi dua?

S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Boleh terangkan apa yang Aimi lukis ni?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat
P: Yang mana satu empat dalam lukisan?
S: Ini (Subjek menunjukkan empat kumpulan).
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Tak ada? Satu cara sahaja?
S: (Subjek mengangguk).
P: Cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 2 x 4)?
S: Dua kali empat.
P: Sama dengan berapa?
S: Lapan.
P: Macam tadi, boleh Aimi tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$2 \div 4$$

P: Baca dan jelaskan.
S: Dua bahagi empat.
P: Sama dengan berapa?
S: Salah (Subjek membetulkan ayat yang telah ditulis seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Baca dan jelaskan.
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Kenapa ada lapan?
S: Sebab lapan kalau bahagi empat dapat dua.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: ...Tak ada.
P: Ayat yang ini (menunjukkan $8 \div 4 = 2$) sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat $8 \div 4 = 2$ yang ditulis bagi 4 x 2)?
S: Sama.
P: Kenapa sama? Ayat darab tak sama kan?
S: Darab tak sama, bahagi sama.
P: Kenapa boleh sama?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Baik. Empat ni (menunjukkan 4 pada ayat $8 \div 4 = 2$) sama dengan yang mana pada ayat darab?
S: Ini. (Subjek menunjukkan 4 pada ayat 2 x 4)

P: Dua?
S: Ini (Subjek menunjukkan 2 pada ayat 2 x 4).
P: Lapan?
S: Jawapan dia.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi bagi ayat 2 x 4?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA244, Aimi menulis persamaan 8 ÷ 4 = 2 bagi ayat darab 4 x 2, meskipun pada awalnya beliau menulis 4 ÷ 2 = 8. Beliau juga menjelaskan empat yang terdapat pada ayat 4 x 2 adalah sama dengan 4 yang terdapat pada persamaan 8 ÷ 4 = 2. Aimi juga menjelaskan tentang persamaan angka dua yang terdapat pada 4 x 2 dan 8 ÷ 4 = 2. Selain itu, Aimi menjelaskan bahawa persamaan darab adalah songsangan bagi persamaan bahagi.

Selain itu, Aimi melukis dua kumpulan yang mengandungi empat bola di dalamnya. Beliau menjelaskan setiap kumpulan mempunyai empat bola kerana pembahaginya adalah empat. Menurut beliau, sekiranya pembahaginya adalah dua maka setiap kumpulan perlu mempunyai dua bola. Beliau mengesahkan penerangan beliau dengan melukis empat kumpulan yang mempunyai dua bola. Beliau juga menjelaskan bahawa jawapan bagi lapan bahagi dua adalah empat kerana terdapat empat kumpulan dalam lukisan beliau.

Bagi ayat 2 x 4 pula, pada mulanya Aimi menulis 2 ÷ 4 sebagai ayat bahagi. Tetapi, apabila beliau diminta menjelaskan tentang ayat tersebut, beliau memadam dan menulis persamaan 8 ÷ 4 = 2 . Aimi juga menjelaskan bahawa nombor

lapan diletakkan di sebelah kiri kerana menurut beliau nombor tersebut akan menghasilkan jawapan dua apabila dibahagi dengan empat.

Petikan TA245

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 6 x 4) Boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Enam kali empat.
P: Jawapannya berapa?
S: (Subjek berfikir sebentar dan menjawab) Dua puluh empat.
P: Kenapa Aimi kata dua puluh empat?
S: Enam kali empat sama dengan dua puluh empat
P: Boleh tulis ayat darab tu dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$6 \times 4 = 24$$

P: Baik, sekarang boleh tak Aimi buat ayat bahagi daripada ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

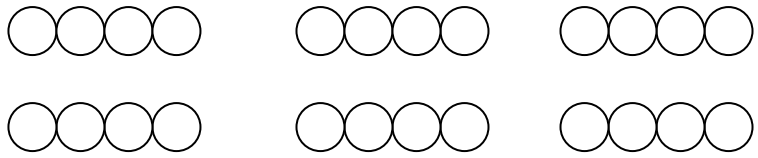
$$6 \div 4 = 24$$

P: Boleh Aimi beritahu kenapa Aimi tulis ayat bahagi macam tu?
S: Sebab enam darab empat sama dengan dua puluh empat.
P: Itu darab. Ayat bahagi?
S: Enam bahagi empat sama dengan dua puluh empat.
P: Enam bahagi empat dapat berapa? Boleh tunjuk dengan melukis ke?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Boleh jelaskan?
S: Enam bahagi empat
P: Dapat dua puluh empat ke?
S: Tak.
P: Boleh tulis semula ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 4 = 6$$

P: Dua puluh empat sama dengan apa pada ayat darab?
S: … Jawapan dia.
P: Kenapa letak dua puluh empat di sebelah kiri?
S: Sebab enam tak boleh bahagi empat.
P: Kenapa tak tulis empat di sebelah kiri?
S: Empat tak boleh bahagi enam.
P: Sebelah kiri kena tulis nombor yang boleh dibahagi sahaja ke?
S: Ya.
P: Ada tak cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek mendiamkan diri sebentar). Tak ada.
P: Apa kaitan atau persamaan ayat darab dan ayat bahagi?
S: Darab kalau terbalik dapat bahagi.
P: Boleh Aimi tunjuk secara lukisan macam tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh Aimi terangkan apa yang Aimi lukis?
S: Dua puluh empat bahagi empat
P: Kenapa Aimi kumpulkan empat-empat?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kumpulan ada berapa?
S: (Subjek menghitung dan menjawab). Enam.
P: Kumpulan tu sama dengan apa pada ayat darab (menunjukkan ayat 6 x 4)?
S: (Subjek menunjukkan nombor enam pada ayat darab 6 x 4).
P: Ada cara lain untuk menunjukkan ayat bahagi tadi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA245 di atas pada mulanya Aimi menulis persamaan $6 \div 4 = 24$. Beliau juga melukis empat bola dalam satu kumpulan dan dua bola lagi dalam kumpulan lain bagi menunjukkan enam bahagi empat. Bagaimanapun beliau menukar ayat bahagi tersebut kepada ayat bahagi $24 \div 4 = 6$ kerana beliau mendapati enam bahagi empat tidak menghasilkan dua puluh empat. Beliau juga

menjelaskan bahawa nombor dua puluh empat yang dituliskan pada ayat 6 ÷ 4 = 24 adalah sama dengan jawapan bagi 6 x 4.

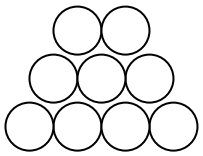
Selain itu, Aimi melukis enam kumpulan yang mengandungi empat bola di dalamnya bagi menjelaskan lagi persamaan 6 ÷ 4 = 24. Subjek juga berpendapat bahawa bilangan kumpulan yang terdapat dalam lukisan beliau adalah sama dengan nombor enam yang terdapat dalam ayat darab 6 x 4.

Petikan TA246

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 9 x 0) Boleh Aimi baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Sembilan kali kosong.
P: Jawapannya?
S: Sembilan.
P: Macam mana Aimi tahu sembilan?
S: Sebab darab dengan kosong macam tak darab.
P: Kalau tak darab jawapannya apa?
S: Sembilan.
P: Boleh tulis ayat bahagi bagi ayat tu?
S: (Subjek menulis empat ayat bahagi seperti berikut):

9 ÷ 0 = 9

P: Boleh terangkan apa yang Aimi tulis?
S: (Subjek membaca ayat yang ditulis) Sembilan bahagi kosong sama dengan sembilan.
P: Kenapa tulis sembilan bahagi kosong sama dengan sembilan?
S: Sebab sembilan bahagi kosong macam tak bahagi, sama dengan sembilanlah.
P: Kenapa tak tulis kosong di sebelah kiri?
S: Kosong mana boleh bahagi?
P: Kosong tak boleh bahagi ke?
S: Kosong tak ada, mana boleh bahagi.
P: Ada cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Boleh tunjuk secara lukisan?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Kenapa semua dikumpulkan sekali?
S: Sebab bahagi kosong, tak bahagi.
P: Sembilan pada ayat darab sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Semua.
P: Kosong?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain nak lukis?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Gambar tu sama tak dengan tadi?
S: Lain sikit.
P: Lain macam mana?
S: Susunan bola.
P: Kumpulan ada berapa?
S: Satu.
P: Macam mana dengan bilangan bola dalam kumpulan sama tak dengan tadi?
S: Sama.
P: Apa lagi yang sama dengan kedua-dua gambar rajah?
S: Tak ada lagi.

Dalam Petikan TA246 di atas Aimi menulis persamaan bahagi $9 \div 0 = 9$ bagi ayat darab 9×0. Aimi juga menjelaskan bahawa sembilan darab sifar adalah sama dengan sifar kerana nombor yang didarab dengan sifar bermakna tidak melakukan operasi darab. Menurut Aimi lagi, sembilan bahagi dengan sifar juga adalah sama dengan tidak lakukan operasi bahagi. Dengan itu nombor yang dibahagi dengan sifar adalah sama dengan nombor itu sendiri.

Aimi melukis sembilan biji bola yang dihimpukan dalam satu kumpulan bagi mewakili persamaan $9 \div 0 = 9$. Beliau juga melukis satu lagi gambar rajah bagi persamaan tersebut yang menunjukkan satu barisan sembilan biji bola. Aimi berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah yang dilukisnya adalah berbeza sedikit kerana susunan bola dalam kedua-dua gambar rajah tersebut adalah berbeza. Selain itu Aimi menjelaskan bahawa kedua-dua gambar rajah mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang sama.

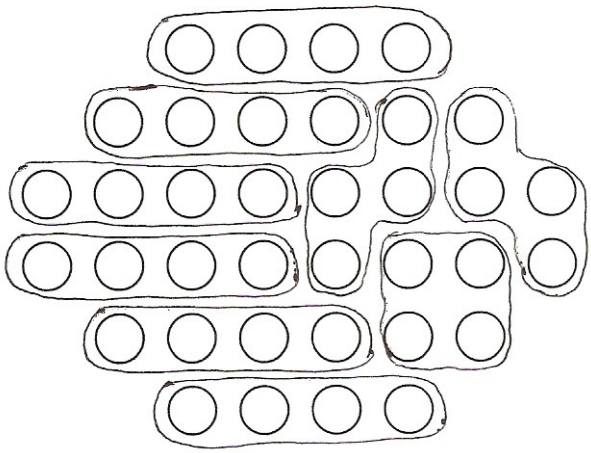
Penyelesaian Masalah

Bentuk Diskrit

Aimi menyelesaikan masalah 36 ÷ 4 dengan membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan kumpulan. Beliau juga membulatkan sembilan guli bagi membentuk empat kumpulan sebagai penyelesaian kepada masalah 36 ÷ 9. Petikan PM251 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Aimi.

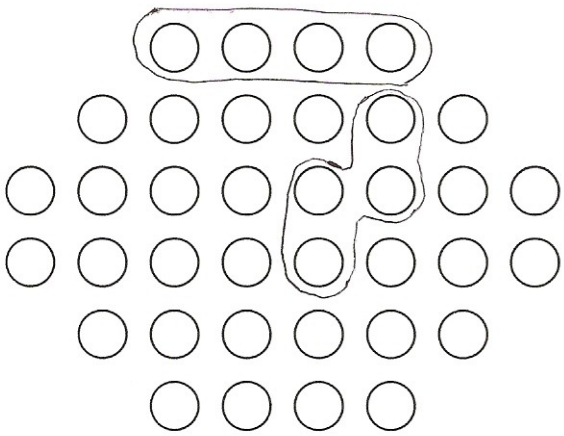
Petikan PM251

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Cuba tengok gambar ini. Ini adalah gambar guli. Boleh Aimi bahagi empat guli-guli ini?
S: (Subjek menghitung guli-guli tersebut secara senyap agak lama.)
P: Boleh lukis pada gambar tu.
S: (Subjek menghitung secara senyap dan mencuba beberapa cara untuk membahagi empat. Subjek akhirnya melukis pada gambar yang beri seperti berikut):



P: Dah bahagi empat?
S: Dah.

P: Ada berapa guli semua sekali?
S: (Subjek menghitung semula dan menjawab). Tiga puluh enam.
P: Macam mana Aimi tahu ada tiga puluh enam?
S: (Subjek menjawab sambil menunjukkan guli-guli tersebut.) Kiralah.
P: Jadi tiga puluh enam bahagi empat dapat berapa?
S: (Subjek menghitung bulatan-bulatan yang dilakukannya). Sembilan.
P: Macam mana dapat sembilan?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Macam mana Aimi tahu tiga puluh enam bahagi empat dapat sembilan?
S: Kira. (Subjek menjawab sambil menunjukkan bulatan-bulatan yang telah dibuatnya).
P: Kenapa Aimi bulatkan macam ni?
S: Sebab nak bahagi.
P: Ada berapa guli dalam setiap bulatan?
S: Empat.
P: Kenapa Aimi kumpulkan empat guli?
S: Sebab nak bahagi empat.
P: Kalau nak bahagi tiga macam mana?
S: Nak lukis ke?
P: Boleh beritahu tanpa lukis? Kalau bahagi tiga kena buat macam mana?
S: Kena bulatkan tiga guli.
P: Kalau bahagi dua?
S: Kena bulatkan dua guli.
P: Baik. Kita tengok balik gambar ini. Di sini Aimi membulatkan secara memanjang dan di sini pulak bentuk 'N'. Sama tak kedua-duanya (Menunjukkan kumpulan yang berbentuk memanjang dan berbentuk 'N')?



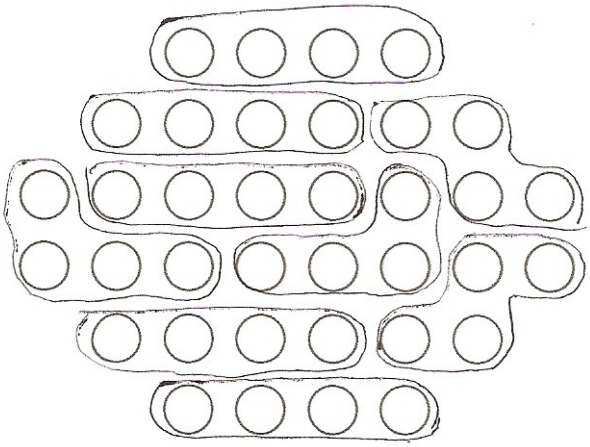
S: Tak sama
P: Kenapa tak sama?
S: Bentuk dia tak sama.
P: Macam mana dengan guli di dalam setiap bulatan?
S: Sama.
P: Ada berapa?
S: Empat.
P: Boleh Aimi tulis ayat bahagi untuk gambar tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4$$

P: Jawapannya berapa? Boleh tuliskan sekali?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4 = 9$$

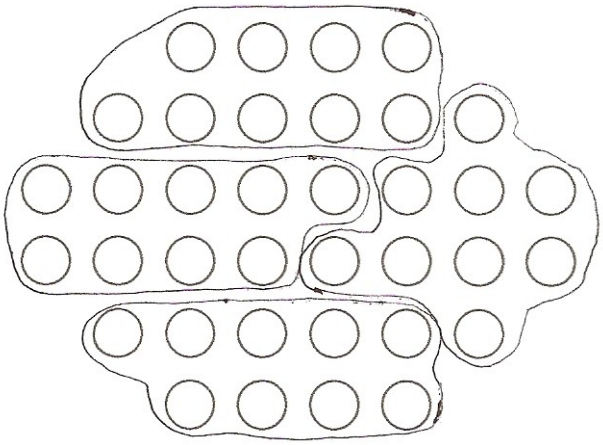
P: Ada cara lain tak nak tunjuk bahagi empat?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: (Subjek menghitung dan menjawab) Sembilan.
P: Yang ini sama tak dengan cara yang Aimi buat tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Bentuk dia.
P: Macam mana dengan bilangan guli setiap kumpulan?
S: Empat.
P: Sama tak dengan tadi?
S: Sama.
P: Boleh Aimi tulis ayat bahagi untuk gambar tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4 = 9$$

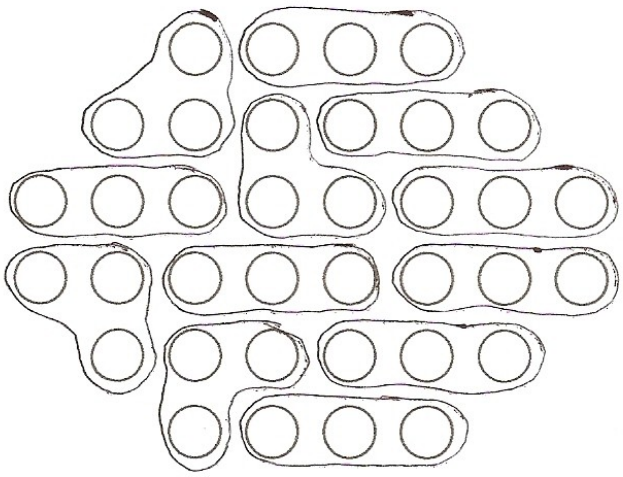
P: Ayat bahagi sama tak dengan tadi?
S: Sama.
P: Ada tak cara lain nak bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Baik untuk gambar rajah ini boleh tak kita tulis ayat $36 \div 9 = 4$?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Tadi Aimi tulis macam ini (menunjukkan ayat $36 \div 4 = 9$) bagi gambar rajah ini, kalau cikgu tulis ayat $36 \div 9 = 4$ bagi gambar yang sama, Aimi rasa boleh atau tidak?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Boleh Aimi tunjuk bagaimana tiga puluh enam bahagi sembilan?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Gambar rajah ni sama tak dengan gambar rajah tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama pada gambar- gambar tadi?
S: Ini sembilan (menunjukkan guli dalam bulatan bagi gambar rajah $36 \div 9 = 4$), ini empat (menunjukkan guli dalam bulatan bagi gambar rajah $36 \div 4 = 9$)
P: Bagaimana dengan bilangan kumpulan?
S: Tak sama.
P: Jadi boleh tak kita tulis ayat $36 \div 4 = 9$ bagi gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah bagi $36 \div 9 = 4$)?
S: Tak boleh, yang ni kena tulis macam ni (subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 9 = 4$$

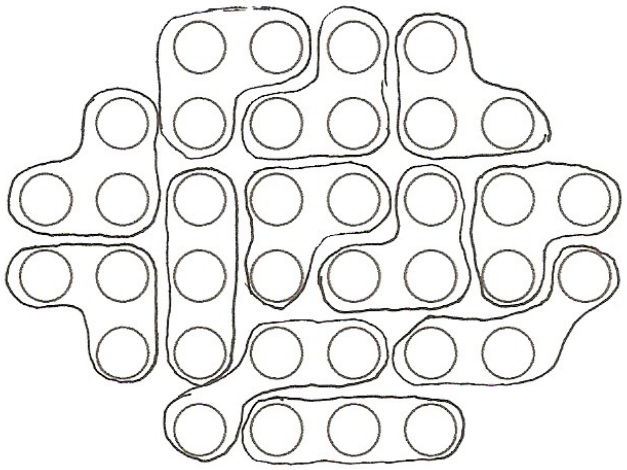
P: Sekarang boleh tak Aimi bahagi tiga? Sama macam tadi, tapi sekarang bahagi tiga.
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada gambar rajah yang di beri)



P: Baik. Di sini Aimi bulatkan tiga. Kenapa bulatkan tiga?
S: Sebab bahagi tiga.
P: Baik tiga puluh enam bahagi tiga dapat berapa?
S: (Subjek menghitung kumpulan-kumpulan yang telah dibulatkan) Dua belas.
P: Macam mana Aimi tahu dua belas?
S: Kira bulatan.
P: Bulatan ada berapa?
S: Dua belas.
P: Baik, tadi Aimi kumpulkan empat guli (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 4), yang ni tiga guli (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 3). Sama tak kedua-duanya?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ni ada empat guli (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan empat-empat.) , yang ni ada tiga guli (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan bersaiz tiga).
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 3 = 12$$

P: Boleh tak Aimi tunjuk cara lain bahagi tiga.
S: (Subjek menunjukkan seperti berikut):

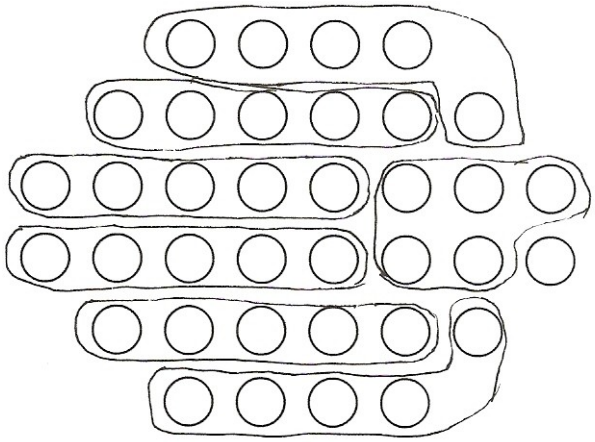


P: Yang ini sama tak dengan yang tadi?
S: Lain sikit.
P: Apa yang lain?
S: Bentuk kumpulan.
P: Bilangan guli dalam kumpulan tu sama tak?
S: Sama. Tiga.
P: Apa lagi yang sama dengan tadi?
S: Kumpulan ada dua belas.
P: Apa lagi yang sama?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk yang ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

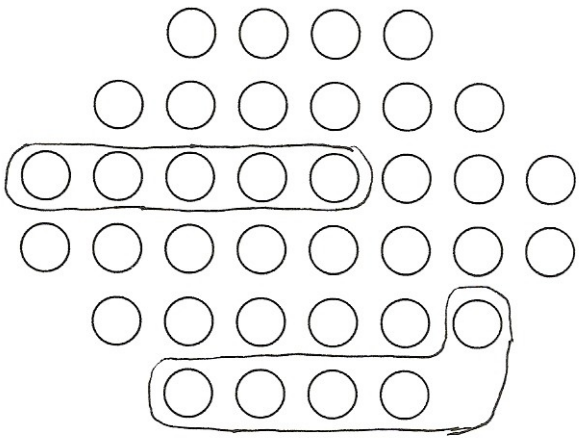
$$36 \div 3 = 12$$

P: Macam mana dengan ayat ni dengan ayat tadi. Sama atau tidak?
S: Sama.
P: Apa yang sama?
S: Semua. Tiga puluh enam, tiga dan dua belas.
P: Baik boleh Aimi beritahu tiga ni rujuk pada apa dalam gambar (menunjukkan angka 3)?
S: Guli dalam bulatan.
P: Yang ni (Menunjukkan angka 12)?
S: Semua sekali (subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang telah dibuat bagi mengumpulkan tiga guli)
P: Yang ni (menunjukkan angka 36 pada ayat yang telah ditulis)?
S: Tiga puluh enam jumlah semua guli.
P: Ada cara lain tak nak bahagi tiga?
S: Tak ada.

P: Sekarang boleh tak Aimi bahagi lima?
S: (Subjek membulatkan seperti berikut):



P: Di sini ada satu (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan)?
S: Tak cukup
P: Tak cukup macam mana?
S: Tak cukup lima
P: Jadi tiga puluh enam boleh bahagi lima tak?
S: Boleh, tapi ada baki.
P: Ada baki? Macam mana Aimi tau ada baki?
S: Sebab ada satu yang lebih.
P: Yang Aimi bulatkan yang ni (menunjukkan yang berbentuk memanjang) dengan yang ini (menunjukkan yang berbentuk 'L') sama tak?



S: Bentuk tak sama, guli sama.
P: Ada berapa guli dalam bulatan tu?
S: Lima.

P: Sekarang boleh tak Aimi tuliskan ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: Boleh. (Subjek menuliskan seperti berikut):

$$36 \div 5 = 7$$

P: Macam mana tahu sama dengan tujuh?
S: Sebab ada tujuh kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan)
S: Itu tak cukup.
P: Boleh tak Aimi beritahu apa maksud angka ini? (menunjukkan 36 pada ayat bahagi).
S: Tiga puluh enam.
P: Dalam gambar tadi, 36 tu yang mana satu?
S: Semua.
P: Yang ini (menunjukkan angka 5)?
S: Guli dalam bulatan
P: Yang ni (menunjukkan angka 7)?
S: Bulatan.
P: Ada tak cara lain nak tunjuk bahagi lima?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW251, Aimi menyelesaikan 36 ÷ 4 dengan membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan bulatan. Beliau berpendapat bahawa bilangan guli dalam setiap bulatan bergantung kepada pembahagi. Menurut Aimi lagi, empat guli dibulatan kerana pembahaginya adalah empat. Bagi bahagi tiga dan bahagi dua pula, Aimi berpendapat tiga dan dua guli masing-masing perlu dibulatkan.

Selain itu, Aimi juga membentuk empat kumpulan bersaiz sembilan bagi menyelesaikan masalah bahagi sembilan. Aimi juga berpendapat kedua-dua gambar rajah yang ditanda untuk bahagi empat dan bahagi sembilan adalah berbeza kerana mempunyai saiz dan bilangan kumpulan yang berbeza. Subjek juga menulis ayat bahagi 36 ÷ 4 = 9 bagi mewakili gambar rajah sembilan kumpulan bersaiz

empat yang dibentuknya dan berpendapat bahawa ayat tersebut tidak boleh mewakili gambar rajah yang mempunyai empat kumpulan bersaiz sembilan. Subjek juga menulis ayat 36 ÷ 9 = 4 bagi mewakili gambar rajah yang mempunyai empat kumpulan bersaiz sembilan.

Bagi menyelesaikan masalah bahagi tiga pula subjek membentuk dua belas kumpulan bersaiz tiga dan mewakilinya dengan menulis ayat bahagi 36 ÷ 3 = 12. Aimi juga menjelaskan bahawa dua belas diperoleh dengan menghitung bilangan kumpulan yang dapat dibentuk.

Bagi menyelesaikan bahagi lima pula, Aimi membentuk tujuh kumpulan yang bersaiz lima. Aimi tidak membulatkan satu guli yang berlebihan kerana saiznya kurang daripada lima. Subjek juga berpendapat bahawa hanya kumpulan yang bersaiz lima sahaja boleh diambil kira sebagai jawapan. Bagi mewakili gambar rajah bersaiz lima tersebut subjek juga menulis ayat bahagi 36 ÷ 5 = 7.

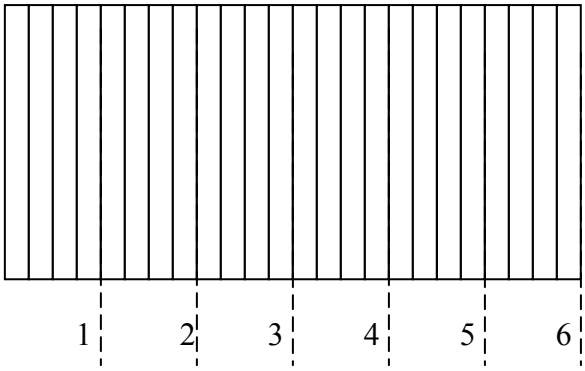
Bentuk Selanjar

Aimi menyelesaikan masalah membabitkan gambar rajah berbentuk selanjar yang perlu dibahagi empat dengan menggariskan setiap empat jalur yang telah beliau hitung. Beliau juga menjelaskan bahawa jawapan bagi masalah 24 ÷ 4 dapat diperolehi dengan

menghitung bilangan kumpulan yang dapat dibentuk. Petikan PM252 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Aimi.

Petikan PM252

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai 24 petak). Cuba lihat kad ini. Apa yang terdapat pada kad ini?
S: Jalur panjang.
P: Baik. Sekarang boleh tak Aimi bahagi jalur-jalur tadi kepada empat?
S: (Subjek menuliskan nombor pada setiap empat jalur yang terdapat pada gambar rajah tanpa menentukan jumlah petak yang terdapat pada gambar rajah. Berikut adalah pembahagian yang dibuat oleh subjek):



P: Dah siap?
S: Dah
P: Boleh jelaskan apa yang Aimi buat?
S: Bahagi empat.
P: Bahagi empat, dapat berapa?
S: (Subjek mengira dan menjawab) Enam.
P: Macam mana tahu enam?
S: Kira.
P: Kira apa?
S: Kira kumpulan.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Empat.
P: Kenapa empat?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kalau bahagi dua, satu kumpulan perlu ada berapa?
S: Dua.
P: Baik, di sini ada berapa jalur semua?

S: (Subjek menghitung bilangan petak dan menjawab) Dua puluh empat.
P: Macam mana tahu dua puluh empat?
S: Kira
P: Boleh Aimi tuliskan ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 4$$

P: Sama dengan berapa?
S: (Subjek menghitung semula dan membetulkan ayatnya tadi). Enam.

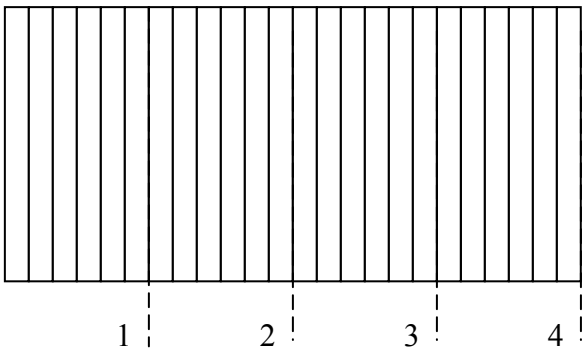
$$24 \div 4 = 6$$

P: Kenapa Aimi tulis macam tu? Kenapa tak tulis enam di depan ke?
S: Sebab semua ada dua puluh empat.
P: Jadi, tak boleh tulis nombor enam dahulu ke?
S: Tak boleh.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Cuba tengok gambar rajah agaknya ada tak cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: (Subjek meneliti semula gambar rajah dan menjawab) Tak ada.
P: Tak ada?
S: Tak ada.
P: Baik. Dua puluh empat tu (menunjukkan 24 pada ayat bahagi) sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Semua petak.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat bahagi) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: (Subjek menunjukkan kumpulan empat petak yang telah ditandanya). Satu kumpulan ada empat.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 6 pada ayat bahagi) rujuk pada apa?
S: Ada enam kumpulan.
P: Boleh Aimi buat cerita berkaitan dengan gambar rajah tadi?
S: Saya ada dua puluh empat biji kueh. Hendak bahagi kepada kawan. Seorang dapat empat.
P: Kawan tadi tu berapa orang?
S: (Subjek menghitung semula bilangan kumpulan yang telah ditanda pada menjawab). Enam.
P: Boleh Aimi buat cerita supaya dibahagi kepada empat orang?
S: Saya ada dua puluh empat batang pensel. Hendak bahagi kepada empat orang. Seorang dapat empat.

P: Kalau kawan empat orang, seorang dapat berapa?
S: Seorang dapat empat … enam.
P: Seorang dapat berapa?
S: Enam.
P: Kenapa enam?
S: Sebab dua puluh empat bahagi empat sama dengan enam.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi bagi cerita tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$25 \div 6 = 4$$

P: Boleh tak terangkan tentang persamaan tu. Kenapa tulis bahagi enam?
S: Sebab ada enam … seorang dapat enam.
P: Nombor empat tu menunjukkan apa?
S: Empat tu empat orang kawan.
P: Cuba kaitkan dengan gambar rajah tadi. Bahagi enam tu rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: (Subjek senyap).
P: Boleh tak kaitkan dengan cerita Aimi tadi, atau ayat bahagi dengan gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang telah ditanda oleh subjek).
S: Nak lukis ke?
P: Ada persamaan tak cerita Aimi tadi atau ayat yang Aimi tulis ni (menunjukkan ayat $24 \div 6 = 4$) dengan gambar ni (menunjukkan gambar rajah yang telah ditanda oleh subjek)?
S: Tak ada.
P: Perbezaan?
S: Nombor tak sama.
P: Nombor yang mana?
S: Yang ni (menunjukkan nombor empat pada ayat bahagi $24 \div 4 = 6$) empat, yang ini (menunjukkan enam pada ayat $24 \div 6 = 4$) enam.
P: Lagi? Ada lagi tak yang berbeza?
S: Yang ni (menunjukkan nombor enam pada ayat bahagi $24 \div 4 = 6$) enam, yang ini (menunjukkan empat pada ayat $24 \div 6 = 4$) empat.
P: Ada lagi yang berbeza?
S: Tak ada.
P: Yang sama?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh tak Aimi bahagi gambar rajah tadi kepada enam?
S: (Subjek menandakan seperti berikut):

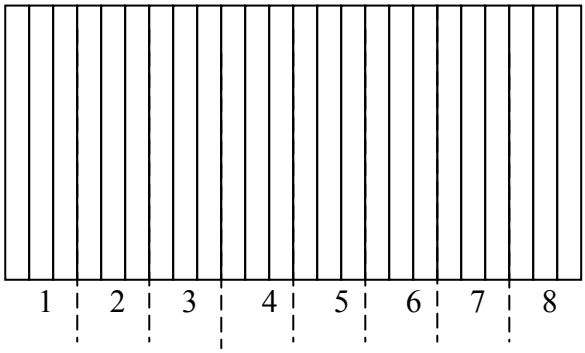


P: Dah siap?
S: Dah.
P: Boleh beritahu apa yang Aimi buat?
S: Bahagi enam.
P: Boleh Aimi beritahu macam mana bahagi enam?
S: Kira enam, enam (subjek menunjukkan lukisannya).
P: Kenapa kira enam?
S: Sebab bahagi enam.
P: Kalau bahagi tiga kena buat apa?
S: Kira tiga, tiga.
P: Ayat bahagi untuk bahagi enam?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 6 = 4$$

P: Macam mana Aimi tahu jawapannya empat?
S: Sebab ada empat kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak bahagi enam?
S: …Tak ada.
P: Cara lain menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Cuba Aimi bandingkan dengan ayat bahagi tadi. Sama tak dengan ayat ni (menunjukkan ayat yang subjek tulis bagi bahagi empat)?
S: Tak.
P: Cuba bandingkan. Apa yang tak sama pada kedua-dua ayat tu?
S: Yang ni bahagi enam, tadi bahagi empat.
P: Ada lagi perbezaan?
S: Jawapan tak sama. Yang ni empat yang tadi enam.
P: Bagaimana dengan gambar rajah. Ada persamaan tak antara kedua-dua gambar rajah tadi?
S: Yang ini (menunjukkan gambar rajah bagi $24 \div 4 = 6$) ada empat (menunjukkan empat jalur). Kumpulan ada enam. Yang ni (menunjukkan gambar rajah bagi $24 \div 6 = 4$) ada enam, kumpulan ada empat.
P: Jadi sama tak?

S: Tak.
P: Sekarang boleh tunjuk bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



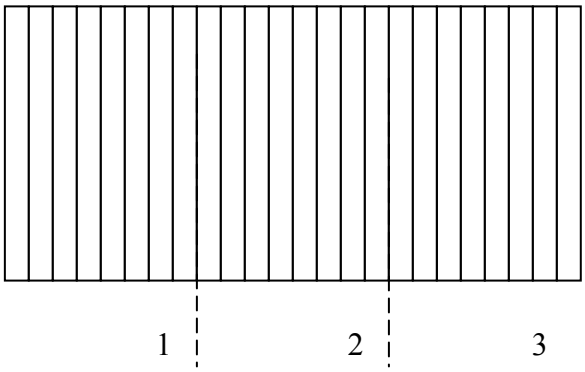
P: Boleh Aimi terangkan apa yang Aimi buat?
S: Dua puluh empat bahagi tiga sama dengan … lapan (subjek menghitung bilangan kumpulan tiga yang terdapat pada gambar rajah.).
P: Boleh tuliskan ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 3 = 8$$

P: Boleh tulis ayat bahagi secara lain?
S: Tak boleh.
P: Boleh buat cerita bagi bahagi tiga?
S: Ali ada dua puluh empat guli. Dia beri kepada adik-adik dia. Seorang mendapat tiga.
P: Adik-adik Ali berapa orang?
S: Lapan.
P: Boleh tulis ayat bahagi bagi cerita tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 3 = 8$$

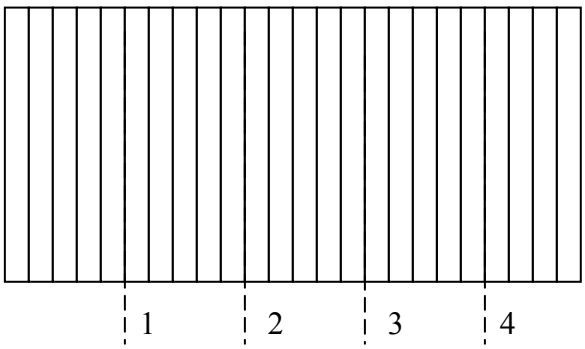
P: Sekarang boleh Aimi bahagi lapan?
S: (Subjek menandakan seperti berikut):



P: Ada persamaan tak antara kedua-dua gambar rajah?
S: Tak ada.
P: Perbezaan?
S: Yang ni tiga kumpulan (menunjukkan gambar rajah dengan tiga kumpulan) sama dengan tiga kotak (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan kumpulan).
P: Ada perbezaan yang lain?
S: Yang ni lapan jalur (menunjukkan gambar rajah dengan tiga kumpulan) sama dengan lapan kumpulan (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan kumpulan).
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 8 = 3$$

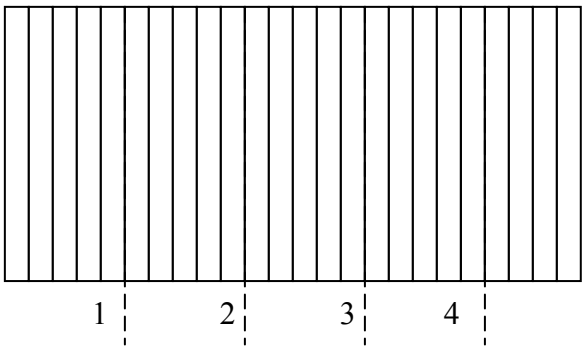
P: Sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ini tiga (menunjukkan 3 pada ayat $24 \div 3 = 8$) jawapan lapan. Yang ni lapan jawapan tiga (menunjukkan 8 pada ayat $24 \div 8 = 3$).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh Aimi bahagi lima?
S: (Subjek menandakan seperti berikut) Tak cukup.



P: Apa yang tak cukup?
S: Yang ni (menunjukkan kumpulan terakhir) tak cukup lima.
P: Tak cukup? Berapa banyak tak cukup?
S: Satu.
P: Jadi kalau bahagi lima dapat berapa?
S: (Subjek menghitung bilangan kumpulan yang ada). Empat
P: Macam mana dapat empat?
S: Kira kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan kumpulan yang kurang satu petak)?
S: Tak cukup.
P: Kalau tak cukup tak boleh kira?
S: Tak boleh.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 5 = 4$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Nak bahagi lima gambar rajah tu ada cara lain?
S: (Subjek memikir agak lama kemudian menandakan seperti berikut):



P: Ada perbezaan dengan gambar tadi?
S: (Subjek mengangguk)
P: Apa yang beza?
S: Yang ini ada lima jalur (menunjukkan kumpulan yang mencukupi lima). Yang ni tak cukup (menunjukkan kumpulan yang mempunyai empat jalur sahaja)
P: Yang tadi bukan sama ke?
S: Tak sama. Tadi kumpulan yang ni (menunjukkan kumpulan yang mempunyai empat petak) di sini (menunjukkan kedudukan kumpulan di sebelah kanan).
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 5 = 4$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Kenapa sama gambar tak sama?
S: …Yang ni ada lima jalur, yang ni pun lima jalur (menunjukkan kedua-dua gambar rajah) Kumpulan ada empat, yang ni pun kumpulan ada empat.
P: Tadi kata gambar tak sama?
S: Lain sikit. Yang ni (menunjukkan kumpulan tepi sebelah kanan gambar rajah pertama bagi 24 ÷ 5) empat di sini. Yang ini (menunjukkan tepi sebelah kiri gambar rajah kedua bagi
24 ÷ 5) empat di sini.
P: Ada apa-apa perbezaan lagi?
S: Tak ada.
P: Cuba bandingkan ayat ini dengan ayat tadi (menunjukkan ayat bahagi bersama-sama gambar rajah bagi 24 ÷ 6 = 4). Ada apa-apa persamaan?
S: Dua-dua pun dua puluh empat.
P: Lagi ada persamaan lagi tak?
S: Jawapan dia sama.
P: Kenapa jawapan dia sama sedangkan pembahagian tak sama?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Yang tadi bahagi berapa?
S: Enam.
P: Kenapa kalau bahagi enam dan bahagi lima dapat jawapan empat?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Cuba tengok balik gambar rajah tadi (menunjukkan gambar rajah 24 ÷ 6 dan 24 ÷ 5). Ada berapa kumpulan untuk ini (menunjukkan gambar rajah 24 ÷ 6)?
S: Empat.
P: Yang ini (menunjukkan gambar rajah 24 ÷ 5)?
S: Empat.
P: Cuba tengok betul-betul.
S: Lima. Satu tu tak cukup (subjek menunjukkan kumpulan yang hanya mempunyai empat jalur).
P: Tak cukup berapa?
S: Satu.
P: Jadi ada berapa kumpulan pada gambar rajah itu?
S: Empat baki empat.
P: Ada baki?
S: Baki empat.
P: Gambar rajah tadi (menunjukkan gambar rajah 24 ÷ 6) ada baki?
S: Tak ada. Semua kumpulan cukup.
P: Semua kumpulan ada berapa jalur?

S: Empat.
P: Ada lagi perbezaan?
S: Tak ada.

Pada bahagian awal Petikan PM252, Aimi menyelesaikan 24 ÷ 4 dengan membahagikan gambar rajah yang diberi kepada kumpulan-kumpulan yang mempunyai empat jalur. Aimi menjelaskan bahawa empat jalur dikumpulkan dalam satu kumpulan kerana soalannya adalah bahagi empat. Beliau juga berpendapat sekiranya soalannya adalah bahagi dua maka dua jalur perlu dikumpulkan dalam satu kumpulan. Aimi juga menjelaskan bahawa jawapan bagi dua puluh empat bahagi empat adalah jumlah kumpulan yang mempunyai empat jalur yang dapat dibentuk. Beliau seterusnya menjelaskan bahawa jawapan bagi 24 ÷ 4 adalah enam iaitu nilai yang diperolehinya dengan menghitung kumpulan-kumpulan yang beliau bentuk. Subjek menuliskan ayat bahagi 24 ÷ 4 = 6 bagi pembahagian tersebut.

Aimi juga membentuk cerita bagi menyelesaikan masalah 24 ÷ 4. Dalam cerita beliau, dua puluh empat biji kueh dibahagi kepada enam orang kawan. Apabila diminta untuk membahagi kepada empat orang kawan, Aimi telah membentuk satu lagi cerita. Dalam cerita tersebut, dua puluh empat batang pensel dibahagi kepada empat orang dan setiap orang dalam cerita beliau memperolehi enam batang pensel. Aimi menuliskan ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 bagi cerita

tersebut. Beliau juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi, iaitu 24 ÷ 6 = 4 dan 24 ÷ 4 = 6 adalah berbeza.

Aimi menyelesaikan 24 ÷ 6 dengan menghitung enam jalur dan menggariskannya sebagai satu kumpulan. Subjek menjelaskan bahawa terdapat empat kumpulan dalam pembahagian itu. Subjek juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 bagi pembahagian tersebut. Selain itu Aimi juga berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah dan ayat bahagi bagi 24 ÷ 4 dan 24 ÷ 6 adalah berbeza. Menurut beliau, perbezaan yang terdapat dalam kedua-dua persamaan adalah dari segi pembahagi dan hasil bahagi.

Di bahagian pertengahan Petikan PW252, Aimi menunjukkan penyelesaian bagi 24 ÷ 3 dengan mengumpulkan tiga jalur dalam satu kumpulan. Beliau juga menulis persamaan 24 ÷ 3 = 8 bagi mewakili pembahagian itu. Selain itu, Aimi membentuk cerita bagi menyelesaikan masalah 24 ÷ 3. Dalam cerita itu Aimi menceritakan bagaimana Ali yang mempunyai dua puluh empat guli mengagihkannya kepada lapan orang adik Ali. Menurut Aimi lagi, setiap orang adik Ali mendapat tiga biji guli. Aimi juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 3 = 8 bagi mewakili cerita beliau.

Bagi 24 ÷ 8 pula, Aimi menggariskan setiap lapan jalur sebagai satu kumpulan. Beliau berpendapat bahawa terdapat tiga kumpulan yang mempunyai lapan jalur dalam ayat bahagi 24 ÷ 8. Selain itu, beliau menulis ayat bahagi 24 ÷ 8 = 3 bagi mewakili pembahagian itu. Aimi juga menjelaskan bahawa

penyelesaian yang beliau tunjukkan bagi 24 ÷ 3 dan 24 ÷ 8 adalah berbeza. Menurut beliau perbezaan antara kedua-dua penyelesaian adalah disebabkan oleh nilai pembahagi dan hasil bahagi bagi kedua-dua persamaan adalah tidak sama. Dalam perbandingan antara gambar rajah bagi 24 ÷ 8 dan 24 ÷ 3 , Aimi berpendapat bahawa perbezaan ketara kerana mempunyai bilangan kumpulan dan bilangan jalur dalam setiap kumpulan yang berbeza.

Di bahagian akhir petikan, Aimi menyelesaikan masalah 24 ÷ 5 dengan menggariskan setiap lima jalur bagi membentuk empat kumpulan. Dalam pembahagian 24 ÷ 5, Aimi mendapati terdapat satu kumpulan yang tidak mencukupi lima. Menurut Aimi lagi, bagi bahagi lima hanya kumpulan yang mempunyai lima jalur perlu diambil kira.

Seterusnya, menurut beliau, kumpulan yang mempunyai empat jalur tidak boleh dikira dan beliau telah menuliskan ayat bahaginya sebagai 24 ÷ 5 = 4. Beliau menjelaskan lagi, walaupun hasil bahagi bagi 24 ÷ 6 mempunyai jawapan yang sama dengan 24 ÷ 5 namun kedua-duanya berbeza. Menurut beliau perbezaan tersebut adalah kerana pembahagian dengan lima mempunyai baki sedangkan pembahagian dengan enam tidak mempunyai baki.

Protokol 3: Azam

Beliau berusia 9 tahun 11 bulan semasa temu duga dijalankan. Berikut adalah tingkah laku yang beliau tunjukkan.

1. Dia menggambarkan perkataan 'bahagi' dengan menulis simbol ' ÷ ', ' x ', ' + ', dan ' - ' .

2. Bagi ayat enam bahagi dua, dia menggambarkannya dengan menulis ayat 6 ÷ 2.

3. Dia mewakilkan ayat a ÷ b dengan membentuk b kumpulan yang sama saiznya. Menurutnya, pembahagi menentukan bilangan kumpulan.

4. Bagi pembahagian yang mempunyai baki seperti a ÷ b = c baki d, jawapannya ditulis sebagai c baki d.

5. Menurutnya, gambar rajah yang mempunyai c kumpulan bersaiz b tidak sama dengan gambar rajah yang mempunyai b kumpulan bersaiz c kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

6. Azam berpendapat, persamaan a ÷ b = c adalah sama dengan a ÷ c = b kerana pembahagi dan hasil bahagi boleh saling bertukar ganti.

7. Bagi persamaan a ÷ b = c, a merujuk semua yang hendak dibahagi, c merujuk saiz kumpulan, dan b merujuk bilangan kumpulan.

8. Susunan yang dibentuk bagi persamaan a ÷ b = c, adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi a yang ditolak secara berulang sebanyak c kali. Setiap penolakan perlu bersaiz c, dan nilai b dalam a ÷ b = c adalah sama dengan bilangan penolakan berulang yang dilakukan.

9. Menurutnya, jika a ÷ b = c, maka
   i. a0 ÷ b = c0
   ii. a00 ÷ b = c00
   iii. a ÷ a = 1
   iv. a0 ÷ a0 = 1
   v. a ÷ 1 = a
   vi. a0 ÷ 1 = a0

10. Dalam ayat 0 ÷ a, 0 bermaksud tiada nilai maka jawapannya adalah sifar.

11. Bagi ayat a ÷ 0, jawapannya adalah sifar kerana semua operasi yang membabitkan sifar adalah sifar.

12. Beliau menjelaskan ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

13. Persamaan darab bagi ayat a ÷ b adalah c x b = a, di mana c adalah hasil bahagi bagi a ÷ b.

14. Bagi penyelesaian masalah a ÷ b yang menghasikan baki, penyelesaian tidak dapat diperoleh kerana tidak dapat membentuk b kumpulan yang sama saiz.

Gambaran Mental

Perkataan Bahagi

Azam mempunyai hanya satu gambaran bagi perkataan bahagi. Petikan GM311 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan GM311

P: Kalau cikgu sebut bahagi. Gambar apa ada dalam kepala Azam?
S: (Subjek mendiamkan diri)
P: Bahagi. Apa yang Azam nampak bila cikgu sebut bahagi?
S: (Subjek masih tidak berkata apa-apa).
P: Ada gambar bahagi tak dalam kepala?
S: (Subjek mengangguk)
P: Azam boleh lukis pada kertas.
S: (Subjek menulis simbol seperti berikut):

÷ x – +

P: Boleh beritahu saya apa yang Azam tulis?
S: Bahagi, darab, tolak, campur (subjek menjelaskan sambil menunjukkan simbol-simbol tersebut satu per satu).
P: Semua tu gambaran bagi bahagi ?
S: (Subjek mengangguk)
P: Cikgu nampak banyak simbol di situ. Semua tu gambaran Azam bagi bahagi?
S: Ya.
P: Ada gambar lain tak bila sebut bahagi?
S: Tak ada.
P: Tak ada gambar lain?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, Azam menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis simbol-simbol ÷ , x , – , dan + .

Gambaran Mental Ayat Bahagi

Azam mempunyai hanya satu gambaran bagi ayat enam bahagi dua. Gambaran mental beliau itu ditunjukkannya secara tulisan. Petikan GM312 berikut memaparkan tingkah laku Azam.

Petikan GM312

P: Kalau cikgu sebut enam bahagi dua, gambar apa ada dalam kepala Azam?
S: (Subjek tidak berkata apa-apa).
P: Enam bahagi dua.
S: (Subjek seolah-olah sedang berfikir)
P: Ada gambar tak?
S: (Subjek mengangguk)
P: Ada gambar apa kalau sebut enam bahagi dua? Azam boleh tulis pada kertas
S: (Subjek menulis seperti berikut pada kertas):

$$6 \div 2$$

P: Boleh Azam jelaskan apa yang Azam tulis?
S: Enam ... bahagi ... dua. (Subjek menunjukkan satu per satu sambil menyebutnya)
P: Ada gambar lain tak?
S: (Subjek hanya mendiamkan diri)
P: Gambar apa lagi yang Azam ada bila cikgu sebut enam bahagi dua?
S: Sama. Itu saja.
P: Cuba fikir lagi, ada gambar lain tak?
S: Tak ada.
P: Kalau cikgu sebut lapan bahagi empat, gambar apa yang ada dalam fikiran Azam?
S: (Subjek menulis ayat 8 ÷ 4 pada kertas yang disediakan)
P: Boleh beritahu apa yang Azam tulis?
S: Lapan bahagi empat.
P: Ada gambar lain tak untuk lapan bahagi empat?
S: . . . Tak ada
P: Betul, tak ada?
S: Tak ada.

Dalam petikan GM312, Azam menggambarkan enam bahagi dua dengan menulis ayat bahagi ‘6 ÷ 2’. Subjek juga menggambarkan lapan bahagi empat dengan menulis ayat bahagi ‘8 ÷ 4’.

Perwakilan

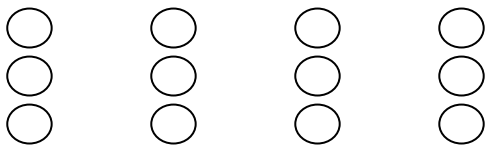
Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Azam mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan membentuk empat kumpulan butang bersaiz tiga. Tingkah laku beliau dipaparkan dalam Petikan PW321 yang berikut.

Petikan PW321

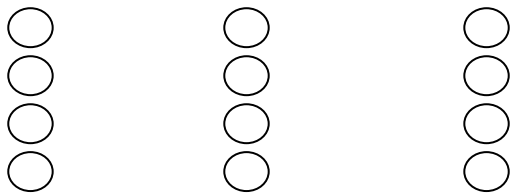
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4) Boleh Azam beritahu apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Dua belas bahagi empat. Kenapa kata dua belas bahagi empat?
S: (Subjek ketawa sambil menunjukkan ayat bahagi yang tertulis pada kad). Ini kan dua belas bahagi empat.
P: Boleh Azam tunjuk bagaimana dua belas bahagi empat menggunakan butang-butang ni (memberikan satu kotak butang)?
S: (Subjek menghitung dua belas dan kemudian menyusun seperti berikut):



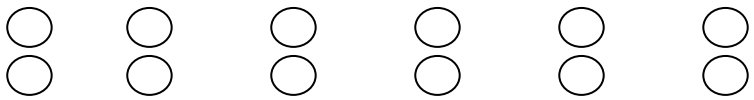
P: Dah siap?
S: Dah.
P: Boleh Azam jelaskan apa yang Azam buat ni?
S: Dua belas ... bahagi empat, ada empat. (Subjek menunjukkan
butang-butang yang telah dikumpulkan semasa menyebut empat)

P: Dua belas pada ayat ini (menunjukkan ayat 12 ÷ 4) rujuk pada apa dalam susunan ni (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).

S: Semua butang.
P: Ini (menunjukkan angka '4' pada ayat bahagi?
S: Empat baris (menunjukkan empat kumpulan yang telah disusun).
P: Ada berapa butang dalam setiap kumpulan?
S: Tiga.
P: Kenapa Azam letak tiga butang dalam setiap kumpulan ?
S: Sebab dua belas nak letak dalam empat baris.
P: Kenapa tak letak empat butang dalam satu baris?
S: Tak boleh. Nanti tak cukup untuk empat baris.
P: Mesti letak empat baris ke?
S: Ya, sebab bahagi empat.
P: Kalau dua belas bahagi tiga? Macam mana nak susun?
S: (Subjek menyusun semula butang-butang tersebut tiga-tiga sebanyak empat kumpulan.):

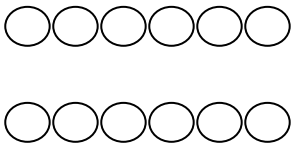


P: Kenapa kumpulkan dalam tiga baris macam ni (menunjukkan butang-butang yang telah disusun)?
S: Dua belas bahagi tiga.
P: Kalau dua belas bahagi enam, berapa butang akan dikumpulkan?
S: Enam (subjek menjawab sambil menolak dua kumpulan butang-butang yang telah disusun sebelumnya menjadi satu kumpulan).



P: Kenapa Azam menyusun macam tu?
S: Sebab dua belas bahagi enam.
P: Kalau dua belas bahagi dua berapa baris agaknya Azam akan bentuk?
S: Dua.
P: Kenapa Azam rasa dua?
S: Dua belas bahagi dua.
P: Boleh tak kita wakilkan susunan ini (menunjukkan susunan yang subjek buat untuk dua belas bahagi enam) dengan dua belas bahagi dua?

S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh? Ini pun dua baris (menunjukkan susunan subjek secara melintang)
S: Tak boleh. Kena susun macam ni. (Subjek menyusun semula butang-butang tersebut untuk mewakilkan dua belas bahagi dua)



P: Ini dua belas bahagi dua?
S: Ya.
P: Boleh tak kita wakilkan sebagai dua belas bahagi enam?
S: Tak boleh.

Dalam Petikan PW321, Azam mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan membentuk empat kumpulan bersaiz tiga. Beliau menjelaskan bahawa bilangan kumpulan yang perlu dibentuk bergantung kepada pembahagi. Misalnya, jika soalannya adalah bahagi empat, maka empat kumpulan akan dibentuk. Azam juga mengukuhkan penerangan beliau tersebut dengan mewakilkan 12 ÷ 3, 12 ÷ 6 dan 12 ÷ 2. Bagi ayat 12 ÷ 3 Azam mengumpulkan tiga kumpulan bersaiz empat, manakala bagi ayat 12 ÷ 6 pula subjek membentuk enam kumpulan bersaiz dua. Subjek juga mewakilkan 12 ÷ 2 dengan membentuk dua baris yang mempunyai enam biji butang.

Selain itu, subjek kajian menjelaskan bahawa angka dua belas yang terdapat pada ayat bahagi 12 ÷ 4 merujuk kepada kesemua butang yang disusunnya. Beliau juga berpendapat bahawa ‘bahagi empat’, pada ayat tersebut merujuk kepada bilangan kumpulan,

manakala jawapan kepada pembahagian tersebut merujuk kepada bilangan butang yang terdapat dalam setiap kumpulan.

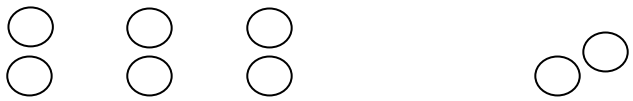
Di bahagian akhir Petikan PW321, Azam menjelaskan bahawa penyusunan yang dibentuk bagi 12 ÷ 3 dan 12 ÷ 4 adalah tidak sama kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai bilangan baris dan saiz yang berbeza Selain itu, Azam juga berpendapat bahawa ayat 12 ÷ 6 dan ayat 12 ÷ 2 adalah berbeza kerana ayat 12 ÷ 6 mempunyai enam baris butang manakala, ayat 12 ÷ 2 pula mempunyai dua baris butang.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

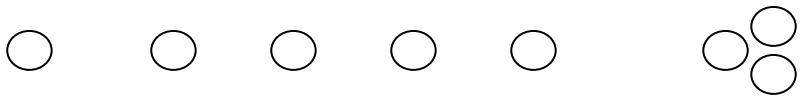
Azam mewakilkan ayat 8 ÷ 3 dengan membentuk tiga kumpulan yang mempunyai dua butang. Dua butang lagi diasingkan sebagai baki. Petikan PW322 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan PW322

P: Cuba baca yang ini. (Menunjukkan kad yang tertulis ayat '8 ÷ 3').
S: Lapan bahagi tiga.
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang ini (menunjukkan tiga puluh enam biji butang) bagi lapan bahagi tiga?
S: (Subjek mengira dan menyusun butang-butang tersebut seperti di bawah):



P: Boleh beritahu cikgu apa yang Azam buat?
S: Lapan bahagi tiga, ini baki. (subjek menunjukkan susunannya).
P: Kenapa ada baki?
S: Baki sebab tak cukup satu..
P: Kalau ada satu lagi?
S: Kalau ada satu lagi, boleh letak tiga baris.
P: Jadi dua butang tu tak boleh dikira ke?
S: Boleh... baki.
P: Jadi apa jawapan bagi lapan bahagi tiga?
S: Dua baki dua.
P: Macam mana dapat dua baki dua?
S: Ini dua (menunjukkan butang dalam setiap baris) ...ini dua (menunjukkan dua baki yang diasingkan)
P: Kalau lapan bahagi lima macam mana?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



S: Dua lagi tak cukup.
P: Apa yang tak cukup?
S: Kalau ada dua lagi boleh letak untuk semua baris (menunjukkan kumpulan yang mempunyai tiga butang).
P: Ini susunan Azam untuk lapan bahagi berapa??
S: Lima.
P: Dalam susunan ni (menunjukkan butang-butang yang telah disusun oleh subjek) yang mana menunjukkan ini (menunjukkan angka lapan pada ayat '8 ÷ 5')?
S: Semua (menunjukkan semua butang).
P: Yang ni (menunjukkan 5 pada ayat '8 ÷ 5')?
S: Lima baris (menunjukkan lima kumpulan butang).
P: Apa jawapan untuk ayat '8 ÷ 5' tadi?
S: .... Satu baki tiga.
P: Kenapa satu baki tiga?
S: Sebab ada satu butang dalam satu kumpulan
P: Yang ni (menunjukkan tiga butang yang diasingkan)
S: Baki tiga.
P: Ada cara lain nak tunjuk lapan bahagi lima?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW322, Azam mewakilkan 8 ÷ 3 dengan membentuk tiga kumpulan yang mengandungi dua biji butang di

dalamnya dan dua biji butang lagi diasingkan sebagai baki. Azam juga menjelaskan bahawa jika soalannya adalah lapan bahagi tiga, maka perlu membentuk tiga kumpulan yang mempunyai bilangan butang yang sama. Beliau juga berpendapat bahawa dua biji butang dianggap sebagai baki kerana baki tersebut tidak mencukupi untuk diagihkan kepada tiga kumpulan.

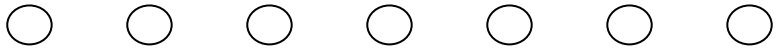
Bagi ayat 8 ÷ 5 pula, subjek membentuk lima kumpulan yang mempunyai hanya satu butang di dalamnya. Menurut subjek lagi, tiga lagi butang diambil kira sebagai baki kerana tidak mencukupi untuk diagihkan kepada lima kumpulan.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Azam mewakilkan ayat 7 ÷ 7 dengan membentuk tujuh kumpulan yang hanya mempunyai satu butang di dalamnya. Tingkah laku beliau dipaparkan dalam Petikan PW323 yang berikut.

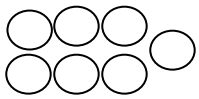
Petkan PW323

P: Boleh baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 7)
S: Tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang ini (menunjukkan tiga puluh enam biji butang)?
S: (Subjek mengambil tujuh butang dan menyusunnya dalam tujuh kumpulan seperti berikut):



P: Kenapa Azam susun macam tu?
S: Sebab tujuh butang kena bahagi tujuh.
P: Dalam susunan ni yang mana menunjukkan ini (menunjukkan tujuh yang terdapat pada sebelah kiri simbol bahagi)?
S: Semua butang. (Subjek menunjukkan semua butang yang telah disusunnya).
P: Yang ini merujuk kepada apa dalam susunan Azam (menunjukkan tujuh yang menjadi pembahagi)?
S: Tujuh kumpulan (subjek menunjukkan tujuh kumpulan yang dibentuknya).
P: Kenapa Azam kata tujuh kumpulan tu menunjukkan bahagi tujuh?
S: Sebab bahagi tujuh sama dengan tujuh kumpulan.
P: Kalau bahagi tujuh perlu bentuk tujuh kumpulan?
S: Ya.
P: Kalau bahagi empat perlu ada berapa kumpulan?
S: Empat
P: Ada cara lain Azam nak tunjuk tujuh bahagi tujuh?
S: ... Tak ada
P: Kalau dua bahagi dua macam mana? Boleh tunjuk dengan butang-butang ni?
S: (subjek menjawab sambil menyusun seperti berikut):

P: Boleh bagi tahu cikgu yang mana merujuk kepada bahagi dua dalam 2 ÷ 2?
S: Dua (subjek menunjukkan dua butang yang diletakkan secara berasingan)
P: Dua bahagi dua dapat berapa?
S: Satu.
P: Jawapan tu merujuk pada apa dalam susunan ini (menunjukkan susunan yang telah dibentuk oleh subjek)?
S: Satu butang (menunjukkan dua kumpulan yang telah dibentuk oleh subjek)
P: Ada tak cara lain Azam boleh tunjuk 2 ÷ 2?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh Azam tunjuk dengan butang-butang tadi bagi ayat ini (menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 1)?
S: Tujuh bahagi satu. (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Boleh Azam terangkan apa yang Azam baru buat?

S: Tujuh bahagi satu (subjek menunjukkan butang-butang susunannya).
P: Kenapa Azam kumpulkan dalam satu kumpulan?
S: Sebab bahagi satu.
P: Satu dalam ayat tujuh bahagi satu ni rujuk pada apa dalam susunan Azam?
S: Satu kumpulan.
P: Kenapa Azam kata satu rujuk kepada kumpulan?
S: Sebab tujuh bahagi satu ... satu kumpulan.
P: Kalau tujuh bahagi dua macam mana?
S: Kalau tujuh bahagi dua, dua kumpulan.
P: Baik, dalam susunan Azam ni yang mana menunjukkan tujuh?
S: Semua butang. (subjek menunjukkan susunannya).
P: Bahagi satu?
S: Kumpulan (subjek menunjukkan satu kumpulan yang dibentuknya).
P: Tujuh bahagi satu sama dengan berapa?
S: Tujuh.
P: Rujuk pada yang mana dalam susunan Azam tadi?
S: Tujuh. (subjek menunjukkan semua butang yang terdapat dalam susunannya).
P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh bahagi satu?
S: Tak ada.
P: Boleh tak kita tulis ayat tujuh bahagi tujuh untuk susunan ini (menunjukkan susunan subjek bagi tujuh bahagi satu)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab yang ni bahagi satu, tadi bahagi tujuh.
P: Ada lagi tak perbezaan antara tujuh bahagi satu dan tujuh bahagi tujuh?
S: ... Jawapan pun tak sama.
P: Apa lagi yang beza?
S: ... Itu je.
P: Yang sama antara dua-dua ayat tadi ada tak?
S: Semua butang ada tujuh.
P: Ada persamaan yang lain?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW323, Azam mewakilkan tujuh bahagi tujuh dengan membentuk tujuh kumpulan bersaiz satu. Subjek berpendapat bahawa beliau membentuk tujuh kumpulan kerana merujuk pembahaginya. Subjek juga menjelaskan empat kumpulan perlu

dibentuk untuk bahagi empat dan dua kumpulan pula perlu dibentuk untuk bahagi dua.

Bagi mewakili tujuh bahagi satu pula subjek membentuk satu kumpulan bersaiz tujuh. Subjek juga berpendapat bahagi satu merujuk bilangan kumpulan. Azam juga berpendapat ayat tujuh bahagi tujuh tidak boleh digunakan bagi mewakili susunan yang dibentuk bagi tujuh bahagi satu kerana saiz yang terdapat pada kumpulan adalah satu dan bukan tujuh. Selain pada itu, Azam berpendapat bahawa kedua-dua susunan yang dibentuk bagi tujuh bahagi tujuh dan tujuh bahagi satu adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza.

Gambar Rajah

Azam telah mewakilkan ketiga-tiga gambar rajah yang diberi satu persatu dengan menulis ayat bahagi. Subjek juga menjelaskan maksud setiap angka dalam ayat bahagi yang telah ditulisnya merujuk gambar rajah yang diberi. Petikan PW324, PW325, dan PW326 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh beliau.

Petikan PW324

P: Cuba lihat gambar ni (menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas bola). Ini gambar apa?
S: Bola.
P: Ada berapa biji bola?
S: (Subjek menghitung dan menjawab). Lima belas.

P: Sekarang boleh Azam buat ayat bahagi macam tadi untuk gambar ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 5 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Lima belas bahagi lima sama dengan tiga.
P: Kenapa Azam tulis lima belas?
S: Sebab ada lima belas bola dalam gambar.
P: Yang ini (menunjukkan lima)?
S: Lima... lima kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan tiga)?
S: Tiga bola satu kumpulan (menunjukkan satu kumpulan).
P: Ada cara lain tulis ayat bahagi bagi gambar rajah tadi?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 3 = 5$$

P: Cuba baca.
S: Lima belas bahagi tiga sama dengan lima.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Kenapa sama?
S: Sebab tiga ini (menunjukkan ayat $15 \div 3 = 5$) sama dengan tiga ini (menunjukkan ayat $15 \div 5 = 3$)
P: Sama macam mana?
S: Tiga bola.
P: Apa lagi yang sama?
S: Lima dalam dua-dua ayat sama dengan lima kumpulan.
P: Lagi, ada lagi tak yang sama?
S: Lima belas, sama dengan lima belas bola.
P: Ada lagi yang sama?
S: Tak ada.
P: Yang beza ada tak?
S: ... Tak ada.

Dalam Petikan PW324, Azam mewakilkan gambar rajah yang diberi dengan menulis ayat bahagi $15 \div 3 = 5$ dan $15 \div 5 = 3$. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat yang ditulisnya itu adalah sama.

Petikan PW325

P: Cuba lihat gambar ni. (Menunjukkan gambar enam belas ekor kura-kura). Gambar apa ni?
S: Kura-kura.
P: Baik. Boleh buat ayat bahagi untuk gambar ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$16 \div 4 = 4$$

P: Boleh baca apa yang Azam tulis?
S: Enam belas bahagi empat sama dengan empat.
P: Kenapa Azam tulis enam belas?
S: Sebab kura-kura ada enam belas.
P: Yang ini (menunjukkan empat selepas simbol bahagi)?
S: Empat kumpulan.
P: Yang ni (menunjukkan angka 4 pada hasil bahagi)?
S: Empat kura-kura.
P: Ada ayat lain tak?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$16 \div 4 = 4$$

P: Ayat ni sama tak dengan yang tadi?
S: Sama.
P: Kenapa sama?
S: Sebab kura-kura ada empat, kumpulan pun empat.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW325, Azam menulis ayat bahagi $16 \div 4 = 4$ bagi mewakili gambar rajah yang diberi. Subjek juga menjelaskan bahawa empat selepas simbol bahagi pada ayat bahagi merujuk bilangan kumpulan manakala, empat selepas tanda sama dengan merujuk saiz kumpulan. Selain itu, Azam juga menulis satu lagi ayat bahagi iaitu, $16 \div 4 = 4$ yang merupakan ayat yang serupa seperti sebelumnya. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat

yang ditulisnya adalah sama kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang sama.

Petikan PW326

P: Cuba Azam tengok gambar ini. Boleh tulis ayat bahagi untuk gambar ni?
S: (Subjek menghitung bilangan jalur dan menulis seperti berikut):

$$21 \div 3 = 7$$

P: Cuba baca.
S: Dua puluh satu bahagi tiga sama dengan tujuh.
P: Kenapa tulis dua puluh satu?
S: Sebab ada dua puluh satu garis (menunjukkan jalur-jalur yang terdapat pada gambar rajah).
P: Yang ini (menunjukkan tujuh)?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga? Yang mana menunjukkan tiga dalam gambar rajah?
S: Ada tiga kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan angka tujuh)?
S: Ada tujuh garis (menunjukkan satu kumpulan dalam gambar rajah).
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$21 \div 7 = 3$$

P: Cuba Azam baca.
S: Dua puluh satu bahagi tujuh sama dengan tiga.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Kenapa Azam rasa sama?
S: Sebab ada tiga kumpulan, jadi kalau tulis bahagi tiga sama dengan jawapan tiga.
P: Macam mana dengan tujuh ni?
S: Pun sama. Nak tulis bahagi tujuh sama dengan jawapan tujuh.
P: Ada cara lain tak nak menulis ayat bahagi untuk gambar ini?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW326, Azam mewakilkan gambar rajah selanjar yang diberi dengan menulis ayat 21 ÷ 3 = 7. Subjek juga menjelaskan tiga pada ayat bahagi tersebut merujuk bilangan kumpulan dan tujuh pula merujuk saiz kumpulan. Selain itu, Azam menulis satu lagi ayat bahagi iaitu, 21 ÷ 7 = 3 bagi mewakili gambar rajah tersebut. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat tersebut adalah sama kerana pembahagi dan hasil bahagi boleh saling bertukar tempat.

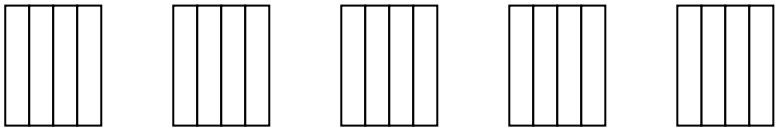
Penolakan Berulang

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Azam mewakilkan ayat 20 ÷ 5 dengan membentuk lima kumpulan bersaiz empat. Subjek juga mengeluarkan lima penyedut minuman secara berulang daripada dua puluh penyedut minuman. Petikan PW327 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan PW327

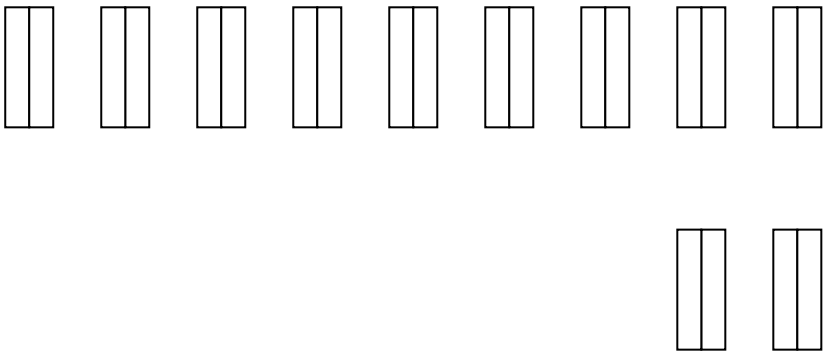
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5). Boleh Azam baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua puluh bahagi lima.
P: Boleh Azam tunjuk dengan penyedut minuman ini bagaimana dua puluh bahagi lima?
S: (Subjek menyusun penyedut minuman seperti berikut):



P: Kenapa susun macam ini (menunjukkan penyedut minuman yang telah disusun).

S: Sebab dua puluh nak bahagi lima (subjek menunjukkan angka lima pada kad).

P: Kalau dua puluh bahagi sepuluh, bagaimana?
S: (Subjek menyusun semula penyedut minuman yang diberi seperti berikut):



P: Kenapa himpunkan dua penyedut dalam satu kumpulan?
S: Sebab bahagi sepuluh.
P: Baiklah. Balik kepada soalan tadi, dua puluh bahagi lima. Apa jawapan yang Azam akan dapat?

S: (Subjek menyususn semula kepada empat bahagian dan memberi jawapan). Empat

P: Kenapa empat?

S: Dua puluh bahagi lima memang empat.

P: Kalau ikut susunan Azam tadi?

S: Empat dalam satu kumpulan (menunjukkan empat penyedut minuman yang telah disusun).

P: Boleh Azam tunjuk cara lain bagi dua puluh bahagi lima?

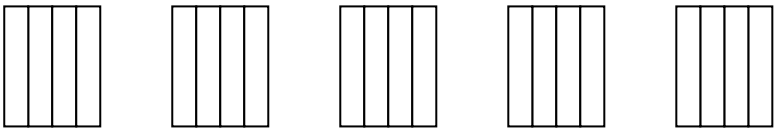
S: Tak tahu cara lain.

P: Buat buat cerita bagi dua puluh bahagi lima?

S: Saya ada dua puluh batang pensel, nak bahagi kepada lima orang.

P: Boleh tunjuk dengan penyedut minuman?

S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Boleh terangkan susunan Azam tu?

S: Ini dua puluh pensel (menunjukkan pada penyedut minuman).

Bahagi lima orang. Seorang dapat empat.

P: Macam mana tahu seorang dapt empat?

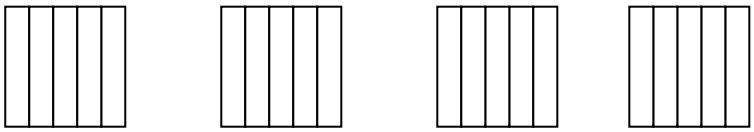
S: Sini ada empat (menunjukkan penyedut minuman)

P: Ada cara lain untuk dua puluh bahagi lima?

S: Tak ada.

P: Cuba lihat balik gambar ini (menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas bola). Tadi Azam tulis dua ayat dan Azam kata kedua-dua ayat tu sama. Jadi, ada tak cara lain nak tunjuk dua puluh bahagi lima?

S: Ada (subjek menyusun seperti berikut):



P: Boleh jelaskan susunan yang ini? Ada berapa penyedut minuman dalam satu kumpulan?

S: Ada lima.

P: Lima tu rujuk pada apa pada ayat bahagi?

S: Bahagi lima.

P: Kumpulan rujuk pada apa?

S: ...Jawapan dia.

P: Susunan ini sama tak dengan yang tadi?

S: Tak sama.

P: Kenapa?

S: Kumpulan ada empat. Tadi lima.

P: Ada lagi tak yang tak sama?

S: Straw tak sama. Sini ada lima yang tadi empat.

P: Baik yang ini kita simpan dulu. Sekarang boleh tak Azam baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5)?

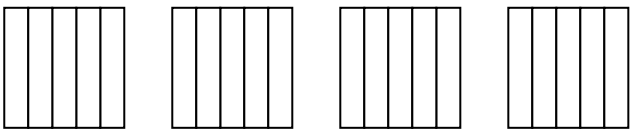
S: Dua puluh tolak lima.

P: Baik boleh Azam tunjuk macam tadi menggunakan penyedut minuman yang lain?

S: (Subjek meletakkan dua puluh penyedut minuman kemudian mengasingkan lima daripada dua puluh penyedut minuman seperti berikut). Dua puluh tolak lima. Baki lima belas

P: Tadi dah tolak lima. Boleh Azam tolak lima lagi macam tadi sampai habis? Setiap lima tu asingkan.

S: (Subjek mengasingkan lima lagi sehingga habis seperti berikut): Habis



P: Habis. Tadi Azam keluarkan lima berapa kali?

S: Empat

P: Tadi dua puluh bahagi lima dapat berapa? Cuba tengok susunan tadi?

S: Empat.

P: Yang baru Azam buat tadi, 20 – 5 secara berulang perlu tolak lima berapa kali?

S: Empat.

P: Sama tak susunan bagi kedua-dua ayat tadi?

S: Sama.

P: Apa yang sama?

S: Kumpulan dan jumlah straw satu kumpulan.

P: Ada lagi?

S: Tak ada.

P: Yang beza ada tak?

S: Tak ada.

P: Apa kaitan ayat bahagi dan ayat tolak?

S: Dua-dua pun sama.

P: Sama macam mana?

S: Sama sebab kumpulan sama, straw pun sama.

P: Jadi apa kaitan bahagi dengan tolak?

S: Sama. Bahagi tu sama kalau tolak empat kali.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh bahagi lima?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW327, Azam mewakilkan 20 ÷ 5 dengan membentuk lima kumpulan bersaiz empat. Subjek juga membentuk cerita yang juga menunjukkan lima kumpulan bersaiz empat. Selain itu, subjek juga mewakilkan ayat bahagi 20 ÷ 5 dengan membentuk empat kumpulan bersaiz lima.

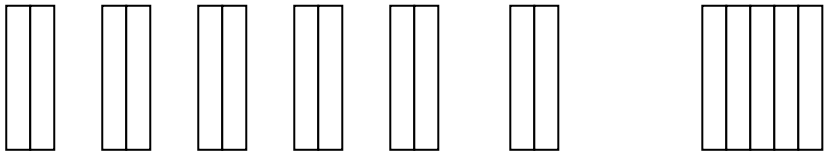
Bagi ayat 20 - 5 pula, Azam menolak lima penyedut minuman secara berulang-ulang daripada dua puluh penyedut minuman. Selain itu, subjek berpendapat bahawa penolakan lima daripada dua puluh secara berulang sebanyak empat kali adalah sama dengan dua puluh bahagi lima kerana memperoleh bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang sama.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

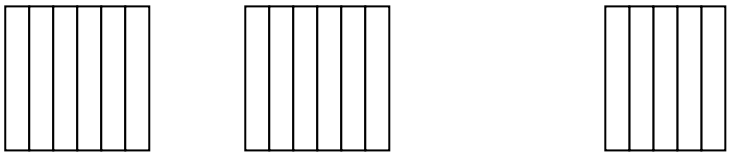
Azam mewakilkan ayat bahagi 17 ÷ 6 dengan membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz lima. Subjek juga menunjukkan pembahagian secara penolakan berulang dengan mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang sehingga tinggal baki sebanyak lima. Petikan PW328 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW328

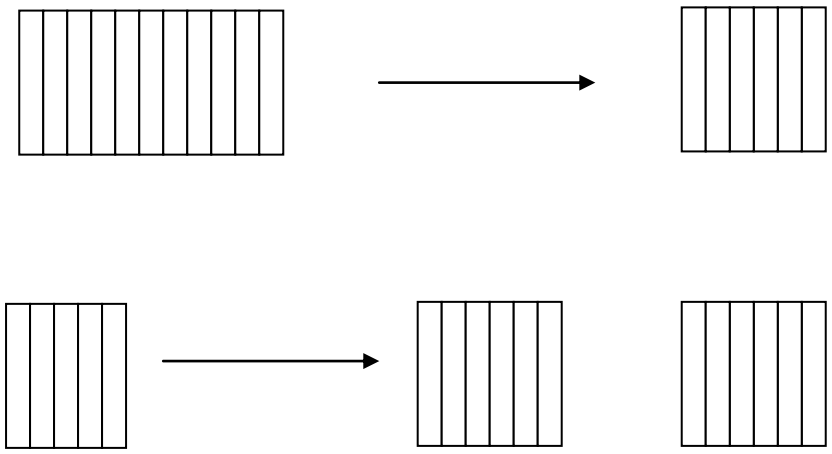
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6). Cuba baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Tujuh belas bahagi enam.
P: Baik, boleh tunjuk dengan penyedut minuman macam mana tujuh belas bahagi enam?
S: (Subjek menghitung tujuh belas penyedut minuman dan kemudian mengagihkannya kepada enam bahagian).



S: (Subjek meletakkan penyedut minuman yang ketiga dan kemudian mengeluarkannya semula).
P: Dah siap ke? Yang Azam pegang tu apa?
S: Lebih, baki.
P: Ada baki?
S: Ya.
P: Baki sebanyak berapa?
S: Lima.
P: Jadi berapa jawapan bagi yang ini (menunjukkan ayat bahagi 17 ÷ 6)?
S: Dua baki lima.
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat bahagi tadi?
S: Ada (subjek menyusun seperti berikut):



P: Yang ni ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan satu kumpulan yang bersaiz lima)?
S: Baki.
P: Yang ni berapa pula jawapannya?
S: Dua baki lima.
P: Baik, kita tinggalkan dulu yang ini. Sekarang boleh Azam tunjuk ayat ini macam tadi (menunjukkan ayat 17 − 6).
S: (Subjek mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang dan meletakkannya secara berasingan).



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Berapa jawapannya?
S: Dua baki lima.
P: Berapa kali Azam dapat keluarkan enam?
S: Dua kali, yang lebih tu baki.
P: Tak boleh tolak lagi ke daripada yang lebih tu?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab ada lima saja.
P: Kalau ada enam boleh tak?
S: Boleh
P: Susunan ni sama tak dengan yang tadi yang Azam buat untuk tujuh belas bahagi enam?
S: Sama.
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan kumpulan bersaiz lima)?
S: Sama juga.
P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh belas bahagi enam?
S: Tak ada

Dalam petikan di atas, Azam mewakilkan ayat 17 ÷ 6 dengan membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz lima dengan menggunakan penyedut minuman yang disediakan oleh pengkaji. Subjek juga menunjukkan satu lagi perwakilan iaitu, dengan membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima. Menurut Azam, satu kumpulan yang bersaiz lima merupakan

baki dalam pembahagian tersebut. Subjek juga memperoleh saiz baki yang sama dalam kedua-dua penyusunan.

Bagi ayat tolak 17 – 6 pula, Azam meletakkkan tujuh belas penyedut minuman dan kemudian enam daripadanya dan letakkan di sebelah kanan. Subjek mengulangi penolakan tersebut sehingga tinggal baki sebanyak lima penyedut minuman. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua penyusunan adalah sana kerana bahagi boleh dilakukan dengan menolak pembahagi sehingga saiz baki kurang daripada pembahagi.

Masalah Berkotak

Menentukan Nama Kotak

Azam berpendapat bahawa 'kotak ajaib' dapat membahagi nombor-nombor yang dimasukkan ke dalamnya dan memberikan jawapan. Beliau juga menunjukkan apa yang berlaku di dalam kotak ajaib secara lukisan. Tingkah laku yang tunjukkan oleh Azam dipaparkan dalam Petikan MK331 berikut.

Petikan MK331

P: (Menunjukkan satu kotak). Kotak ini apabila kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A) satu nombor akan keluar melalui lubang ini (menunjukkan lubang B). Dua nombor masuk di sini (menunjukkan lubang A), kotak ni proses kemudian jawapannya akan keluar di sini. (menunjukkan lubang B) Sekarang kita masukkan dua nombor ya. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 14)?

S: Empat belas.

P: Kita masukkan nombor tu di lubang A. Ini pula nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 2)?

S: Dua.

P: Baik. Nombor ni pun kita masukkan di sini (memasukkan nombor tersebut di A). Boleh ingat tak kedua-dua nombor tadi?

S: Boleh. Empat belas dan dua.

P: Baik. Kita tengok nombor apa yang akan keluar dari sini. Ini nombor apa (Menunjukkan kad yang tertulis 7)?

S: Tujuh.

P: Apa kotak ini dah buat kepada empat belas dengan dua tadi, sehingga menghasilkan nombor tujuh. Empat belas dengan dua menghasilkan tujuh.

S: Bahagi.

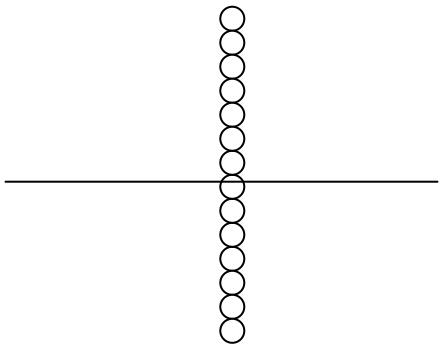
P: Kenapa bahagi?

S: Sebab empat belas bahagi dua sama dengan tujuh.

P: Macam mana dengan tolak?

S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab empat belas tolak dua sama dengan dua belas.
P: Macam mana dengan darab ke, tambah ke?
S: Bukan... bahagi
P: Kita cuba satu set lagi. (Menunjukkan kad yang tertulis 10). Ini nombor apa?
S: Sepuluh.
P: Kita masukkan nombor sepuluh di lubang ni. (Memasukkan kad tersebut di lubang A.) Nombor apa ni (menunjukkan kad yang tertulis 5)?
S: Lima.
P: Baik. Kita masukkan dalam lubang ni macam tadi (memasukkan kad tersebut ke dalam lubang A). Nombor apa yang keluar dari sini (menunjukkan kad yang keluar dari lubang B).
S: Dua.
P: Nombor yang masuk sepuluh dan lima, nombor yang keluar dua. Tadi nombor yang masuk empat belas dan dua, nombor yang keluar tujuh. Apa agaknya kotak ini dah buat kepada nombor-nombor tadi?
S: Bahagi. Sepuluh bahagi lima sama dengan dua.
P: Azam pasti memang bahagi.
S: Ya.
P: Kita cuba satu lagi. Ini apa (menunjukkan nombor 4)?
S: Empat.
P: Ini (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Nombor yang akan keluar Azam rasa nombor apa?
S: Dua
P: Kita tengok nombor apa yang ada di sini (mengeluarkan nombor 2 dari lubang B).
S: Dua
P: Jadi apa kotak ni dah buat?
S: Bahagi.
P: Bahagi? Kenapa bahagi?
S: Sebab sepuluh kalau bahagi dengan lima sama dengan dua.
P: Bukan darab?
S: Bukan. Bahagi.
P: Kita cuba satu set lagi. Ini apa (menunjukkan 8)?
S: Lapan.
P: Ini (menunjukkan 4)?
S: Empat.
P: Jawapannya Azam rasa-rasa apa?
S: Dua.
P: Kita tengok jawapan sebenar (mengeluarkan nombor 2 dari lubang B)
S: Dua

P: Jadi apa kotak ni dah buat?
S: Bahagi.
P: Bukan darab ya?
S: Bukan.
P: Baik sekarang boleh Azam tunjuk apa kotak dah buat kepada nombor-nombor empat belas dan dua hingga dapat nombor tujuh? Azam boleh lukis.
S: (Subjek melukiskan seperti berikut):



P: Boleh jelaskan tentang lukisan Azam ni?
S: Empat belas bahagi dua. (Subjek menunjukkan lukisan beliau).
P: Jawapannya yang mana satu?
S: Tujuh. (subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang diagihkan kepada dua bahagian)
P: Ada cara lain nak tunjuk empat belas bahagi dua?
S: ... Tak ada
P: Boleh Azam beritahu ada berapa dua dalam empat belas?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Tadi Azam lukis empat belas bulatan (menunjukkan lukisan subjek), jika cikgu nak Azam kumpulkan dua-dua, berapa banyak kumpulan Azam boleh dapat?
S: Boleh lukis?
P: Boleh.
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Boleh jelaskan lukisan Azam?
S: Kumpulan dua bola.
P: Lukisan ini sama tak dengan lukisan tadi (menunjukkan kedua-dua lukisan)
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ni (menunjukkan gambar pertama) bahagi dua, yang ini (menunjukkan gambar kedua) bahagi tujuh kumpulan.

P: Jadi, tak sama ke kedua-duanya?
S: Tak.
P: Ada tak apa-apa persamaan antara kedua-duanya?
S: Semua ada empat belas bola.
P: Ada lagi yang sama?
S: Tak ada.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi untuk nombor-nombor tadi?
S: (Subjek menuliskan seperti berikut):

$$14 \div 7$$

P: Boleh jelaskan apa yang Azam tulis tu?
S: Empat belas bahagi tujuh (subjek menjelaskan sambil menunjukkan ayat yang ditulisnya).
P: Sama dengan berapa?
S: Dua.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$14 \div 7 = 2$$

P: Ayat ni untuk lukisan yang mana? Kedua-duanya ke?
S: Tak. Yang ini (menunjukkan lukisan beliau yang kedua).
P: Boleh Azam beritahu cikgu, tujuh pada ayat tadi merujuk kepada apa pada lukisan Azam?
S: Tujuh bahagian (subjek menjawab sambil menunjukkan lukisan kedua beliau).
P: Yang ini (menunjukkan angka dua pada ayat bahagi)?
S: Dua bola (subjek menunjukkan dua bulatan yang terdapat pada setiap bahagian lukisan beliau).
P: Boleh tak Azam gunakan ayat bahagi tu bagi lukisan Azam yang pertama tadi?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Ayat dia lain... macam ni. (Subjek menulis seperti berikut):

$$14 \div 2 = 7$$

P: Tujuh disini merujuk pada apa dalam lukisan Azam?
S: Tujuh bola (subjek menunjukkan bulatan yang terdapat pada setiap bahagian dalam lukisan beliau).
P: Yang ini pula (menunjukkan angka 2 pada persamaan)?
S: Bahagi dua... dua bahagian (subjek menunjukkan lukisannya yang dibahagi dua).
P: Sekarang boleh Azam tuliskan ayat bahagi bagi apa yang berlaku dalam kotak tu bagi nombor sepuluh dan lima tadi?
S: (Subjek tidak menjawab seolah-olah sedang berfikir).

P: Tadi ingat tak kita masukkan nombor ini (menunjukkan nombor 10) dan ini (menunjukkan nombor 5) di lubang A dan nombor ini (menunjukkan nombor 2) keluar dari lubang B.
S: (Subjek menulis ayat berikut sambil berkata) sepuluh bahagi lima sama dengan dua.

$$10 \div 5 = 2$$

P: Boleh Azam tunjuk secara melukis, apa yang berlaku dalam kotak semasa nombor-nombor tersebut berada dalam kotak?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Ada cara lain nak tunjukkan ayat tadi?
S: Tak ada.
P: Macam mana kalau nak kumpulkan dalam kumpulan lima-lima?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Boleh jelaskan apa yang Azam lukis tu?
S: Sepuluh bahagi dua sama dengan lima.
P: Sama tak dengan lukisan tadi?
S: Tak sebab yang ni bahagi dua, tadi bahagi lima.
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk lukisan yang ini (menunjukkan lukisan terbaru subjek)
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$10 \div 2 = 5$$

P: Dua pada ayat tu rujuk pada apa dalam lukisan Azam?
S: Bahagi dua (subjek menunjukkan bola-bola yang diagihkan kepada dua bahagian).
P: Kalau dua dalam ayat tadi macam mana (menunjukkan ayat $10 \div 5 = 2$)?
S: Ada dua bola dalam satu kumpulan.
P: Yang ini rujuk pada apa dalam lukisan (menunjukkan lima pada ayat $10 \div 5 = 2$)?
S: Lima kumpulan (menunjukkan lukisan beliau bagi ayat $10 \div 5 = 2$)
P: Yang ini pula (menunjukkan lima pada ayat $10 \div 2 = 5$)?
S: Lima bola dalam satu kumpulan

Dalam Petikan MK331, Azam berpendapat bahawa operasi yang dilakukan oleh ‘kotak ajaib’ adalah operasi bahagi. Azam menjelaskan bahawa sekiranya operasi tolak yang berlaku di dalam kotak, nombor yang akan keluar apabila empat belas dan dua dimasukkan adalah dua brlas dan bukannya tujuh. Subjek juga dapat menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B, apabila dua nombor di masukkan ke dalam kotak.

Selain itu, Azam menjelaskan operasi yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Bagi mewakili ayat 14 ÷ 2, subjek melukis empat belas biji bola yang dibahagi kepada dua bahagian. Setiap bahagian mempunyai tujuh bola. Subjek juga membentuk satu lagi lukisan yang mempunyai tujuh kumpulan bersaiz dua. Namun demikian, subjek berpendapat bahawa kedua-dua lukisan merujuk ayat bahagi yang berbeza. Bagi lukisan pertama, subjek menulis ayat bahagi 14 ÷ 2 = 7, manakala bagi lukisan kedua pula subjek menulis ayat bahagi 14 ÷ 7 = 2. Subjek berpendapat bahawa pembahagi dalam ayat bahagi merujuk bilangan kumpulan atau bahagian yang dapat dibentuk.

Bagi ayat 10 ÷ 5 pula, Azam melukis lima kumpulan bola bersaiz dua. Subjek juga menulis ayat bahagi yang lengkap bagi lukisan tersebut iaitu, 10 ÷ 5 = 2. Selain itu, subjek juga melukis satu lagi lukisan apabila pengkaji meminta melukis dalam kumpulan lima. Lukisan tersebut mengandungi dua kumpulan bersaiz lima.

Walau bagaimanapun, Azam berpendapat bahawa ayat 10 ÷ 5 = 2 tidak boleh mewakili lukisan keduanya itu. Sebaliknya, subjek menulis ayat 10 ÷ 2 = 5 sebagai ayat yang mewakili lukisan yang mempunyai dua kumpulan bersaiz lima itu. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisan serta ayat bahagi adalah tidak sama kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza.

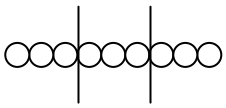
Menentukan Hasil Bahagi

Azam menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Subjek juga menjelaskan operasi yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Petikan MK332 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjuk oleh Azam.

Petikan MK332

P: Tadi, Azam kata proses yang berlaku dalam kotak ini adalah bahagi. Jadi nama kotak ni bahagi Sekarang kita akan masukkan nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis 9). Nombor berapa ni?
S: Sembilan.
P: Kita masukkan di sini (memasukkan kad tersebut ke dalam Kotak melalui lubang A). Yang ini nombor apa? (menunjukkan kad yang tertulis angka tiga)?
S: Tiga.
P: Kita masukkan juga nombor ni (memasukkan nombor tersebut ke dalam lubang B). Nombor apa agaknya yang akan keluar dari kotak ni?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga.
S: Sebab sembilan bahagi tiga sama dengan tiga.
P: Azam pasti?

S: Ya, pasti.
P: Boleh Azam tunjuk apa yang kotak tu buat kepada sembilan dan tiga hingga dapat jawapan tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Apa yang Azam lukis tu, boleh jelaskan?
S: Sembilan bola bahagi tiga sama dengan tiga (Subjek menunjukkan lukisannya).
P: Ada cara lain nak tunjuk proses tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut dan menjawab). Sama.

P: Apa yang sama?
S: Sama macam tadi.
P: Sama macam lukisan tadi?
S: Ya.
P: Azam rasa proses yang mana berlaku dalam kotak tu? Cara pertama atau kedua atau kedua-duanya?
S: Cara pertama dan kedua.
P: Kenapa agaknya?
S: Sebab dua-dua pun sama. Dapat jawapan tiga.
P: Boleh Azam tuliskan ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \div 3 = 3$$

P: Angka sembilan ni merujuk kepada bahagian mana dalam lukisan?
S: Semua.
P: Yang ni (menunjukkan 3 pada pembahagi)?
S: Tiga. (menunjukkan tiga bahagian).
P: Yang ini (menunjukkan 3 pada hasil bahagi)?
S: Tiga bola (subjek menunjukkan bulatan yang terdapat pada setiap bahagian)
P: Tadi kita masukkan nombor sembilan dan tiga. Sekarang sekiranya nombor yang masuk tu sembilan puluh dan tiga, nombor apa agaknya yang akan keluar dari lubang B.
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Kita masukkan sembilan puluh dan tiga, nombor apa yang patut keluar?
S: Tiga puluh.
P: Kenapa Azam rasa tiga puluh?
S: Sebab sembilan puluh bahagi tiga sama dengan tiga puluh.

P: Kalau kita ganti sembilan puluh tadi dengan sembilan ratus, macam mana?
S: Sembilan ratus?
P: Ya, kita masukkan sembilan ratus dan tiga.
S: Jawapannya tiga ratus.
P: Kenapa tiga ratus?
S: Sebab sembilan ratus bahagi tiga sama dengan tiga.
P: Sekarang kita cuba dengan nombor lain. Ini apa (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 1)?
S: Satu.
P: Apa agaknya yang akan keluar dari lubang ini (menunjukkan lubang B)?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Sebab dua bahagi satu sama dengan dua.
P: Bukan tolak?
S: Bukan. Bahagi.
P: Kalau dua tadi kita gantikan dengan dua puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua puluh.
P: Kenapa dua puluh?
S: Dua puluh bahagi satu sama dengan dua puluh.
P: Kalau kita ganti dengan dua ratus, nombor apa yang akan keluar?
S: Dua ratus.
P: Kenapa dua ratus?
S: Dua ratus bahagi satu sama dengan dua ratus.
P: Kita cuba dengan nombor ini (menunjukkan nombor 4)
S: Empat
P: Dan nombor ini (menunjukkan 2)
S: Dua
P: Kita masukkan di sini (menunjukkan lubang A) nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua.
P: Kenapa?
S: Empat bahagi dua sama dengan dua
P: Bukan tolak?
S: Bukan.
P: Empat tolak dua sama dengan dua juga.
S: ...Tolak pun boleh, tapi kotak tu bahagi.
P: Kalau kita gantikan empat dengan empat puluh, nombor apa yang akan keluar?
S: Dua puluh sebab empat puluh bahagi dua sama dengan dua puluh.
P: Boleh Azam tuliskan ayat bahagi untuk proses tu?
S: (Subjek menulis ayat berikut):

$$40 \div 2 = 20$$

P: Kalau empat puluh diganti dengan empat ratus?
S: Dua ratus
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menuliskan ayat berikut):

$$400 \div 2 = 200$$

P: Sekarang kita cuba dengan nombor ini (menunjukkan nombor 8)?
S: Lapan.
P: Dan nombor ini (menunjukkan 3)?
S: Tiga.
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: (Subjek melakukan pembahagian panjang seperti berikut dan menjawab) Dua baki dua

$$\begin{array}{r} \underline{2} \\ 3\ )\,8 \\ -\ \underline{6} \\ 2 \end{array}$$

P: Kenapa dua baki dua?
S: Sebab lapan bahagi tiga sama dengan dua baki dua.
P: Boleh Azam tunjuk atau lukiskan proses yang berlaku dalam kotak?
S: (Subjek melukis lapan bulatan, dan cuba beberapa cara untuk mengagihkan kepada tiga bahagian tetapi tidak berjaya). Tak boleh.
P: Tak boleh bahagi?
S: Tak tahu.
P: Azam rasa proses apa yang berlaku dalam kotak?
S: Bahagi.
P: Kalau bahagi, boleh tunjuk macam mana dia bahagi?
S: Tak tahu lukis
P: Tak apa, boleh tulis ayat bahagi untuk lapan dan tiga?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 3 = 2 \text{ baki } 2$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi bagi proses tu?
S: Tak ada.

Dalam Petikan MK332 Azam menggunakan kaedah operasi bahagi untuk menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B. Azam juga berpendapat bahawa apabila nombor sembilan dan tiga dimasukkan ke dalam kotak, nombor yang akan keluar adalah tiga. Selain itu, subjek berpendapat bahawa nombor tiga puluh akan keluar sekiranya nombor sembilan puluh dan tiga dimasukkan ke dalam kotak. Subjek juga berpendapat sekiranya nombor sembilan ratus dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak, nombor yang akan keluar adalah tiga ratus.

Bagi nombor dua dan satu yang di masukkan ke dalam kotak pula, subjek berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua. Dengan cara yang sama, subjek menentukan nombor yang akan keluar apabila nombor dua puluh dan satu dimasukkan adalah dua puluh, dan nombor yang akan akan keluar apabila dua ratus dan satu dimasukkan adalah dua ratus.

Bagi nombor empat dan dua yang dimasukkan ke dalam kotak, Azam berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua. Subjek juga menjelaskan operasi yang berlaku di dalam kotak adalah bahagi dan bukan operasi tolak. Selain itu, subjek menulis ayat $40 \div 2 = 20$ bagi mewakili operasi yang berlaku di dalam kotak apabila nombor empat puluh dan dua dimasukkan ke dalamnya. Subjek juga menulis ayat bahagi $400 \div 2 = 200$ bagi operasi yang berlaku antara empat ratus dan dua.

Azam berpendapat nombor yang akan keluar apabila nombor lapan dan tiga dimasukkan ke dalam kotak adalah dua baki dua. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang bagi memperoleh hasil bahagi. Selain itu subjek menulis ayat bahagi 8 ÷ 3 = 2 baki 2 bagi mewakili operasi yang berlaku apabila lapan dan tiga dimasukkan ke dalam kotak.

Tafsiran Ayat Matematik

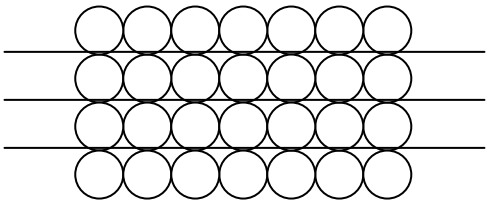
Ayat Bahagi

Ayat bahagi tanpa baki

Azam mentafsirkan ayat bahagi 28 ÷ 4 dengan melukis empat kumpulan bola yang bersaiz tujuh. Subjek juga menulis ayat bahagi 28 ÷ 4 = 7. Petikan TA341 yang berikut memaparkan cara subjek mentafsir ayat-ayat yang dikemuka kepadanya.

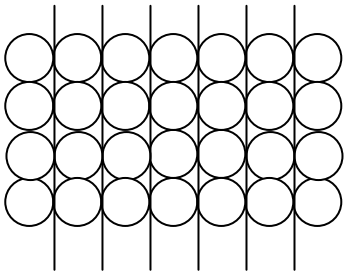
Petikan TA341

P: Cuba baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Baik, sekarang boleh Azam terangkan macam mana dua puluh lapan bahagi empat tu? Azam boleh lukis ke?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada kertas):



P: Kenapa Azam buat garis seperti itu?
S: Sebab nak bahagi.
P: Ada berapa bahagian di situ?
S: Empat.
P: Kenapa buat empat bahagian?
S: Sebab kena bahagi empat
P: Macam mana tau kena bahagi empat?
S: Soalan dia dua puluh lapan bahagi empat.
P: Kalau dua puluh lapan bahagi dua, berapa kumpulan agaknya?

S: Dua
P: Apa jawapan untuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: Tujuh.
P: Macam mana Azam dapat tujuh?
S: Sebab ada tujuh bahagian (subjek menunjukkan lukisannya).
P: Dua puluh lapan ni rujuk pada bahagian mana dalam lukisan?
S: Semua ada dua puluh lapan bola (subjek menunjukkan keseluruhan lukisannya).
P: Yang ini (menunjukkan nombor empat)?
S: Empat bahagian.
P: Yang ini (menunjukkan nombor tujuh)?
S: Tujuh bola (subjek menunjukkan satu bahagian pada lukisannya).
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat.
S: Tak ada.
P: Baik, ada berapa banyak empat dalam dua puluh lapan? Boleh lukis?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa empat?
S: Tujuh.
P: Macam mana dapat tujuh?
S: Ada tujuh bahagian.
P: Satu bahagian ada berapa?
S: Empat.
P: Empat ni rujuk pada apa pada ayat bahagi tadi?
S: Bahagi empat (menunjukkan nombor empat).
P: Bahagian tu (menunjukkan satu bahagian pada gambar rajah) rujuk pada apa pada ayat bahagi?
S: … Jawapan dia.
P: Lukisan ini sama tak dengan lukisan tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ini (menunjukkan lukisan terbarunya) ada tujuh bahagian, bola ada empat, yang ni (menunjukkan lukisan pertama) ada empat bahagian, bola dalam satu bahagian ada tujuh.

P: Baik, sekarang boleh lengkapkan ayat bahagi ni (menunjukkan ayat 28 ÷ 4)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$28 \div 4 = 7$$

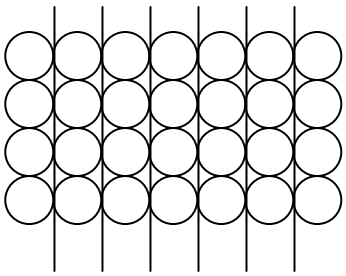
P: Sekarang, cuba tulis ayat darab daripada ayat bahagi tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

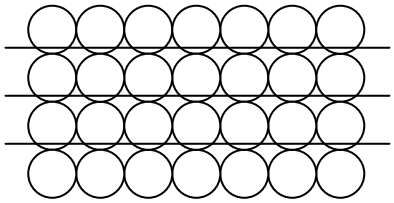
P: Cuba baca?
S: Empat darab tujuh sama dengan dua puluh lapan.
P: Ada cara lain tak untuk tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Cuba baca yang ini?
S: Tujuh darab empat sama dengan dua puluh lapan.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Jawapan sama.
P: Macam mana dengan yang nombor-nombor ini (menunjukkan kedua-dua pendarab pada ayat darab)?
S: Tak sama sebab yang ini (menunjukkan 4 x 7 = 28) empat darab tujuh. Yang ini (menunjukkan 7 x 4 = 28) tujuh darab empat. Tak sama.
P: Yang ini (menunjukkan empat pada 4 x 7 = 28) rujuk pada apa dalam kedua-dua gambar rajah?
S: Empat bahagian (subjek menunjukkan lukisan pertamanya), yang ini (menunjukkan lukisan keduanya) empat bola.
P: Yang ini (menunjukkan 7 pada ayat 4 x 7 = 28)
S: Tujuh bola (subjek menunjukkan lukisan pertamanya), yang ini (menunjukkan lukisan keduanya) tujuh bahagian.
P: Baik. Sekarang cuba Azam baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Boleh Azam tunjuk macam tadi ayat bahagi ni? Cara lukisan ke?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh jelaskan lukisan Azam? Ada berapa bahagian?
S: Tujuh?
P: Kenapa buat tujuh bahagian?
S: Sebab kena bahagi tujuh.
P: Satu bahagian ada berapa bola?
S: Empat.
P: Empat tu rujuk pada apa pada ayat bahagi?
S: Jawapan dia.
P: Lukisan ni sama tak dengan lukisan Azam tadi?
S: Sama dengan yang ini (menunjukkan lukisan kedua bagi ayat bahagi 28 ÷ 4)?
P: Yang ini (menunjukkan lukisan pertama subjek)?
S: Tak sama. Yang tu ada empat bahagian.
P: Ada cara lain tak nak lukis untuk ayat ni (menunjukkan ayat 28 ÷ 4)?
S: Ada. (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ni sama tak dengan yang ini (menunjukkan lukisan subjek bagi 28 ÷ 7)?
S: Tak. Dia sama dengan yang ini (menunjukkan lukisan pertama subjek bagi ayat 28 ÷ 4)?
P: Baik, sekarang boleh Azam tulis ayat darab bagi ayat bahagi ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Ada cara lain menulis ayat darab?
S: Ada. (subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Sama tak kedua-dua ayat?
S: Jawapan sahaja sama, empat dengan tujuh tak sama.
P: Empat tu rujuk pada apa dalam lukisan?
S: Empat bola (menunjukkan lukisan pertama bagi 28 ÷ 7) yang ni (menunjukkan lukisan kedua) empat bahagian.
P: Tujuh?
S: Sini tujuh kumpulan (menunjukkan lukisan pertama) sini (menunjukkan lukisan kedua) tujuh bola.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?

S: Tak ada.
P: Ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA341, Azam mentafsirkan ayat 28 ÷ 4 dengan melukis dua puluh lapan bola dan mengagihkannya kepada empat bahagian. Azam berpendapat bahawa empat bahagian yang dibentuknya itu adalah kerana ayat bahagi yang diberi oleh pengkaji mempunyai empat sebagai pembahagi. Subjek juga menulis ayat bahagi yang lengkap merujuk 28 ÷ 4 iaitu, 28 ÷ 4 = 7. Selain itu subjek juga membuat satu lagi lukisan yang mempunyai tujuh bahagian bersaiz empat. Subjek berpendapat kedua-dua lukisan tersebut adalah berbeza kerana mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza.

Azam juga menulis dua ayat darab merujuk ayat bahagi yang diberi oleh pengkaji. Ayat-ayat darab yang ditulis oleh Azam adalah, 4 x 7 = 28 dan 7 x 4 = 28. Subjek juga menjelaskan bahawa empat pada kedua-dua ayat tersebut merujuk bilangan bahagian yang dilukisnya dalan lukisan pertama beliau. Menurutnya lagi, empat juga merujuk empat bola yang terdapat dalam satu bahagian pada lukisan keduanya. Nombor tujuh yang pula, menurut Azam, merupakan bilangan bola yang terdapat dalam satu bahagian pada lukisan pertamanya. Pada lukisan keduanya pula, tujuh merujuk bilangan kumpulan.

Bagi ayat 28 ÷ 7 pula, Azam melukis tujuh bahagian bersaiz empat. Subjek juga membentuk satu lagi lukisan yang mempunyai empat bahagian bersaiz tujuh. Selain itu, Azam berpendapat bahawa kedua-dua lukisanya adalah berbeza kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza. Merujuk ayat 28 ÷ 7, Azam juga menulis dua ayat darab iaitu, 7 x 4 = 28 dan 4 x 7 = 28. Azam juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat tersebut hanya mempunyai hasil bahagi yang sama, tetapi keda-dua pendarabnya adalah berbeza.

Selain itu, subjek juga berpendapat lukisan keduanya bagi ayat bahagi 28 ÷ 7 adalah sama dengan lukisan pertama bagi ayat 28 ÷ 4 kerana kedua-duanya mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang sama. Subjek juga menjelaskan tujuh pada ayat 28 ÷ 7 merujuk tujuh bahagian pada lukisan pertamanya bagi 28 ÷ 7 dan saiz kumpulan pada lukisan keduanya. Manakala, empat pula merujuk bilangan kumpulan pada lukisan kedua bagi 28 ÷ 7 dan saiz bola dalam satu kumpulan dalam lukisan pertamanya.

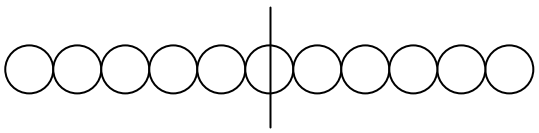
Ayat bahagi yang mempunyai baki

Azam mentafsirkan ayat 11 ÷ 2 dengan melukis sebelas bola dan mengagihkannya kepada dua bahagian. Subjek juga mentafsirkan

ayat bahagi 11 ÷ 2 dengan membentuk lima kumpulan bersaiz dua. Petikan TA342 yang berikut memaparkan tingkah laku subjek.

Petikan TA342

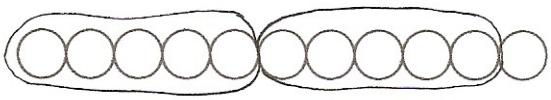
P: Sekarang cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 2)?.
S: Sebelas bahagi dua.
P: Boleh tunjuk macam mana sebelas bahagi dua?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa bahagian?
S: Dua.
P: Kenapa dua bahagian?
S: Sebab sebelas nak bahagi dua.
P: Kenapa yang ini ada satu bola yang dibelah dua?
S: Sebab nak bahagi dua. Jawapan dia lima setengah.
P: Baik kalau tak belah dua bola tu boleh tak?
S: Nanti ada baki.
P: Ada baki?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab) lima baki satu.

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 2\,)\,11 \\ -\ \underline{10} \\ 1 \end{array}$$

P: Kalau tunjuk secara lukisan boleh?
S: Boleh (subjek melukis seperti berikut):

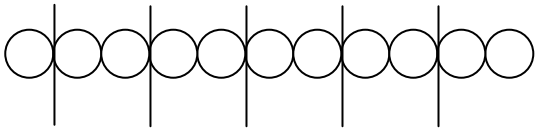


P: Yang ni ada berapa bahagian?
S: Dua bahagian.
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan sebiji bola di luar kumpulan)?

S: Baki satu.
P: Boleh Azam tulis ayat bahagi tadi dengan lengkap?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut):

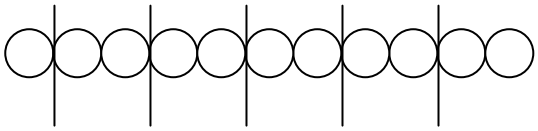
$$11 \div 2 = 5$$

P: Boleh baca apa yang Azam tulis?
S: Sebelas bahagi dua sama dengan lima.
P: Lima tu rujuk pada apa dalam lukisan?
S: Lima bola (subjek menunjukkan satu bahagian).
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan satu bola di luar kumpulan). Yang mana menunjukkan yang ini dalam ayat tu?
S: Ada dalam sebelas.
P: Pada jawapan, ada tak?
S: Tak ada sebab bahagi dua dapat lima bola saja dalam satu bahagian.
P: Jadi, tak perlu tulis dalam ayat bahagi?
S: Tak.
P: Baik, ada cara lain tak nak tunjuk ayat ni (menunjukkan ayat 11 ÷ 2)?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

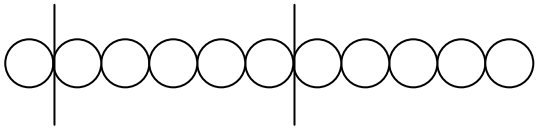


P: Di sini ada berapa bahagian?
S: Lima (subjek menghitung dan menjawab).
P: Yang ini sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ini ada lima bahagian. Tadi dua bahagian.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Ada dua bola satu bahagian. Tadi ada lima bola.
P: Ada cara lain nak jelaskan ayat ni (menunjukkan 11 ÷ 2)?
S: Tak ada.
P: Sekarang, boleh Azam tulis ayat darab untuk ayat ini (menunjukkan ayat 11 ÷ 2)?
S: Susah nak tulis.
P: Kenapa?
S: Sebab ada baki.
P: Kalau ada baki tak boleh tulis ayat darab?
S: Tak boleh.
P: Cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 5)?
S: Sebelas bahagi lima.

P: Macam tadi boleh tunjuk macam mana sebelas bahagi lima tu?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa bahagian?
S: Lima.
P: Kenapa buat lima bahagian?
S: Sebab kena bahagi lima.
P: Yang ini pun satu bahagian ke (menunjukkan satu bola yang berada di tepi sekali)?
S: Bukan.
P: Kenapa?
S: Sebab bahagian tu ada satu bola saja jadi tak boleh kira. Bahagian lain ada dua.
P: Kalau ada dua, baru boleh kira?
S: Ya.
P: Ada cara lain nak tunjuk sebelas bahagi dua?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ini sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni ada lima bahagian, satu bahagian ada dua bola tadi ada dua bahagian, satu bahagian ada lima bola.
P: Yang ni sama tak dengan yang Azam lukis untuk 11 ÷ 2?
S: Sama dengan yang ini (subjek menunjukkan lukisan yang mempunyai lima kumpulan bersaiz dua).
P: Yang ini tak sama ke (menunjukkan lukisan yang mempunyai dua kumpulan bersaiz lima)?
S: Sama dengan yang ini (menunjukkan lukisan yang mempunyai dua kumpulan bagi ayat 11 ÷ 5).
P: Boleh tulis ayat darab tak bagi ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 11 ÷ 5)?
S: Tak boleh. Sebab ayat tu ada baki.

Dalam Petikan TA342, Azam mentafsir ayat 11 ÷ 2 dengan melukis sebelas bola dan melukis satu garis di tengah bagi mengagihkan kepada dua bahagian. Subjek menjelaskan sebiji bola di

tengah terpaksa dipotong dua kerana perlu bahagi secara seimbang. Subjek kemudian melukis semula sebelas biji bola dan mengagihkan kepada dua bahagian, di mana setiap satu bahagian bersaiz lima. Dalam lukisan tersebut sebiji bola diletakkan di luar kumpulan sebagai baki.

Selain itu, subjek juga menulis ayat bahagi 11 ÷ 2 = 5 sebagai tafsiran kepada lukisannya. Menurut subjek, sebiji bola di luar kumpulan tidak boleh diambil kira kerana ia tidak termasuk dalam bahagian yang dikumpulkan. Subjek menjelaskan nombor lima pada ayat bahagi merujuk lima biji bola yang terdapat dalam satu bahagian. Azam juga berpendapat bahawa, sebiji bola yang di luar kumpulan dalam lukisannya tidak boleh diambil kira kerana ia tidak termasuk dalam mana-mana bahagian. Bagaimanapun, subjek menjelaskan sebiji bola tersebut termasuk dalam nombor sebelas yang ditulisnya pada ayat bahagi. Selain itu, subjek berpendapat bahawa ayat darab tidak boleh ditulis bagi ayat 11 ÷ 2 kerana pembahagian tersebut mempunyai baki.

Bagi ayat 11 ÷ 5 pula, Azam melukisan yang mempunyai lima kumpulan bersaiz dua. Sebiji bola diletakkan di luar kumpulan. Subjek juga membuat satu lagi lukisan yang mempunyai dua kumpulan bola bersaiz lima. Sebiji bola diletakkan di luar kumpulan. Subjek juga berpendapat kedua-dua lukisan tersebut berbeza kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza. Bagaimanapun, Azam berpendapat bahawa lukisan yang mempunyai

dua kumpulan bersaiz lima bagi ayat 11 ÷ 5 adalah sama dengan lukisan yang mempunyai dua bahagian yang dilukisan bagi ayat 11 ÷ 2. Selain itu, subjek berpendapat ayat darab tidak boleh ditulis bagi ayat 11 ÷ 5 juga kerana pembahagian tersebut menghasilkan baki.

Ayat Bahagi Membabitkan Sifar, Satu, Dan Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Azam mentafsirkan ayat 3 ÷ 0 sebagai sifar. Azam juga menjelaskan sebarang operasi membabitkan sifar akan menghasilkan sifar. Petikan TA343 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Azam.

Petikan TA343

P: Cuba Azam baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 0 ÷ 3)?
S: Kosong bahagi tiga.
P: Apa jawapan dia?
S: Kosong.
P: Kenapa kosong?
S: Kosong bahagi semua nombor dapat kosong.
P: Boleh jelaskan macam mana kosong bahagi tiga? Boleh lukis tak?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Kosong macam mana nak lukis!
P: Boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \div 3 = 0$$

P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada. Ayat sama saja.
P: Baik, sekarang boleh tulis ayat darab?
S: Boleh (subjek menulis ayat berikut):

$$3 \times 0 = 0$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Ada (subjek menulis ayat berikut):

$$0 \times 3 = 0$$

P: Sama tak kedua-dua ayat tu?
S: Tak sama, tapi jawapan sama.
P: Baik, cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 0$)?
S: Tiga bahagi kosong.
P: Apa jawapannya?
S: Kosong.
P: Kenapa kosong?
S: Sebab kalau apa-apa nombor bahagi kosong jawapan dia kosong.
P: Yang ni boleh tak tunjuk secara lukisan?
S: Tak boleh sebab tak boleh lukis kosong
P: Boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 0 = 0$$

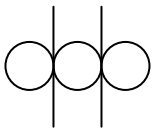
P: Cuba baca?
S: Tiga bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Sekarang, boleh tulis ayat darab bagi ayat ini (menunjukkan ayat bahagi $3 \div 0$)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \times 3 = 0$$

P: Boleh Azam baca?
S: Kosong darab tiga sama dengan kosong.
P: Kenapa jawapannya kosong? Ayat bahagi kan tiga bahagi kosong?
S: Sebab kosong darab apa pun kosong.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 0 = 0$$

P: Sama tak kedua-dua ayat darab?
S: Tak sama. Yang ni tiga darab kosong yang ni (menunjukkan ayat 0 x 3 = 0) kosong darab tiga. Tapi jawapan dia sama dengan kosong.
P: Ayat-ayat darab ni sama tak dengan ayat-ayat darab yang Azam tulis untuk kosong bahagi tiga tadi?
S: Sama. Jawapan pun sama.
P: Ayat bahagi lain, kan? Kenapa ayat darab sama?
S: Sebab ada kosong. Kalau bahagi atau darab kosong jawapan kosong.
P: Baik, cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 3$)?
S: Tiga bahagi tiga.
P: Boleh jelaskan yang ini? Boleh lukis tak?
S: Boleh (subjek melukis yang berikut):



P: Boleh Azam jelaskan tentang lukisan Azam ni?
S: Tiga bahagi tiga (menunjukkan lukisannya).
P: Ada berapa bahagian?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga bahagian?
S: Sebab tiga kena bahagi tiga.
P: Tiga bahagi tiga berapa?
S: Satu.
P: Dalam lukisan yang mana menunjukkan satu?
S: Satu bahagian.
P: Boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 3 = 1$$

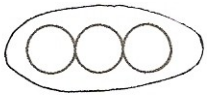
P: Boleh baca?
S: Tiga bahagi tiga sama dengan satu.
P: Sekarang boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 1 = 3$$

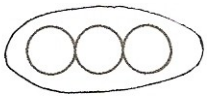
P: Cuba baca?
S: Tiga darab satu sama dengan tiga.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$1 \times 3 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Satu darab tiga sama dengan tiga.
P: Sama tak kedua-dua ayat darab?
S: Tak. Jawapan saja sama.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk tiga bahagi tiga?
S: … Ada (subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ini berapa bahagian?
S: Satu.
P: Sama tak dengan lukisan tadi?
S: Tak sama. Yang ini satu kumpulan, tadi tiga kumpulan.
P: Apa lagi yang beza?
S: Yang ni ada tiga bola dalam satu kumpulan. Tadi ada satu bola satu kumpulan.
P: Lagi? Apa lagi yang beza?
S: Tak ada. Yang sama, dua-dua ada tiga bola.
P: Ada cara lain nak tunjuk tiga bahagi tiga?
S: … Tak ada.
P: Baik, sekarang cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 3 ÷ 1).
S: Tiga bahagi satu.
P: Jawapannya?
S: Tiga.
P: Boleh tunjuk macam tadi macam mana tiga bahagi satu?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ini berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Kenapa satu kumpulan?
S: Sebab bahagi satu.
P: Dalam lukisan, yang mana menunjukkan tiga?
S: Tiga-tiga bola.
P: Satu?
S: Semua bola. Satu kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk ayat tadi?
S: Ada (subjek melukis seperti berikut):

P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tiga.
P: Ayat bahagi ni sama tak dengan ayat tiga bahagi tiga tadi?
S: Tak sama.
P: Macam mana dengan lukisan Azam ini dengan lukisan untuk tiga bahagi tiga? Sama tak?
S: Yang ini sama dengan ini (menunjukkan lukisan tiga kumpulan bersaiz satu bagi 3 ÷ 3). Gambar ni (menunjukkan lukisan satu kumpulan bersaiz tiga bagi 3 ÷ 1) sama dengan gambar ni (menunjukkan lukisan bagi 3 ÷ 3).
P: Ada lagi yang sama?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat darab bagi ayat tiga bahagi satu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$1 \times 3 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Satu darab tiga sama dengan satu.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan membacanya). Ada, tiga darab satu sama dengan tiga.

$$3 \times 1 = 3$$

P: Yang ini (menunjukkan 3 pada hasil bahagi ayat 3 x 1 = 3) rujuk pada apa pada ayat bahagi?
S: Tiga ni (menunjukkan 3 sebelum simbol bahagi pada ayat bahagi 3 ÷ 1 = 3).
P: Tiga tu sama tak dengan tiga ini (menunjukkan 3 pada hasil bahagi 3 ÷ 1 = 3).
S: Sama.
P: Ada cara lain nak tunjuk tiga bahagi satu?
S: Tak ada.

Azam mentafsirkan ayat 0 ÷ 3 sebagai sifar kerana menurutnya operasi bahagi yang membabitkan sifar adalah sifar menulis ayat bahagi 0 ÷ 3 = 0. Selain itu, subjek juga menulis ayat darab 3 x 0 = 0 dan 0 x 3 = 0 bagi mewakili ayat bahagi tersebut. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat tersebut adalah

berbeza kerana mempunyai pendarab yang berbeza. Bagaimanapun, Azam menjelaskan kedua-dua ayat darab tersebut menghasilkan hasil darab yang sama.

Bagi ayat 3 ÷ 0 pula, Azam melengkapkan ayat tersebut dengan menulis ayat 3 ÷ 0 = 0. Subjek juga menjelaskan ayat bahagi tersebut tidak dapat diwakilkan secara lukisan kerana operasi membabitkan sifar tidak dapat dilukis. Menurut Azam lagi, operasi bahagi yang membabitkan sifar akan menghasilkan sifar. Subjek juga menulis ayat darab 0 x 3 = 0 dan 3 x 0 = 0 sebagai tafsiran kepada ayat bahagi 3 ÷ 0. Subjek juga menjelaskan kedua-dua ayat darab ter adalah berbeza kerana mempunyai pendarab yang berbeza. Selain itu Azam berpendapat bahawa, ayat darab yang ditulis bagi 3 ÷ 0 adalah sama dengan ayat darab yang ditulis bagi mentafsir 0 ÷ 3.

Bagi ayat 3 ÷ 3 pula, Azam mentafsirnya dengan menulis ayat darab 1 x 3 = 3 dan 3 x 1 = 3. Subjek juga membentuk dua lukisan bagi menjelaskan lagi ayat bahagi 3 ÷ 3. Lukisan pertama mempunyai tiga bola yang diagihkan kepada tiga bahagian, manakala lukisan kedua pula mempunyai satu kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisan tersebut adalah berbeza kerana kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza. Selain itu, subjek juga menulis ayat bahagi dengan lengkap iaitu, 3 ÷ 3 = 1.

Selain itu, Azam menulis ayat bahagi 3 ÷ 1 secara lengkap sebagai 3 ÷ 1 = 3. Subjek juga membuat dua lukisan bagi mewakili ayat bahagi tersebut. Lukisan pertamanya mempunyai satu kumpulan bersaiz tiga manakala, lukisan kedua pula mempunyai tiga kumpulan bersaiz satu. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisan tersebut adalah berbeza kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza. Selain itu, Azam menjelaskan lukisan bagi mewakili ayat 3 ÷ 1 adalah sama dengan lukisan yang dibuatnya bagi mewakili ayat bahagi 3 ÷ 3. Azam juga menulis ayat darab 1 x 3 = 3 dan 3 x 1 = 3 sebagai tafsiran bagi ayat bahagi 3 ÷ 1. Subjek juga berpendapat ayat-ayat darab tersebut adalah sama dengan ayat darab yang ditulisnya bagi mewakili 3 ÷ 3.

Ayat Darab

Azam mentafsir ayat darab 4 x 2 dengan menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2. Subjek juga melukis empat kumpulan bersaiz dua dan dua kumpulan bersaiz empat bagi mewakili ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2. Petikan TA344 yang berikut memaparkan tingkah laku Azam.

Petikan TA344

P: Cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 4 x 2)?

S: Empat darab dua.
P: Boleh Azam lengkapkan ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 2 = 8$$

P: Bacakan?
S: Empat darab dua sama dengan lapan.
P: Sekarang, boleh Azam buat ayat bahagi daripada ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Boleh baca?
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Ada cara lain tak nak tulis ?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 2 = 4$$

P: Cuba baca yang ini?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Ini bahagi dua jawapan empat, tadi bahagi empat jawapan dua.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat 4 x 2 = 8) sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: Bahagi empat.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 8 pada 4 x 2 = 8).
S: Lapan (menunjukkan nombor 8 pada 8 ÷ 4 = 2).
P: Jadi, apa kaitan ayat bahagi dengan ayat darab?
S: Jawapan ayat darab tu sama dengan nombor yang nak bahagi.
P: Kaitan ayat darab dengan ayat bahagi?
S: Sama. Jawapan ayat bahagi sama dengan nombor yang nak darab.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Sekarang, boleh tunjuk secara lukisan ayat ini (menunjukkan ayat 8 ÷ 4 = 2)?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut):

P: Ada berapa bahagian?
S: Empat.
P: Kenapa buat empat bahagian?
S: Sebab lapan kena bahagi empat.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk ayat tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Yang ni berapa bahagian?
S: Dua.
P: Sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama. Yang ni dua bahagian yang tadi empat bahagian.
P: Dua-dua lukisan untuk ayat bahagi yang sama, kan?
S: Ya. Tapi, lukisan tak sama.
P: Ada lagi tak yang tak sama?
S: Ada. Yang ni ada empat bola satu bahagian. Yang tadi ada dua bola satu bahagian.
P: Boleh tak kita gunakan ayat ini (menunjukkan 8 ÷ 2 = 4) untuk lukisan Azam tadi?
S: … Boleh.
P: Boleh Azam jelaskan?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat (menunjukkan lukisan yang mempunyai dua bahagian bersaiz empat).
P: Lukisan satu lagi, boleh tak?
S: Boleh. Lapan bahagi dua sama dengan empat (menunjukkan lukisan yang mempunyai empat bahagian bersaiz dua).
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Sekarang cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 2 x 4)?
S: Dua darab empat.
P: Boleh Azam tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 2 = 4$$

P: Cuba baca.
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Kenapa lapan?

S: Sebab dua darab empat sama dengan lapan. Jadi, lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Cuba baca yang ini.
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Ayat yang ini (menunjukkan $8 \div 4 = 2$) sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat $8 \div 4 = 2$ yang ditulis bagi 4×2)?
S: Sama.
P: Kenapa Azam rasa sama, ayat darab tak sama kan?
S: Ayat darab tak sama, tapi ayat bahagi sama.
P: Yang ini (menunjukkan 2 pada ayat $8 \div 4 = 2$) sama dengan yang mana pada ayat darab?
S: Dua (subjek menunjukkan 2 pada ayat 2×4 dan ayat 4×2).
P: Sama tak dua tu?
S: Sama.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat $8 \div 4 = 2$) sama dengan yang mana pada ayat darab?
S: Empat (subjek menunjukkan 4 pada ayat darab 2×4 dan ayat 4×2).
P: Yang ini (menunjukkan 8 pada ayat $8 \div 4 = 2$)?
S: Lapan (subjek menunjukkan hasil darab bagi ayat 2×4 dan ayat 4×2).

Dalam Petikan TA344, Azam menulis ayat bahagi $8 \div 4 = 2$ dan $8 \div 2 = 4$ bagi ayat darab 4×2. Namun demikian, subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi tersebut adalah berbeza kerana kedua-duanya mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Subjek juga menjelaskan empat yang terdapat pada ayat 4×2 adalah sama dengan empat yang terdapat pada ayat bahagi $8 \div 4 = 2$ dan ayat bahagi $8 \div 2 = 4$. Selain itu, Azam berpendapat lapan yang terdapat pada ayat $8 \div 4 = 2$ dan $8 \div 2 = 4$ adalah sama dengan hasil darab bagi 4×2.

Azam juga membentuk dua lukisan iaitu, lukisan yang mempunyai empat bahagian bersaiz dua dan dua bahagian bersaiz empat. Subjek juga menjelaskan bahawa kedua-dua lukisannya itu berbeza kerana kedua-duanya mempunyai bilangan kumpulan saiz kumpulan yang berbeza. Selain itu, subjek berpendapat bahawa empat bahagian pada lukisannya merujuk empat pada ayat bahagi $8 \div 4 = 2$ dan $8 \div 2 = 4$. Subjek juga berpendapat bahawa ayat bahagi adalah sonsangan kepada ayat darab.

Bagi ayat 2×4 pula, Azam menulis ayat bahagi $8 \div 2 = 4$ dan $8 \div 4 = 2$ sebagai tafsiran kepada ayat darab itu. Subjek juga menjelaskan bahawa empat pada ayat $8 \div 2 = 4$ dan $8 \div 4 = 2$ merujuk empat pada ayat 2×4. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisan yang dibuat oleh subjek bagi ayat 4×2 boleh digunakan untuk mewakili ayat $8 \div 2 = 4$ dan $8 \div 4 = 2$. Azam juga berpendapat bahawa ayat $8 \div 2 = 4$ dan $8 \div 4 = 2$ yang ditulisnya bagi 2×4 adalah sama dengan keda-dua ayat bahagi yang ditulisnya sebagai tafsiran bagi ayat 4×2.

Petikan TA345

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 6×4) Boleh Azam baca apa yang tertulis pada kad ini?

S: Enam darab empat.
P: Enam darab empat dapat berapa?
S: Dua puluh empat.
P: Boleh tulis ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$6 \times 4 = 24$$

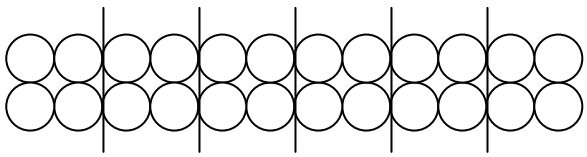
P: Sekarang saya nak Azam tulis ayat bahagi daripada ayat tu? Boleh tak?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 6 = 4$$

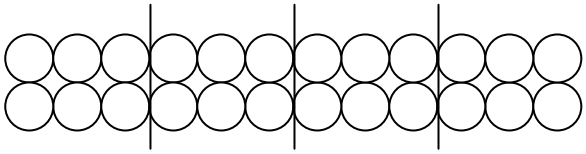
P: Cuba baca?
S: Dua puluh empat bahagi enam sama dengan empat.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 4 = 6$$

P: Cuba baca yang ini?
S: Dua puluh empat bahagi empat sama dengan enam.
P: Sama tak kedua-dua ayat?
S: Tak sebab yang ni jawapan enam. Yang ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 6 = 4) jawapan empat.
P: Ada lagi tak yang beza?
S: Ada. Yang ini kena bahagi empat, yang ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 6 = 4) kena bahagi enam.
P: Sekarang, boleh tunjuk macam mana dua puluh empat bahagi enam dapat empat? Azam boleh tunjuk secara lukisan?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa bahagian?
S: Enam bahagian sebab kena bahagi enam.
P: Kalau bahagi empat?
S: Kena buat empat bahagian.
P: Tadi, Azam tulis ayat ini (menunjukkan 24 ÷ 4 = 6). Boleh tak kita gunakan ayat ni untuk lukisan Azam ini?
S: Boleh.
P: Boleh jelaskan. Ayat tu bahagi empat, sini ada enam bahagian?
S: Boleh juga sebab satu bahagian ada empat bola.
P: Baik, ada cara lain nak lukis dua puluh empat bahagi enam tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ni berapa bahagian?
S: Empat.
P: Empat tu rujuk pada apa pada ayat darab?
S: Enam darab empat.
P: Dalam ayat bahagi?
S: Jawapan untuk dua puluh enam bahagi enam. Kalau yang ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 4 = 6) bahagi empat.
P: Dua-dua lukisan sama tak?
S: Tak sebab bahagian tak sama, bola dalam tu pun tak sama.
P: Semua ada berapa bola dalam kedua-dua lukisan?
S: Dua puluh empat.
P: Di mana dua puluh empat pada ayat bahagi dan ayat darab tadi?
S: Dua puluh empat ada di sini (menunjukkan dua puluh empat pada kedua-dua ayat bahagi), di sini jawapan dia (menunjukkan ayat darab).
P: Jadi, apa kaitan antar ayat darab dengan ayat bahagi? Boleh tengok pada dua puluh empat tadi ya?
S: Dua puluh empat tu jawapan ayat darab. Dalam bahagi, nombor yang nak bahagi.
P: Macam mana dengan empat? Cuba bandingkan ayat darab dan bahagi (menunjukkan ayat 24 ÷ 6 = 4)?
S: Empat, jawapan dalam bahagi. Dalam darab, nombor yang nak darab.
P: Ada apa-apa lagi Azam nak jelaskan tentang ayat darab dan bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA345, Azam mentafsir ayat 6 x 4 dengan menulis dua ayat bahagi iaitu, 24 ÷ 6 = 4 dan 24 ÷ 4 = 6. Subjek juga melengkapkan 6 x 4 dengan menulis ayat 6 x 4 = 24. Subjek juga menjelaskan perbezaan antara kedua-dua ayat bahagi tersebut iaitu, dari segai pembahagi dan hasil bahagi. Selain itu, Azam juga melukis dua lukisan bagi mewakili ayat 24 ÷ 6 = 4. Lukisan

pertamanya mempunyai enam kumpulan bola bersaiz empat, manakala lukisan keduanya mempunyai empat kumpulan bola bersaiz enam. Subjek juga menjelaskan bilangan kumpulan merujuk pembahagi yang terdapat pada ayat bahagi ataupun hasil bahagi.

Selain itu, Azam juga menjelaskan berkaitan antara lukisannya, ayat bahagi dan ayat darab. Subjek berpendapat bahawa dua puluh empat bola yang terdapat dalam lukisannya merujuk hasil darab bagi ayat 6 x 4 dan nombor yang perlu dibahagi bagi kedua-dua ayat bahagi. Subjek juga berpendapat bahawa empat bola yang terdapat dalam satu bahagian pada lukisannya yang pertama, dan empat bahagian yang terdapat dalam lukisan keduanya, adalah sama dengan empat yang terdapat pada ayat 6 x 4 , pembahagi pada ayat 24 ÷ 4 = 6, dan hasil bahagi pada ayat 24 ÷ 6 = 4.

Petikan TA346

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai ayat 9 x 0) boleh Azam baca apa yang tertulis pada kad ini?

S: Sembilan darab kosong.
P: Sembilan darab kosong sama dengan berapa?
S: Kosong.
P: Kenapa sama dengan kosong?
S: Sebab kalau darab dengan kosong mesti kosong.
P: Boleh tulis ayat darab dengan lengkap?
S: Boleh. (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \times 0 = 0$$

P: Sekarang, boleh Azam tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis empat ayat bahagi seperti berikut):

$$0 \div 9 = 0$$

P: Cuba baca?

S: Kosong bahagi sembilan sama dengan kosong.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Ada. (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \div 0 = 0$$

P: Sama ke, ayat ni dengan ayat tadi?
S: Jawapan sama, yang ni sembilan bahagi kosong, tadi kosong bahagi sembilan.
P: Sama ke?
S: Tak sama.
P: Boleh tunjuk secara lukisan macam tadi?
S: Tak boleh lukis … kosong tak boleh lukis.

Dalam Petikan TA346, Azam mentafsirkan ayat 9 x 0 dengan menulis dua ayat bahagi iaitu, $0 \div 9 = 0$ dan $9 \div 0 = 0$. Azam juga melengkapkan ayat darab yang diberi dengan menulis ayat 9 x 0 = 0. Selain itu, subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi yang ditulisnya itu berbeza kerana mempunyai pembahagi yang berbeza. Azam juga berpendapat bahawa ayat 9 x 0 tidak dapat ditafsir secara lukisan kerana sifar yang terdapat pada ayat darab itu tidak dapat diwakilkan secara lukisan.

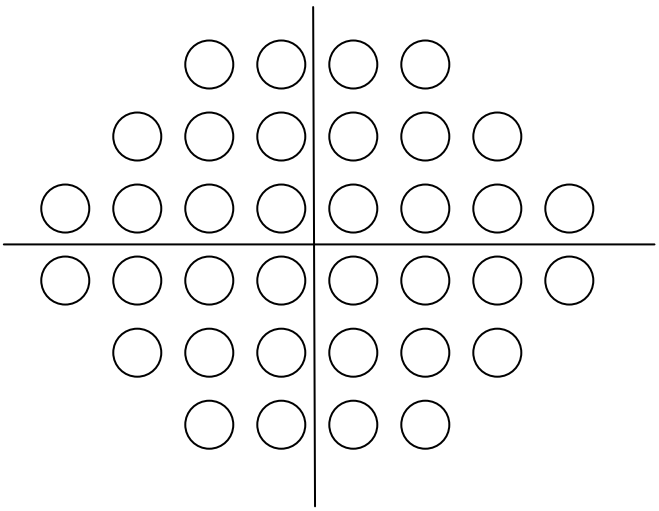
Penyelesaian Masalah

Bentuk Diskrit

Azam menyelesaikan masalah bahagi empat dengan membentuk empat kumpulan yang mengandungi sembilan guli. Beliau juga membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan kumpulan sebagai penyelesaian kepada masalah 36 ÷ 9. Petikan PM351 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Azam.

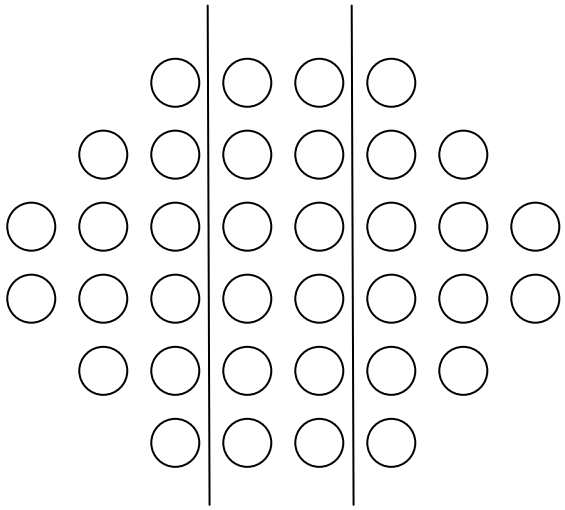
Petikan PM351

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Ini adalah gambar guli. Cikgu nak Azam bahagi empat guli-guli ini. Boleh?
S: (Subjek menghitung secara senyap dan membentuk empat kumpulan seperti berikut):



P: Dah siap ke?
S: Dah.
P: Semua ada berapa guli?
S: Tiga puluh enam.
P: Macam mana Azam tahu ?
S: Kira.

P: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan berapa?
S: Sembilan.
P: Kenapa Azam kata sembilan?
S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan.
P: Kalau rujuk gambar rajah, mana jawapan dia?
S: (Menunjukkan satu daripada empat bahagian) Sembilan guli.
P: Kenapa Azam buat garis macam ni (menunjukkan garis yang dilukis oleh subjek)?
S: Untuk bahagi empat.
P: Kalau nak bahagi tiga macam mana?
S: Nak lukis di mana?
P: Boleh beritahu tanpa lukis? Kalau bahagi tiga kena buat macam mana?
S: Susah. Kena lukis, baru tau.
P: Baik. Tunjuk kat sini, (memberikan satu lagi kertas yang mengandungi tiga puluh enam guli) macam mana bahagi tiga?
S: (Subjek menghitung secara senyap dan mengambil masa yang agak lama untuk menanda seperti berikut):

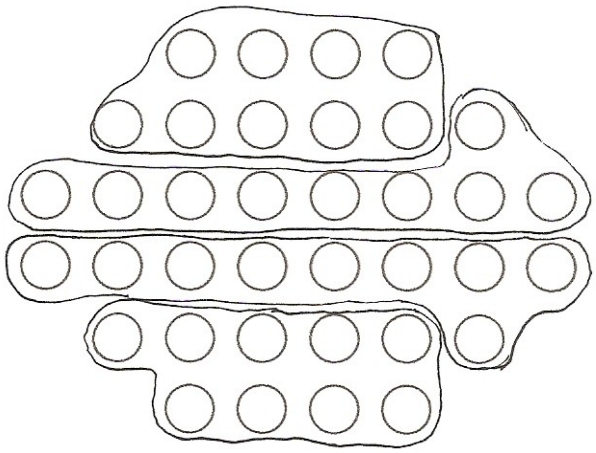


P: Dah siap ke?
S: Dah.
P: Boleh beritahu kenapa lukis garisan seperti itu?
S: Sebab nak bagi sama.
P: Yang mana nak bagi sama?
S: (Subjek menunjukkan guli-guli yang terdapat dalam setiap bahagian)
P: Sama tak?
S: Sama.
P: Macam mana tau sama?
S: Ada dua belas (subjek menjawab sambil menunjukkan guli-guli yang telah dibahagi ke tiga bahagian)
P: Kalau bahagi dua? Boleh beritahu tanpa lukis?

S: Lukis satu garis.
P: Lukis satu garis di mana?
S: Di tengah (menunjukkan seolah-olah melukis garis di tengah gambar rajah)
P: Baik, dalam gambar rajah ini ada empat bahagian. Empat-empat bahagian sama tak?
S: Sama.
P: Kenapa Azam rasa sama?
S: Sebab semua bahagian ada guli yang sama.
P: Ada berapa guli setiap bahagian?
S: Sembilan.
P: Sekarang boleh Azam tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4 = 9$$

P: Cuba baca.
S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat bahagi) sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Bahagian.
P: Yang ini (menunjukkan 9 pada ayat bahagi)?
S: Guli dalam satu bahagian.
P: Ada tak cara lain nak tunjuk bahagi empat?
S: Ada. (Subjek menanda seperti berikut):

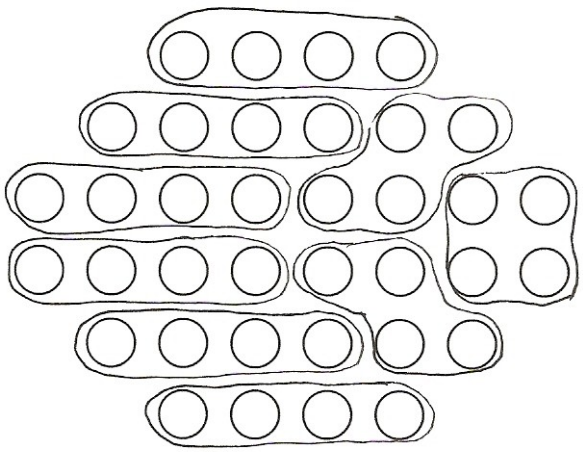


P: Yang ni ada berapa kumpulan?
S: Empat
P: Gambar ni sama tak dengan yang Azam buat tadi untuk bahagi empat?
S: Tak sama…sama.
P: Sama atau tak sama?
S: Bahagian dia tak sama, tapi guli sama…sembilan.

P: Bahagian tak sama? Ada berapa bahagian?
S: Empat bahagian, tapi yang ini garis tak lurus. Gambar ni (menunjukkan gambar rajah sebelumnya) lurus.
P: Bentuk tak sama ya?
S: Bentuk tak sama.
P: Guli dalam setiap bahagian sama tak?
S: Sama ada sembilan.
P: Boleh tak Azam tulis ayat bahagi untuk gambar ini (menunjukkan gambar terbaru subjek)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4 = 9$$

P: Ayat ni dengan ayat tadi sama tak?
S: Sama.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: Tak ada
P: Cara lain nak bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Baik, boleh tak kita tulis ayat ini (menunjukkan ayat bahagi $36 \div 9 = 4$) bagi gambar rajah tadi?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab gambar tu bahagi empat.
P: Jadi, ayat ni tak boleh wakili gambar rajah tu?
S: Tak boleh.
P: Kalau macamtu boleh Azam tunjuk bagaimana tiga puluh enam bahagi sembilan (memberikan kertas gambar rajah yang baru)?
S: (Subjek menanda seperti berikut):

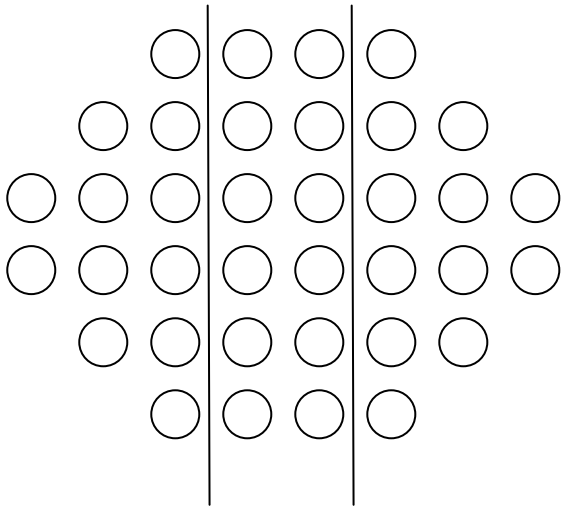


P: Ada berapa bahagian di sini?
S: Sembilan.

P: Gambar rajah ni sama tak dengan gambar rajah tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Ini sembilan bahagian (menunjukkan gambar rajah yang dibentuk bagi bahagi sembilan), ini empat bahagian (menunjukkan gambar rajah pertama bagi bahagi empat)
P: Ada lagi tak yang tak sama?
S: Guli ada empat (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi sembilan), dalam ni guli ada sembilan (menunjukkan gambar rajah pertama bagi bahagi empat).
P: Macam mana dengan ayat ini (menunjukkan ayat 36 ÷ 4 = 9) boleh tak kita wakilkan bagi gambar ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi sembilan)?
S: Tak boleh. Ayat tu bahagi empat.
P: Boleh Azam tulis ayat gambar rajah tu?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 9 = 4$$

P: Ayat ni tak sama dengan tadi ke?
S: Tak sama.
P: Sekarang cuba Azam bahagi tiga?
S: (Subjek menanda seperti berikut):



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Ada berapa bahagian?
S: Tiga.
P: Bila bahagi tiga dapat berapa?
S: Dua belas.
P: Macam mana dapat dua belas?
S: Tiga puluh enam bahagi tiga… dua belas. (Subjek menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} 12 \\ 3\,\overline{)\,36} \\ \underline{-\,3} \\ 6 \\ \underline{6} \end{array}$$

P: Dalam gambar rajah yang mana menunjukkan dua belas?
S: Satu bahagian.
P: Boleh Azam tulis ayat bahagi macam tadi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

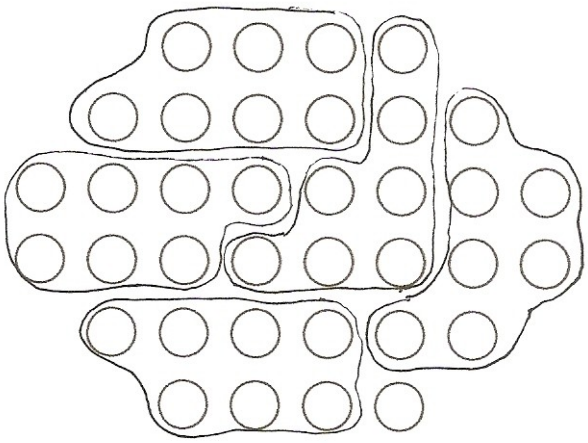
$$36 \div 3 = 12$$

P: Cuba baca?
S: Tiga puluh enam bahagi tiga sama dengan dua belas.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk bahagi tiga.
S: …..tak ada.
P: Yang ni (menunjukkan 3 pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Bahagian.
P: Yang ni (menunjukkan 12 pada ayat bahagi)?
S: Guli dalam satu bahagian.
P: Yang ni (menunjukkan 36 pada ayat bahagi)?
S: Semua guli.
P: Ada cara lain tak nak bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Sekarang cuba bandingkan yang ini (menunjukkan gambar rajah yang dibahagi empat), dan yang ini (menunjukkan gambar rajah yang dibahagi tiga). Sama tak?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Bahagian.
P: Bahagian tak sama? Ada lagi tak yang tak sama?
S: Guli dalam satu bahagian.
P: Lagi?
S: … Tak ada lagi.
P: Yang sama ada tak?
S: Tak ada.
P: Tak ada yang sama?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh Azam bahagi lima?
S: (Subjek mengambil masa yang lama untuk menanda gambar rajah dan menjawab) Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh? Tadi bahagi empat, tiga, dua, sekarang lima. Cuba!

S: Susah nak bahagi lima. (Subjek tidak dapat mengagihkan guli kepada lima bahagian).
P: Azam nak bahagi macam mana? Lima bahagian?
S: Ya.
P: Kalau lima bahagian satu ada berapa guli?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Tujuh.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 5\,\overline{)\,36} \\ -\,\underline{35} \\ 1 \end{array}$$

P: Baik, boleh cuba tunjuk bahagi lima sekali lagi?
S: (Subjek menanda seperti berikut pada gambar rajah):



P: Dapat bentuk berapa bahagian?
S: Lima.
P: Satu bahagian ada berapa?
S: Tujuh.
P: Ada satu guli di sini (menunjukkan satu guli di luar kumpulan)?
S: Baki.
P: Baki berapa?
S: Satu.
P: Berapa jawapan untuk bahagi lima?
S: Tujuh baki satu.
P: Boleh tunjuk pada gambar rajah, yang mana tujuh baki satu?
S: Baki satu yang ini (menunjukkan satu guli di luar bahagian), tujuh guli dalam satu bahagian (menunjukkan satu bahagian)
P: Azam boleh tunjuk cara lain bahagi lima? Ada cara lain tak?
S: Tak ada.

P: Boleh Azam tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 5 = 7 \text{ baki } 1$$

P: Boleh baca?
S: Tiga puluh enam bahagi lima sama dengan tujuh baki satu.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW351, Azam menyelesaikan bahagi tujuh dengan membahagikan gambar rajah yang disediakan pengkaji kepada empat bahagian. Azam menjelaskan pembahagi merujuk bilangan kumpulan yang perlu dibentuk. Subjek juga berpendapat bahawa saiz setiap bahagian merupakan hasil bahagi bagi bahagi empat. Azam juga menanda satu lagi gambar rajah bagi menunjukkan bahagi empat. Bagaimanapun kedua-dua gambar rajah mempunyai saiz dan bilangan kumpulan yang sama.

Selain itu, subjek menulis ayat $36 \div 4 = 9$ bagi mewakili gambar rajah yang ditanda untuk bahagi empat. Subjek juga berpendapat bahawa ayat $36 \div 9 = 4$ tidak boleh digunakan bagi mewakili gambar rajah yang ditandanya bagi bahagi empat. Azam menjelaskan ayat $36 \div 9 = 4$ adalah untuk mewakili bahagi sembilan. Subjek juga menjelaskan bahawa ayat bahagi $36 \div 9 = 4$ dan $36 \div 4 = 9$ adalah berbeza kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza.

Azam mengagihkan gambar rajah yang diberi kepada sembilan bahagian bersaiz empat apabila diminta bahagi sembilan. Subjek juga

berpendapat bilangan kumpulan merujuk pembahagi manakala, saiz kumpulan pula merujuk hasil bahagi. Selain itu, subjek juga menulis ayat bahagi 36 ÷ 9 = 4 bagi mewakili gambar rajah yang mempunyai sembilan bahagian itu.

Bagi bahagi tiga pula, subjek mengagihkan gambar rajah yang diberi kepada tiga bahagian. Subjek juga menjelaskan bahawa tiga bahawa yang dibentuknya itu merujuk penmbahagi. Azam berpendapat jawapan bagi bahagi tiga boleh diperoleh dengan menentukan bilangan guli dalam satu bahagian . Subjek juga menulis ayat 36 ÷ 3 = 12 bagi mewakili gambar rajah yang ditandanya. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang bagi menentukan hasil bahagi.

Bagi menyelesaikan masalah bahagi lima, Azam membentuk kumpulan-kumpulan yang bersaiz tujuh. Subjek menentukanya dengan melakukan pembahagian panjang bagi tiga puluh enam bahagi lima. Subjek juga berpendapat bahawa satu guli yang berada di luar bahagian merupakan baki dalam pembahagian tersebut. Selain itu, subjek menulis ayat 36 ÷ 5 = 7 baki 1, bagi mewakili gambar rajah bahagi lima yang ditandanya.

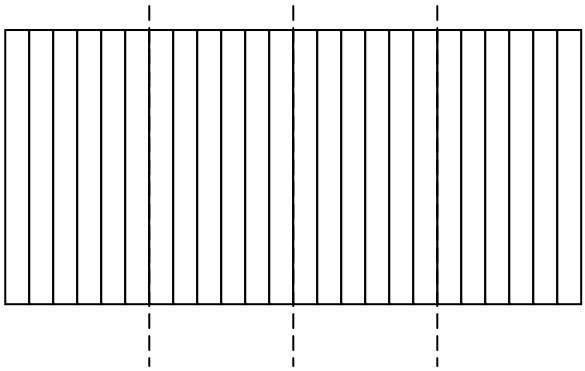
Bentuk Selanjar

Azam menyelesaikan masalah yang membabitkan gambar rajah berbentuk selanjar yang perlu dibahagi empat dengan membentuk

bahagian yang sama saiz. Subjek juga menjelaskan bahawa jawapan bagi masalah bahagi empat boleh diperoleh dengan menentukan saiz setiap bahagian. Petikan PM352 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek

Petikan PM352

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai 24 petak). Kad ini mempunyai banyak jalur? Boleh Azam bahagi jalur-jalur ni kepada empat?
S: (Subjek menghitung jalur-jalur tersebut beberapa kali dan membahagikannya seperti berikut):



P: Boleh beritahu cikgu apa yang Azam buat?
S: Bahagi empat bahagian.
P: Kenapa Azam bahagi kepada empat bahagian?
S: Sebab kena bahagi empat.
P: Kalau bahagi dua ada berapa bahagian?
S: Dua
P: Ada berapa jalur kesemuanya?
S: Dua puluh empat.
P: Dua puluh empat bahagi empat berapa jawapannya?
S: (Subjek mengira bulangan jalur dan menjawab) Enam.
P: Bagaimana dapat enam?
S: Ada enam jalur satu bahagian. Bahagi macam ni pun boleh. (Subjek menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} \underline{6} \\ 4\,)\,24 \\ -\,\underline{24} \\ 0 \end{array}$$

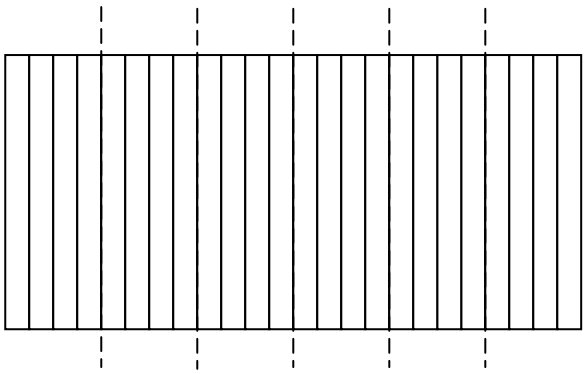
P: Boleh Azam tuliskan ayat bahagi untuk gambar tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 4 = 6$$

P: Agaknya ada tak cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Baik. Yang ini (menunjukkan 24 pada ayat bahagi) sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Semua.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat bahagi) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: Empat bahagian
P: Yang ini (menunjukkan nombor 6 pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Garis….jalur ada enam dalam satu bahagian.
P: Boleh Azam tuliskan ayat bahagi lain bagi gambar rajah tu?
S: (Subjek mendiamkan diri sebentar dan menulis seperti berikut):

$$24 \div 4 = 6$$

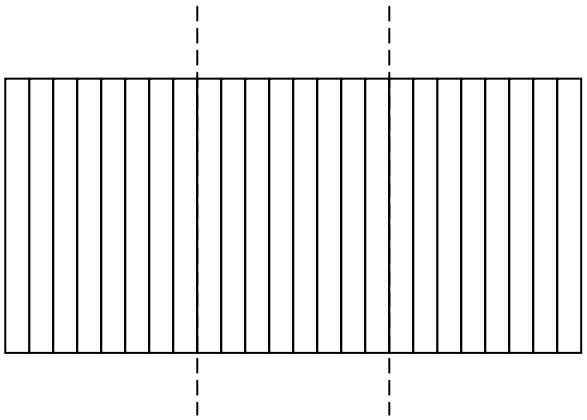
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Ada ayat bahagi lain tak untuk gambar rajah itu?
S: Tak ada.
P: Boleh tak kita tulis ayat ini (menulis ayat $24 \div 6 = 4$) bagi gambar rajah tadi?
S: Tak boleh sebab itu dua puluh empat bahagi enam, gambar rajah ni dua puluh empat bahagi empat.
P: Boleh Azam tunjuk bagaimana dua puluh empat bahagi enam (memberikan sehelai kertas lain yang mempunyai gambar rajah jalur)?
S: (Subjek menghitung dan melukis seperti berikut):



P: Ada berapa bahagian atau kumpulan?
S: Enam.
P: Ada berapa jalur setiap kumpulan?
S: Empat.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi bagi gambar rajah tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 6 = 4$$

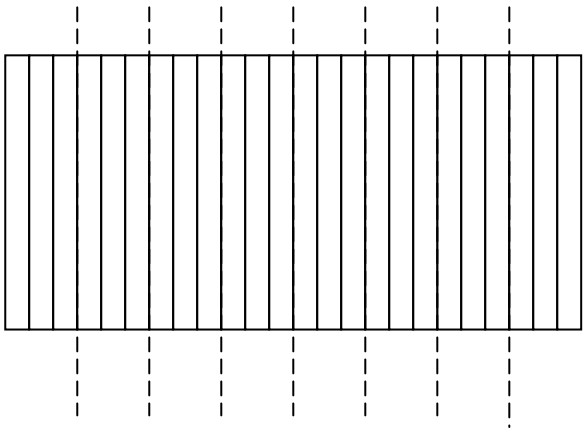
P: Ada cara lain untuk menunjukkan bahagi enam?
S: …Tak ada.
P: Kedua-dua gambar rajah tu (menunjukkan gambar rajah bagi 24 ÷ 4 dan 24 ÷ 6) sama tak?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ini bahagi enam, yang ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat) bahagi empat.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Jalur, yang ni empat (menunjukkan yang bahagi enam), yang ini (menunjukkan yang bahagi empat) enam.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: …Tak ada.
P: Yang sama?
S: Tak ada … jalur, jalur ada dua puluh empat
P: Cuba bandingkan dengan ayat bahagi tadi. Sama tak kedua-dua ayat tu (menunjukkan 24 ÷ 6 = 4 dan 24 ÷ 4 = 6)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni enam (menunjukkan ÷ 6) yang ini empat (menunjukkan ÷ 4).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Yang ni empat (menunjukkan = 4) yang ini enam (menunjukkan = 6).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada
P: Yang sama?
S: Jalur ada dua puluh empat
P: Lagi?
S: Tak ada
P: Sekarang boleh Azam bahagi tiga (memberikan satu kertas baru)?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Dah bahagi tiga?
S: Dah.
P: Dua puluh empat bahagi tiga, apa jawapannya?
S: Lapan.
P: Macam mana dapat lapan? Dalam gambar rajah yang mana menunjukkan lapan?
S: Satu bahagian ada lapan jalur.
P: Baik, boleh Azam tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 3 = 8$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh empat bahagi tiga sama dengan lapan.
P: Ada ayat bahagi lain tak untuk gambar rajah tadi?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Azam bahagi lapan?
S: (Subjek menandakan seperti berikut):



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk yang ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 8 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Dua puluh empat bahagi lapan sama dengan tiga.
P: Ada cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat untuk bahagi tiga)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ini (menunjukkan ayat $24 \div 3 = 8$) bahagi tiga, jawapan lapan. Yang ni (menunjukkan ayat $24 \div 8 = 3$) bahagi lapan jawapan tiga.
P: Lagi?
S: Tak ada lagi.
P: Yang sama, ada tak?
S: Dua puluh empat.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Baik, gambar rajah ni sama tak dengan gambar rajah untuk bahagi tiga?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Bahagian, yang ini lapan (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan), yang ini tiga (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai tiga bahagian).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Ada, jalur sini ada lapan (menunjukkan gambar rajah dengan tiga bahagian), yang ini tiga jalur (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan bahagian).
P: Yang sama?
S: Tak ada.
P: Perbezaan?
S: Yang ni tiga kumpulan (menunjukkan gambar rajah dengan tiga kumpulan) sama dengan tiga kotak (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan kumpulan).
P: Ada perbezaan yang lain?
S: Yang ni lapan jalur (menunjukkan gambar rajah dengan tiga kumpulan) sama dengan lapan kumpulan (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan kumpulan).
P: Baik, sekarang boleh Azam bahagi lima?
S: (Subjek mencuba agak lama, kemudian menjawab). Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh? Bahagi lima?
S: Dua puluh empat tak boleh bahagi lima.
P: Kalau bahagi lima, berapa jawapannya?

S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Empat baki empat.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5\,\overline{)\,24} \\ \underline{-\,20} \\ 4 \end{array}$$

P: Baik, boleh cuba bahagi lima?
S: (Subjek cuba membahagi dan menjawab) Tak boleh.
P: Tak boleh? Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 5 = 4 \text{ baki } 4$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PM352, Azam menyelesaikan masalah bahagi empat dengan mengagihkan gambar rajah yang diberi kepada empat bahagian. Azam juga menjelaskan bahawa empat bahagian tersebut merujuk pembahagi. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa untuk bahagi dua perlu mempunyai dua bahagian. Subjek juga menjelaskan bahawa saiz setiap bahagian merujuk jawapan bagi hasil bahagi. Bagi bahagi empat subjek berpendapat bahawa hasil bahaginya adalah enam merujuk bilangan jalur setiap bahagian. Subjek juga menulis ayat bahagi $24 \div 4 = 6$ bagi mewakili pembahagian tersebut.

Bagi bahagi enam pula, Azam mengagihkan gambar rajah yang diberi oleh pengkaji kepada enam bahagian. Saiz setiap bahagian, iaitu empat merupakan hasil bahagi pembahagian tersebut. Selain itu, subjek juga menulis ayat $24 \div 6 = 4$ bagi mewakili gambar rajah yang ditanda untuk bahagi enam.

Azam juga berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah bagi bahagi empat dan bahagi enam adalah berbeza. Menurut Azam, kedua-dua gambar rajah mempunyai bilangan bahagian dan saiz setiap bahagian yang berbeza. Bagi ayat $24 \div 6 = 4$ dan $24 \div 4 = 6$ pula, subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat tersebut adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza

Bagi bahagi tiga pula, Azam menyelesaikannya dengan mengagihkan gambar rajah yang diberi kepada tiga bahagian. Subjek juga menjelaskan bahawa saiz setiap kumpulan merupakan hasil bahagi. Subjek juga menulis ayat bahagi $24 \div 3 = 8$ bagi mewakili gambar rajah yang ditandanya itu. Subjek juga menjelaskan nombor tiga pada ayat bahagi merujuk bilangan kumpulan, manakala saiz kumpulan tersebut merujuk nombor lapan pada ayat bahagi.

Azam menyelesaikan masalah bahagi lapan dengan mengagihkan dua puluh empat jalur yang terdapat pada gambar rajah kepada lapan bahagian. Azam juga menulis ayat $24 \div 8 = 3$ bagi mewakili gambar rajah yang ditandanya itu. Subjek menjelaskan lapan pada ayat bahagi tersebut merujuk bilangan bahagian, manakala tiga pada ayat itu merujuk saiz setiap bahagian. Subjek juga berpendapat bahawa ayat $24 \div 8 = 3$ dan ayat $24 \div 3 = 8$ adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Selain itu, Azam juga berpendapat gambar rajah yang ditandanya bagi bahagi tiga dan bahagi lapan juga adalah berbeza kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza. Bagi

menyelesaikan bahagi lima pula, subjek menulis ayat bahagi 24 ÷ 5 = 4 baki 4. Subjek juga menjelaskan pembahagian lima mempunyai baki.

Protokol 4: Umi

Beliau berusia 9 tahun 2 bulan semasa temu duga dijalankan. Berikut adalah tingkah laku yang ditunjukkan oleh beliau.

1. Dia menggambarkan perkataan ‘bahagi’ dengan menulis simbol ‘ ÷ ’, ‘ $\overline{)\quad}$ ’ dan perkataan BAHAGI.

2. Bagi ayat enam bahagi dua, dia menggambarkannya dengan menulis ayat 6 ÷ 2 dan $2\overline{)\,6}$.

3. Dia mewakilkan ayat a ÷ b dengan membentuk kumpulan-kumpulan bersaiz b. Menurutnya, pembahagi menentukan saiz kumpulan.

4. Bagi pembahagian yang mempunyai baki a ÷ b = c baki d, jawapannya ditulis sebagai c baki d .

5. Menurutnya, gambar rajah yang mempunyai c kumpulan bersaiz b tidak sama dengan gambar rajah yang mempunyai b kumpulan bersaiz c kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.
6. Menurutnya, persamaan a ÷ b = c tidak sama dengan a ÷ c = b kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

7. Bagi persamaan $a \div b = c$, a merujuk semua yang hendak dibahagi, b merujuk saiz kumpulan, dan c merujuk bilangan kumpulan.

8. Susunan yang dibentuk bagi persamaan $a \div b = c$, adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi a yang ditolak secara berulang sebanyak c kali. Setiap penolakan perlu bersaiz b, dan nilai c dalam $a \div b = c$ adalah sama dengan bilangan penolakan berulang yang dilakukan.

9. Menurutnya, jika $a \div b = c$, maka
   i. $a0 \div b = c0$
   ii. $a00 \div b = c00$
   iii. $a \div a = 1$
   iv. $a0 \div a0 = 1$
   v. $a \div 1 = a$
   vi. $a0 \div 1 = a0$

10. Bagi ayat $0 \div a$, jawapannya adalah sifar kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar.

11. Bagi ayat $a \div 0$, jawapannya adalah sifar kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar.

12. Menurutnya, ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

13. Persamaan darab bagi ayat a ÷ b adalah c x b = a, di mana c adalah hasil bahagi bagi a ÷ b.

Gambaran Mental

Perkataan Bahagi

Umi mempunyai tiga gambaran apabila perkataan 'bahagi' disebut, iaitu simbol ' ÷ ', simbol ')‾‾ ', dan perkataan 'bahagi'. Petikan GM411 yang berikut memaparkan tingkah laku yang di tunjukkan oleh subjek.

Petikan GM411

P: Kalau cikgu sebut bahagi gambar apa ada dalam kepala?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ada gambar tak dalam kepala?
S: (Subjek mengangguk).
P: Gambar apa yang Umi nampak?
S: Nak tulis ke?
P: Boleh. Tulis di kertas ini (memberikan sehelai kertas)
S: (Subjek menulis simbol seperti berikut pada kertas).

' ÷ '

P: Boleh beritahu cikgu, apa yang Umi tulis?
S: Bahagi
P: Ada gambar lain tak bila cikgu sebut bahagi?
S: (Subjek berfikir sebentar dan menulis simbol berikut):

')‾‾ '

P: Ada gambar lain tak tentang bahagi?
S: (Subjek diam sambil berfikir)
P: Bila cikgu sebut bahagi, apa yang terlintas di fikiran Umi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

' b a h a g i '

P: Apa yang Umi tulis tu?
S: Bahagi.
P: Bahagi?

S: (Subjek mengangguk)
P: Ada gambar lain?
S: Tak ada.
P: Betul, tak ada gambar lain?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, subjek menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis simbol ‘ ÷ ’,) ‾‾, dan menulis perkataan ‘bahagi’.

Gambaran mental ayat bahagi

Umi mempunyai dua gambaran bagi ayat enam bahagi dua. Petikan GM412 berikut memaparkan tingkah laku Umi .

Petikan GM412

P: Kalau saya sebut enam bahagi dua, gambar apa ada dalam fikiran Umi?
S: Nak tulis?
P: Ada gambar tak?
S: Ada.
P: Baik. Boleh Umi lukis gambar yang Umi nampak kalau sebut enam bahagi dua?
S: (Subjek menulis 6 ÷ 2 pada kertas).
P: Boleh beritahu saya apa yang Umi tulis?
S: Enam bahagi dua (Subjek menunjukkan ayat yang ditulisnya).
P: Selain pada gambar tu ada gambar lain tak?
S: (Subjek menulis 2) 6).
P: Boleh beritahu cikgu apa yang Umi tulis?
S: Enam bahagi dua juga.
P: Ada gambar lain tak bila cikgu sebut enam bahagi dua?
S: (Subjek tidak berkata apa-apa sambil berfikir).
P: Apa lagi yang Umi nampak?

S: Itu saja.
P: Tak ada gambar lain ke?
S: Tak ada.
P: Kalau cikgu sebut lapan bahagi empat?
S: (Subjek menulis 8 ÷ 4).
P: Ada gambar lain?
S: (Subjek menulis 4) 8).
P: Ada gambar lain ?
S: Tak ada
P: Betul, tak ada lagi?
S: Tak ada

Dalam petikan GM412, Umi menggambarkan enam bahagi dua dengan menulis ayat bahagi 6 ÷ 2. Selain daripada ayat tersebut, Umi juga memberikan satu lagi gambaran iaitu, $2\overline{)6}$. Bagi ayat lapan bahagi empat pula, subjek menulis dua gambaran yang dimiliki, iaitu 8 ÷ 4 dan $4\overline{)8}$.

Perwakilan

Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Umi mewakilkan ayat bahagi 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz empat Subjek juga mewakilkan ayat bahagi yang dikemukakan secara lukisan dan bercerita. Sedutan daripada Petikan PW421 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi.

Petikan PW421

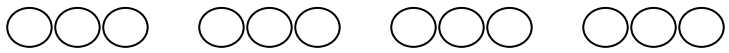
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4) cuba Umi baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Baik, sekarang cikgu nak Umi tunjuk dengan butang-butang ni macam mana dua belas bahagi empat?
S: (Subjek menghitung dua belas biji butang dan menyusun seperti berikut):

P: Dah siap ke?
S: (Subjek mengangguk).
P: Yang ni susunan untuk ayat bahagi apa?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Baik, yang mana menunjukkan dua belas bahagi empat di sini?
S: Semua ada dua belas, bahagi empat, ada empat di sini (subjek menunjukkan satu kumpulan).
P: Ada berapa kumpulan dalam susunan ni?
S: Tiga.
P: Apa kaitan tiga dengan ayat ini (menunjukkan ayat 12 ÷ 4)?

S: Dua belas bahagi empat sama dengan tiga (subjek menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} \underline{\ \ 3} \\ 4\ )\ 12 \\ -\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

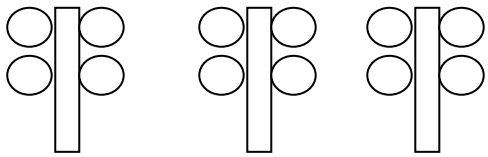
P: Jadi tiga kumpulan menunjukkan apa?
S: Jawapan.
P: Kenapa Umi susun macam ni (menunjukkan satu kumpulan), kenapa letak empat butang dalam satu kumpulan?
S: Sebab kena bahagi empat.
P: Yang mana menunjukkan kena bahagi empat?
S: Ini (menunjukkan empat pada ayat 12 ÷ 4).
P: Kalau ayat tu dua belas bahagi tiga, macam mana agaknya kena susun?
S: Letak tiga butang.
P: Boleh tunjuk?
S: (Subjek menyusun semula seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga?
S: Sebab kena bahagi tiga.
P: Boleh tak kita gunakan ayat ni (menunjukkan ayat 12 ÷ 4) untuk susunan Umi tadi?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab ayat tu dua belas bahagi empat.
P: Dua belas bahagi empat boleh tak kita gunakan untuk susunan tu?
S: Tak boleh sebab butang ni untuk bahagi tiga.
P: Baik boleh tunjuk semula untuk ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 12 ÷ 4)?
S: (Subjek menyusun semula seperti berikut):

P: Susunan ni ada berapa kumpulan?
S: Tiga.

P: Boleh tak kita gunakan ayat ini (menunjukkan ayat 12 ÷ 3) untuk susunan ini?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab yang ini dua belas bahagi empat bukan dua belas bahagi tiga.
P: Boleh Umi buat cerita untuk ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 12 ÷ 3)?
S: Saya ada dua belas bola. Saya nak bahagi kepada tiga orang kawan.
P: Baik, kawan ada berapa orang?
S: Tiga.
P: Baik boleh tunjuk dengan butang dan penyedut minuman ini. Katakan penyedut minuman tu kawan Umi, dan butang tu bola. Boleh tunjuk tak dua belas bahagi tiga?
S: Boleh (subjek menyusun seperti berikut):



P: Yang ni dua belas bahagi berapa?
S: Tiga.
P: Seorang dapat berapa?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Empat.
P: Tadi Umi letak berapa butang untuk dua belas bahagi empat?
S: Empat.
P: Jadi sama tak dengan yang tadi?
S: Butang sahaja sama. Soalan lain.
P: Jadi, boleh tak kita gunakan ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 12 ÷ 4) untuk susunan ini?
S: Tak boleh, yang ini dua belas bahagi tiga.
P: Tadi Umi kata kalau bahagi tiga perlu ada tiga butang satu kumpulan?
S: Yang ni bahagi kepada tiga orang.
P: Tak sama?
S: Tak.
P: Baik, kalau dua belas bahagi dua macam mana?
S: Dua butang (subjek menjawab sambil menyusun seperti berikut):

P: Ada berapa butang satu kumpulan?
S: Dua.
P: Yang ni dua belas bahagi berapa?
S: Dua.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua belas bahagi dua?
S: Tak ada.
P: Di sini Umi kumpulkan dua butang. Kenapa kumpulkan dua?
S: Sebab kena bahagi dua.
P: Ada berapa kumpulan semuanya?
S: Enam (subjek menghitung dan menjawab).
P: Apa kaitan enam kumpulan tu dengan dua belas bahagi dua?
S: Jawapan dia.
P: Yang mana menunjukkan dua belas?
S: Semua butang.
P: Dua?
S: Dua (menunjukkan satu kumpulan).
P: Ada cara lain nak tunjuk bahagi dua?
S: Tak ada.
P: Kalau cikgu nak Umi bahagi enam berapa butang Umi akan letak dalam satu kumpulan?
S: Enam.
P: Boleh tunjuk dengan butang macam tadi?
S: Boleh (subjek menyusun seperti berikut):

P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Dua.
P: Dalam ayat dua belas bahagi enam, yang mana menunjukkan dua?
S: Jawapan dia.
P: Ada cara lain tak nak bahagi enam selain letak enam butang dalam satu kumpulan?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW421, Umi mewakilkan ayat bahagi 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Subjek berpendapat bahawa saiz kumpulan yang dibentuk adalah sama dengan pembahagi, manakala bilangan kumpulan pula merupakan hasil bahagi untuk ayat 12 ÷ 4.

Bagi ayat 12 ÷ 3 pula, Umi membentuk empat kumpulan bersaiz tiga. Subjek menjelaskan kumpulan yang bersaiz tiga merujuk kepada pembahagi yang terdapat pada ayat bahagi iaitu, 12 ÷ 3. Subjek juga berpendapat bahawa ayat bahagi 12 ÷ 4 tidak boleh mewakili susunan yang dibentuk bagi dua belas bahagi tiga. Menurut subjek, susunannya itu yang bersaiz tiga merujuk pembahagi tiga sedangkan ayat bahagi dua belas bahagi empat mempunyai pembahagi empat.

Selain itu, subjek juga membentuk cerita bagi ayat dua belas bahagi tiga dan seterusnya menyusun menggunakan butang dan penyedut minuman. Dalam cerita tersebut, subjek membahagi dua belas bola kepada tiga orang kawan. Umi berpendapat bahawa susunan yang dibentuk bagi dua belas bahagi empat tidak sama dengan susunan yang dibentuk bagi dua belas bahagi tiga kerana pembahaginya berbeza.

Subjek membentuk enam kumpulan bersaiz dua bagi mewakili ayat 12 ÷ 2. Subjek menjelaskan saiz dua bagi setiap kumpulan merujuk pembahagi yang bernilai dua. Subjek juga berpendapat bahawa susunan tersebut tidak boleh diwakili dengan ayat dua belas bahagi enam kerana pembahaginya berbeza. Subjek juga membentuk dua kumpulan bersaiz enam bagi mewakili pembahagian dua belas bahagi enam. Umi juga berpendapat bahawa susunan tersebut tidak boleh diwakili oleh ayat dua belas bahagi dua kerana pembahaginya bukan enam.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Umi mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki, iaitu 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan bersaiz tiga. Satu kumpulan lagi yang bersaiz kurang daripada pembahagi dinamakan baki. Petikan PW422 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW422

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 8 ÷ 3). Boleh Umi baca yang ini?
S: Lapan bahagi tiga.
P: Baik, boleh Umi tunjuk dengan butang-butang ini macam mana lapan bahagi tiga?
S: (Subjek menghitung lapan butang dan menyusun seperti berikut):

P: Dah siap?
S: Dah.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Tiga.
P: Kenapa Umi letak tiga butang?
S: Sebab lapan bahagi tiga.
P: Yang ini (menunjukkan dua butang yang diletak berasingan)?
S: Baki.
P: Kenapa ada baki?
S: Sebab lapan bahagi tiga dapat baki (subjek menjawab sambil menulis yang berikut):

$$\begin{array}{r} \underline{2} \\ 3\,)\,8 \\ \underline{-\,6} \\ 2 \end{array}$$

P: Berapa baki untuk lapan bahagi tiga?
S: Dua.
P: Dalam susunan Umi yang mana menunjukkan baki dua?
S: Yang ini (menunjukkan dua butang yang diasingkan).
P: Yang mana menunjukkan lapan?
S: Semua butang.
P: Termasuk yang ini ke (menunjukkan dua butang yang diasingkan)?
S: Ya.
P: Yang ini (menunjukkan tiga pada ayat bahagi)?
S: Ini (menunjukkan satu kumpulan).
P: Jawapan ayat bahagi tu?
S: Dua baki dua (menunjukkan kumpulan bersaiz tiga dan baki).
P: Ada cara lain nak tunjuk lapan bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh tunjuk yang ini (menunjukkan ayat bahagi 8 ÷ 5)?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):

P: Dah siap?
S: Dah.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu, baki tiga (subjek menjawab sambil menulis yang berikut):

$$\begin{array}{r} \underline{1} \\ 5\,)\,8 \\ \underline{-\,5} \\ 3 \end{array}$$

P: Ada berapa butang dalam satu kumpulan?
S: Lima sebab kena bahagi lima.
P: Yang ini boleh tak kira sebagai satu kumpulan ke?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab ada tiga je.
P: Sepatutnya ada berapa untuk kira sebagai satu kumpulan?
S: Lima.
P: Kenapa perlu ada lima?
S: Sebab soalan kena bahagi lima.
P: Dalam susunan ni yang mana menunjukkan ini (menunjukkan lapan pada ayat 8 ÷ 5)?
S: Semua (menunjukkan semua butang).

P: Termasuk tiga butang ini ke (menunjukkan tiga butang yang diasingkan)?
S: Ya.
P: Macam mana yang ni (menunjukkan 5 pada ayat '8 ÷ 5')?
S: Yang ni (menunjukkan satu kumpulan bersaiz lima).
P: Jawapan bagi ayat tadi?
S: Satu baki tiga (menunjukkan kumpulan dan baki).
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat ni (menunjukkan ayat 8 ÷ 5)?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW422, Umi mewakilkan ayat bahagi 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan yang bersaiz tiga. Subjek juga mengasingkan dua biji butang sebagai baki. Subjek berpendapat bahawa jawapan bagi ayat bahagi tersebut adalah dua baki dua. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa saiz kumpulan perlu sama dengan pembahagi. Umi menjelaskan dua kumpulan bersaiz tiga yang terbentuk dan baki sebanyak dua itu merujuk hasil bahagi. Subjek juga menjelaskan angka lapan yang terdapat pada ayat bahagi merujuk kesemua butang termasuk yang diasingkan sebagai baki.

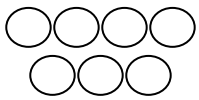
Bagi mewakili ayat bahagi 8 ÷ 5 pula, Umi membentuk satu kumpulan bersaiz lima dan tiga butang lagi sebagai baki. Subjek juga berpendapat bahawa saiz kumpulan perlu sama dengan pembahagi. Menurut subjek, kumpulan yang mempunyai saiz kurang daripada pembahagi perlu di ambil kira sebagai baki. Umi juga menjelaskan bahawa lapan pada ayat bahagi 8 ÷ 5 merujuk kesemua butang dalam susunannya termasuk tiga butang yang diasingkan sebagai baki. Subjek juga menjelaskan lima pada ayat bahagi merujuk saiz satu kumpulan.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Umi membentuk satu kumpulan bersaiz tujuh bagi mewakili ayat 7 ÷ 7. Subjek juga membentuk sebanyak tujuh kumpulan bersaiz satu bagi mrwakili ayat 7 ÷ 1. Petikan PW423 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai penyebut dan pengangka yang sama.

Petikan PW423

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 7). Cuba Umi baca apa yang tertulis di sini?
S: Tujuh bahagi tujuh.
P: Baik, boleh Umi tunjuk macam tadi macam mana tujuh bahagi tujuh?
S: (Subjek mengambil tujuh butang dan menyusunnya seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Ada berapa butang dalam kumpulan tu?
S: Tujuh.
P: Kenapa Umi letak semua butang dalam satu kumpulan?
S: Sebab kena bahagi tujuh.
P: Dalam susunan tu yang mana menunjukkan tujuh bahagi tujuh?
S: Semua butang tu tujuh, satu kumpulan ada tujuh butang tu bahagi tujuh.
P: Tujuh bahagi tujuh dapat berapa?
S: Satu.
P: Yang mana menunjukkan satu?
S: Satu kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk tujuh bahagi tujuh?

S: Tak ada.
P: Boleh buat cerita?
S: Saya ada tujuh biji bola. Saya nak bahagi kepada tujuh orang kawan.
P: Boleh tunjuk gunakan butang dan penyedut minuman? Gunakan butang yang lain.
S: Boleh (subjek menyusun seperti berikut):

P: Seorang dapat berapa bola?
S: Satu.
P: Susunan ni sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Kumpulan ni tujuh, tadi satu.
P: Ada lagi?
S: Satu kumpulan ada satu (menunjukkan susunan baru). Yang ni ada tujuh (menunjukkan susunan sebelumnya).
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain tujuh bahagi tujuh?
S: Tak ada.
P: Baik, cuba baca yang ini (menunjukkan ayat 7 ÷ 1)?
S: Tujuh bahagi satu.
P: Baik, boleh Umi tunjuk dengan butang macam tadi?
S: (Subjek menyususn seperti berikut):

P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tujuh.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Satu.
P: Kenapa Umi letak satu?
S: Sebab kena bahagi satu.
P: Yang ni sama tak dengan tadi untuk tujuh bahagi tujuh?
S: Tak sama.
P: Yang Umi susun untuk cerita tadi?
S: Susunan sama, soalan tak sama?
P: Soalan tak sama?
S: Soalan ni bahagi satu, yang tadi bahagi tujuh…..tak sama.
P: Yang mana menunjukkan tujuh dalam susunan Umi?
S: Semua butang.

P: Satu?
S: Ini (menunjukkan satu butang).
P: Jawapan untuk tujuh bahagi tujuh?
S: Tujuh bahagi satu tujuh, semua juga.
P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh bahagi satu?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW423, subjek mewakilkan ayat bahagi 7 ÷ 7 dengan membentuk satu kumpulan yang mempunyai tujuh butang di dalamnya. Subjek menjelaskan tujuh butang di dalam satu kumpulan merujuk pembahagi. Selain itu, subjek juga membentuk cerita dan membina tujuh kumpulan bersaiz satu. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua susunan adalah berbeza kerana mempunyai saiz dan bilangan kumpulan yang berbeza.

Bagi ayat bahagi 7 ÷ 1 pula, Umi membentuk tujuh kumpulan bersaiz satu. Subjek juga menjelaskan bilangan butang setiap kumpulan merujuk saiz pembahagi. Selain itu, subjek berpendapat bahawa tujuh pada ayat tujuh bahagi satu merujuk semua butang, manakala satu pula merujuk saiz pembahagi. Subjek juga menjelaskan hasil bahagi juga merujuk kesemua butang dalam susunannya.

Gambar Rajah

Gambar Rajah Diskret

Umi mewakilkan gambar rajah yang mempunyai lima belas biji bola dengan menulis ayat bahagi, 15 ÷ 5 = 3 dan 15 ÷ 3 = 5.

Subjek juga mejelaskan kaitan antara gambar rajah yang diberi oleh pengkaji dengan ayat-ayat bahagi yang ditulisnya. Petikan PW424 yang berikut, menggambarkan cara subjek mewakilkan gambar rajah diskret.

Petikan PW424

P: (Menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas biji bola) Cuba tengok gambar ini, boleh Umi tulis ayat bahagi untuk gambar ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 3 = 5$$

P: Boleh baca?
S: Lima belas bahagi tiga sama dengan lima.
P: Boleh beritahu cikgu kenapa Umi tulis ayat seperti ini (menunjukkan ayat bahagi)?
S: Semua ada lima belas bola, satu bulatan ada tiga bola. Lima belas bahagi tiga sama dengan lima (menunjukkan gambar rajah)
P: Baik, ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 5 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Lima belas bahagi lima sama dengan tiga.
P: Ayat ni sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama.
P: Yang mana tak sama?
S: Ini bahagi lima (menunjukkan ayat $15 \div 5 = 3$) yang ini bahagi tiga (menunjukkan ayat $15 \div 3 = 5$)
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Jawapan dia tak sama. Jawapan ini (menunjukkan ayat bahagi $15 \div 5 = 3$) tiga, jawapan ini (menunjukkan $15 \div 3 = 5$) lima.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Tak ada.
P: Tak ada yang sama?
S: Lima belas.

P: Lagi?
S: Tak ada.
P: Yang ini (menunjukkan lima pada ayat 15 ÷ 5 = 3) sama tak dengan yang ini (menunjukkan lima pada 15 ÷ 3 = 5)?
S: Dalam ayat tak sama.
P: Di mana sama?
S: Gambar.
P: Dalam gambar yang mana menunjukkan lima?
S: Bulatan, … lima bulatan.
P: Jadi, lima di kedua-dua ayat menunjukkan lima bulatan?
S: Ya.
P: Ada lagi tak nombor pada kedua-dua ayat tak sama tapi dalam gambar sama?
S: Tiga.
P: Tiga?
S: Ya.
P: Dalam gambar yang mana tiga?
S: Ini (menunjukkan satu kumpulan).
P: Yang ini (menunjukkan lima belas pada ayat 15 ÷ 5 = 3) sama dengan apa pada gambar?
S: Semua.
P: Ada ayat bahagi lain untuk gambar rajah ini?
S: Tak ada.

Petikan PW425

P: (Menunjukkan gambar enam belas ekor kura-kura). Cuba lihat yang ini pula. Boleh Umi buat ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

16 ÷ 4 = 4

P: Cuba baca?
S: Enam belas bahagi empat sama dengan empat.
P: Di sini Umi tulis enam belas, kenapa enam belas?
S: Sebab ada enam belas kura-kura.
P: Yang ini (menunjukkan empat pada pembahagi)?
S: Empat kura-kura.
P: Yang ni (menunjukkan empat pada hasil bahagi)?
S: Empat bulatan.
P: Boleh buat ayat lain?
S: (Subjek menulis seperti beikut):

16 ÷ 4 = 4

P: Baca?
S: Enam belas bahagi empat sama dengan empat
P: Ayat ini sama tak dengan yang tadi?
S: Sama.
P: Kenapa sama?
S: Sebab ada empat kura-kura, kumpulan pun ada empat.
P: Empat ni (menunjukkan pembahagi) dan yang ini (menunjukkan hasil bahagi) sama tak?
S: Sama.
P: Empat yang mana untuk kura-kura, dan empat yang mana untuk kumpulan?
S: Dua-dua pun sama.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Umi mewakilkan gambar rajah yang mempunyai lima belas biji bola dengan menulis ayat bahagi $15 \div 5 = 3$ dan $15 \div 3 = 5$. Subjek menjelaskan lima pada ayat-ayat tersebut merujuk bilangan kumpulan manakala, tiga pula merujuk saiz kumpulan. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi tersebut adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Umi juga berpendapat bahawa lima pada kedua-dua ayat adalah berbeza kerana lima pada satu ayat merupakan pembahagi manakala, lima pada ayat yang lain merupakan hasil bahagi.

Dalam Petikan PW425, Umi mewakilkan gambar rajah yang mempunyai enam belas ekor kura-kura dengan menulis ayat bahagi $16 \div 4 = 4$. Umi juga menulis satu lagi ayat yang sama dengan ayat sebelumnya. Selain itu subjek juga menjelaskan bahawa enam belas pada ayat tersebut merujuk kesemua kura-kura dan empat

pada kedudukan pembahagi dan hasil bahagi ayat tersebut pula merujuk bilangan kumpulan atau saiz kumpulan.

Gambar Rajah Selanjar

Umi mewakilkan gambar rajah selanjar dengan menulis ayat bahagi $21 \div 7 = 3$ dan ayat bahagi $21 \div 3 = 7$. Subjek juga menjelaskan perkaitan antara ayat-ayat bahagi tersebut dengan gambar rajah. Petikan PW426 yang berikut memamaparkan tingkah laku subjek mewakilkan gambar rajah selanjar yang diberi oleh pengkaji.

Petikan PW426

P: (Menunjukkan gambar rajah selanjar dua puluh satu jalur) cuba tengok gambar ini pula, ada banyak jalur. Sama macam tadi boleh Umi buat ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$21 \div 7 = 3$$

P: Kenapa ada nombor ini (menunjukkan dua puluh satu pada ayat bahagi)?
S: Sebab ada dua puluh satu jalur.
P: Yang ini (menunjukkan nombor tujuh) sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Tujuh jalur (menunjukkan satu bahagian).
P: Yang ini (menunjukkan tiga)?
S: Ada tiga bahagian (menunjukkan tiga kumpulan).
P: Umi ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$21 \div 3 = 7$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh satu bahagi tiga sama dengan tujuh.
P: Ayat ni sama tak dengan yang tadi?
S: Tak.

P: Yang mana tak sama?
S: Sini tiga (menunjukkan tiga pada ayat 21 ÷ 3 = 7), yang ni tujuh (menunjukkan ayat 21 ÷ 7 = 3).
P: Baik, apa lagi yang tak sama? Ada lagi tak?
S: Jawapan ni tujuh (menunjukkan ayat 21 ÷ 3 = 7), jawapan ni tiga (menunjukkan ayat 21 ÷ 7 = 3).
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Dua puluh satu ni sama.
P: Dua puluh satu sama. Yang tak sama ada lagi?
S: Tak ada.
P: Yang sama?
S: Tak ada.
P: Jalur-jalur dalam satu bahagian ni sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: Jawapan dia (menunjukkan tujuh pada ayat 21 ÷ 3 = 7)?
P: Pada ayat ini (menunjukkan ayat 21 ÷ 7 = 3)?
S: Tujuh di sini (menunjukkan tujuh pada ayat 21 ÷ 7 = 3).
P: Jadi kedua-dua tujuh sama ke?
S: Sama.
P: Macam mana dengan tiga di kedua-dua ayat?
S: Sama.
P: Dalam gambar rajah yang mana menunjukkan tiga?
S: Bahagian (menunjukkan tiga kumpulan).
P: Ada cara lain lagi tak nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW426, Umi menulis ayat bahagi 21 ÷ 3 = 7 dan 21 ÷ 7 = 3 bagi mewakili gambar rajah selanjar yang diberi oleh pengkaji. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi tersebut adalah berbeza kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Umi juga berpendapat bahawa nombor dua puluh satu yang terdapat pada kedua-dua ayat adalah sama.

Selain itu, subjek menjelaskan bahawa angka tujuh yang terdapat pada kedua-dua ayat bahagi merujuk saiz kumpulan. Demikian juga dengan nombor tiga yang terdapat pada kedua-dua

ayat. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua tiga merujuk pada bilangan kumpulan yang terdapat pada gambar rajah.

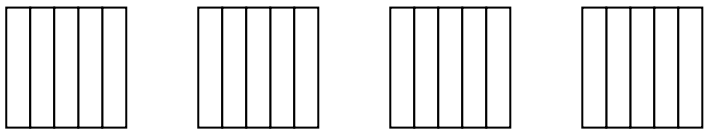
Penolakan Berulang

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Umi mewakilkan ayat bahagi yang diberi oleh pengkaji secara penolakan berulang dengan menggunakan bahan-bahan yang disediakan oleh pengkaji. Subjek juga mewakilkan ayat bahagi 20 ÷ 5 dengan membentuk sebanyak empat kumpulan yang bersaiz lima. Petikan PW427 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi tanpa baki.

Petikan PW427

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5). Cuba Umi baca apa yang ini?
S: Dua puluh bahagi lima.
P: Baik, sekarang boleh Umi tunjuk dengan penyedut minuman ini ayat ini (menunjukkan kad)?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa penyedut minuman?

S: Lima.

P: Kenapa kumpulkan lima macam ini.

S: Sebab nak bahagi lima.

P: Sebab nak bahagi lima? Kalau nak bahagi dua Umi kumpulkan berapa penyedut minuman satu kumpulan?

S: Dua.

P: Baik ada cara lain tak nak tunjuk ayat ni (menunjukkan kad yang tertulis ayat 20 ÷ 5)?

S: (Subjek menyusun semula kemudian menjawab). Tak ada.

P: Baik, boleh Umi susun balik untuk ayat dua puluh bahagi lima?

S: (Subjek menyususn semula seperti sebelumnya).

P: Baik, kumpulan ada berapa?

S: Empat.

P: Kumpulan tu sama dengan apa pada ayat bahagi?

S: … Jawapan dia.

P: Kenapa jawapan?

S: Sebab dua puluh bahagi lima sama dengan empat (menunjukkan secara pembahagian panjang):

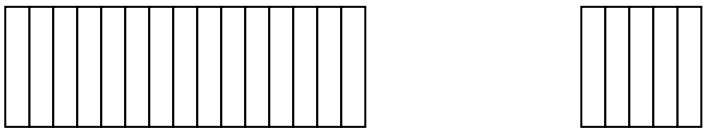
$$\begin{array}{r} \underline{\ \ 4} \\ 5\ )\ 20 \\ \underline{-\ 20} \\ 0 \end{array}$$

P: Baik, sekarang cuba baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5)?

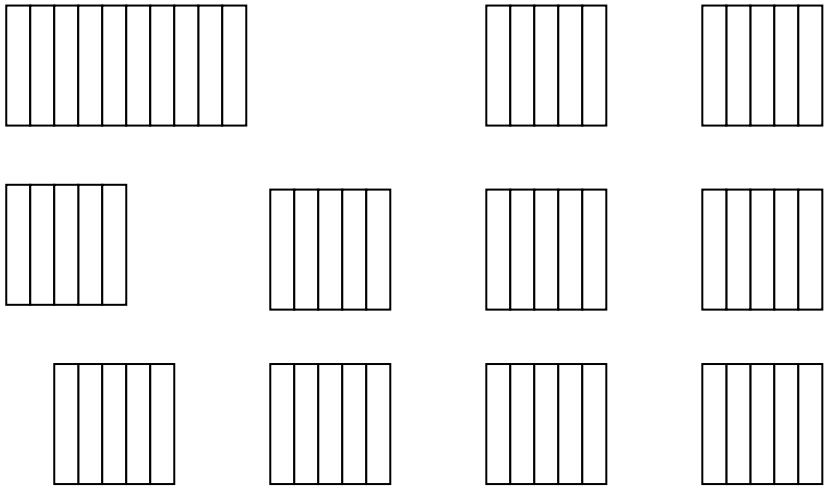
S: Dua puluh tolak lima.

P: Baik, boleh Umi tunjuk macam tadi ayat tu? Gunakan penyedut minuman yang lain.

S: Lima belas (subjek menjawab sambil menyususn seperti berikut):



P: Yang mana lima belas?
S: Dua puluh tolak lima (menunjukkan lima belas penyedut minuman yang tinggal).
P: Baik, sekarang cuba tolak lima lagi dan buat macam tu sampai habis.
S: (Subjek meletakkan dua puluh penyedut minuman kemudian mengasingkan lima daripada dua puluh penyedut minuman seperti berikut): Dua puluh tolak lima … lima belas.



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Ada berapa kumpulan penyedut minuman di sini?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Lima.
P: Baik, boleh beritahu cikgu apa Umi buat tadi? Daripada dua puluh penyedut minuman apa Umi buat?
S: Tolak lima.
P: Lepas tu apa Umi buat?
S: Tolak lima sampai habis.
P: Berapa kali Umi tolak lima?
S: Empat kali.
P: Baik cuba bandingkan apa yang Umi buat tadi dengan ayat dua puluh bahagi lima? Ada tak apa-apa persamaan?
S: … Kumpulan ada empat, penyedut minuman pun ada lima.
P: Jadi, apa kaitan ayat bahagi dengan ayat tolak?
S: Sama.
P: Baik. Apa lagi yang Umi boleh katakan tentang bahagi dengan menolak secara berulang-ulang ni?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Tadi Umi tolak berapa daripada dua puluh?
S: Lima.

P: Berapa kali Umi tolak lima?
S: Empat kali.
P: Untuk bahagi tadi, Umi bahagi berapa?
S: Bahagi lima. Dua puluh bahagi lima.
P: Dua puluh bahagi lima dapat berapa?
S: Empat.
P: Jadi, apa kaitan bahagi dengan tolak?
S: Sama.
P: Boleh tak kita selesaikan soalan bahagi secara tolak?
S: Boleh.
P: Macam mana? Kalau enam nak bahagi dua, macam mana nak buat secara tolak?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan membacanya). Enam tolak dua, tolak dua, tolak dua.

$$6 - 2 - 2 - 2$$

P: Apa jawapan bagi enam bahagi dua?
S: Tiga.
P: Cara penolakan tu, yang mana menunjukkan tiga?
S: Tolak dua tiga kali.

Dalam Petikan PW427, Umi mewakilkan ayat bahagi $20 \div 5$ dengan membentuk empat kumpulan bersaiz lima. Subjek berpendapat bahawa saiz kumpulan merujuk pembahagi yang terdapat pada ayat bahagi. Subjek juga menjelaskan bilangan kumpulan yang terbentuk merupakan hasil bahagi. Bagi menunjukkan pembahagian secara penolakan pula, subjek mengeluarkan lima daripada dua puluh penyedut minuman secara berulang-ulang sehingga kesemuanya dikeluarkan.

Selain itu, Umi berpendapat bahawa penolakan secara berulang adalah sama dengan pembahagian kerana memperoleh bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang sama. Subjek juga menjelaskan bahawa enam bahagi dua boleh diselesaikan secara penolakan secara berulang, iaitu dengan menolak dua daripada enam

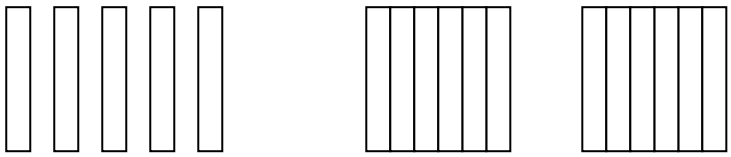
sebanyak tiga kali. Subjek juga menjelaskan bahawa hasil bahagi boleh diperoleh dengan menentukan bilangan penolakan yang dilakukan.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Umi mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki dengan mengeluarkan sebanyak enam daripada tujuh belas penyedut minuman secara berulang sehingga baki yang tinggal kurang daripada enam. Subjek juga menunjukkan pembahagian 17 ÷ 6 dengan membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima. Petikan PW428 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW428

P: Cuba Umi baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6)?
S: Tujuh belas bahagi enam.
P: Boleh tunjuk ayat ni macam tadi?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



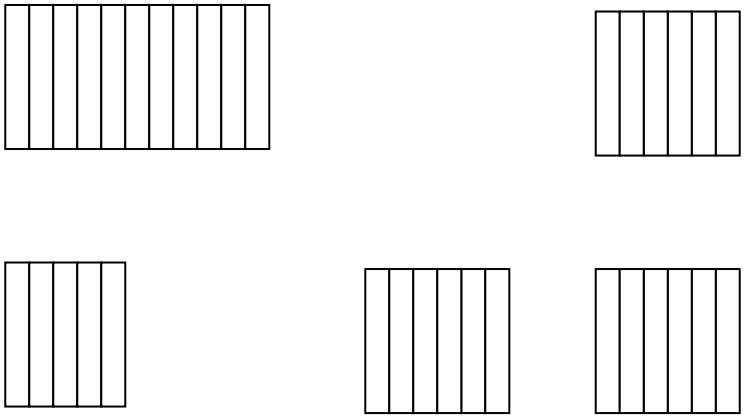
P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua… lima ni baki (menunjukkan lima penyedut minuman yang diasingkan).
P: Kenapa ada baki, tadi tak ada?

S: Sebab tujuh belas bahagi enam ada baki. Tadi, dua puluh bahagi lima, tak ada baki (subjek menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} \underline{\;\;2} \\ 6\,)\,17 \\ -\,\underline{12} \\ 5 \end{array}$$

P: Baik, sekarang boleh tunjuk secara secara penolakan macam tadi (menunjukkan ayat 17 − 6)? Umi gunakan penyedut minuman yang lain, ya.

S: Tujuh belas tolak enam. (Subjek mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang dan mengumpulkannya secara berasingan):



P: Dah siap?

S: Dah.

P: Berapa kali Umi tolak enam?

S: Dua kali.

P: Yang ini ada baki tak?

S: Ada… lima (menunjukkan kumpulan bersaiz lima).

P: Cuba Umi bandingkan dengan susunan untuk bahagi tadi. Ada tak apa-apa persamaan?

S: Sama.

P: Apa yang sama?

S: Kumpulan sama, penyedut minuman dalam satu kumpulan pun sama.

P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh belas bahagi enam?

S: Tak ada.

Dalam Petikan PW428, Umi membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima bagi mewakili ayat bahagi yang mempunyai baki, iaitu 17 ÷ 6. Subjek juga berpendapat bahawa, kumpulan bersaiz lima yang diperoleh dalam pembahagian tersebut merupakan baki. Selain itu, subjek juga menunjukkan secara penolakan berulang dengan mengeluarkan enam penyedut minuman dua kali daripada tujuh belas penyedut yang asal. Melalui penolakan tersebut subjek memperoleh dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima. Subjek berpendapat bahawa susunan yang diperoleh bagi pembahagian 17 ÷ 6 adalah sama dengan susunan yang terhasil apabila enam penyedut minuman dikeluarkan secara berulang sebanyak dua kali.

Masalah Berkotak

Menentukan Nama Kotak

Umi berpendapat bahawa 'kotak ajaib' dapat membahagi nombor-nombor yang dimasukkan ke dalamnya dan memberikan jawapan. Beliau juga menunjukkan apa yang berlaku di dalam kotak ajaib secara lukisan. Tingkah laku yang tunjukkan oleh Umi dipaparkan dalam Petikan MK431 berikut.

Petikan MK431

P: (Menunjukkan satu kotak). Kotak ini adalah kotak ajaib. Bila kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A) satu nombor akan keluar melalui lubang ni (menunjukkan lubang B). Dua nombor masuk di sini (menunjukkan lubang A), kotak ni proses kemudian jawapannya akan keluar di sini. (menunjukkan lubang B) Sekarang kita masukkan dua nombor ya. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 14)?

S: Empat belas.

P: Kita masukkan nombor tadi di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A). Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 2)?

S: Dua.

P: Kita masukkan di sini (memasukkan nombor tersebut di A). Boleh ingat tak kedua-dua nombor tadi?

S: Empat belas dan dua.

P: Kita tengok apakah nombor yang akan keluar dari sini. Ini nombor apa (Menunjukkan kad yang tertulis 7)?

S: Tujuh.

P: Apa kotak ini dah buat kepada empat belas dengan dua tadi, sehingga menghasilkan nombor tujuh. Empat belas dengan dua menghasilkan tujuh.

S: (Subjek tidak berkata apa-apa).

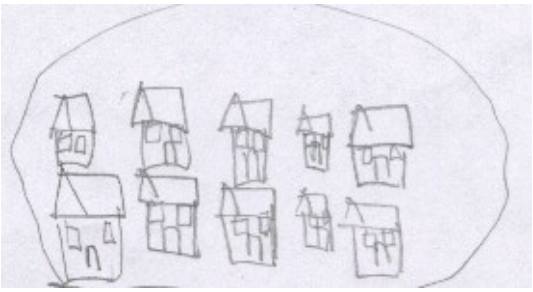
P: Nombor yang masuk empat belas, kemudian dua, kotak ni proses dan nombor yang keluar tujuh. Jadi apa dah berlaku dalam kotak hingga keluar jawapan tujuh?

S: (Subjek hanya mendiamkan diri).
P: Kita cuba satu lagi. (Menunjukkan kad yang tertulis 10). Ini nombor apa?
S: Sepuluh.
P: Kita masukkan nombor sepuluh di lubang ni. (Memasukkan kad tersebut di lubang A.) Nombor apa ni (menunjukkan kad yang tertulis 5)?
S: Lima.
P: Kita masukkan kedua-dua nombor tu dalam lubang A ni. (memasukkan kad tersebut ke dalam lubang A). Nombor apa yang keluar dari sini (menunjukkan kad yang keluar dari lubang B).
S: Dua.
P: Nombor yang masuk sepuluh dan lima, nombor yang keluar dua. Tadi nombor yang masuk empat belas dan dua, nombor yang keluar tujuh. Apa agaknya kotak ini dah buat kepada nombor-nombor tadi?
S: (Subjek diam)
P: Kotak ni buat apa kepada sepuluh dan lima hingga dapat jawapan dua? Jika empat belas dengan dua dapat jawapan tujuh, jika sepuluh dengan lima dapat jawapan dua. Jadi, kotak ni boleh buat apa?
S: Bahagi.
P: Kenapa Umi kata bahagi?
S: Sebab sepuluh bahagi lima sama dengan dua.
P: Bukan tolak?
S: Bukan.
P: Kenapa bukan tolak?
S: Kalau tolak dapat jawapan lain.
P: Dapat berapa?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Lima

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\ \underline{5} \\ \underline{5} \end{array}$$

P: Kalau bahagi?
S: Kalau bahagi jawapan betul. Dua.
P: Bagaimana dengan empat belas dengan dua tadi? Apa yang berlaku kepada empat belas dan dua sampai boleh keluar nombor tujuh?
S: Bahagi juga.
P: Kenapa bahagi?
S: Sebab empat belas bahagi dua sama dengan tujuh.
P: Bukan darab?
S: Bukan.
P: Kenapa bukan darab?

S: Kalau darab jawapan bukan tujuh, kalau bahagi dapat jawapan tujuh.
P: Kita cuba satu lagi. Ini apa (menunjukkan nombor 8)?
S: Lapan.
P: Ini nombor apa (menunjukkan nombor 4)?
S: Empat.
P: Nombor yang keluar (menunjukkan nombor 2).
S: Dua
P: Apa kotak ni dah buat kepada lapan dan empat hingga dapat jawapan dua?
S: Bahagi.
P: Bahagi? Kenapa kata bahagi?
S: Sebab lapan bahagi dengan empat sama dengan dua.
P: Bukan darab?
S: Bukan.
P: Baik sekarang boleh Umi tunjuk apa kotak tadi dah buat kepada nombor-nombor sepuluh dan lima tadi hingga dapat nombor dua?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut):



P: Boleh Umi beritahu cikgu apa yang Umi lukis tu?
S: Rumah. Sepuluh buah rumah bahagi lima (subjek menjawab sambil menunjukkan baris atas lukisan beliau).
P: Yang mana bahagi lima?
S: Lima rumah (subjek menunjukkan lima buah rumah yang dilukiskan di bahagian atas dan bawah).
P: Yang keluar dari lubang B tadi tu?
S: Dua. Ini ada dua. (subjek menunjukkan dua baris rumah yang dilukisnya).
P: Umi ada cara lain nak tunjuk apa yang berlaku dalam kotak ni?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat bahagi bagi proses tu?
S: (Subjek menulis ayat berikut):

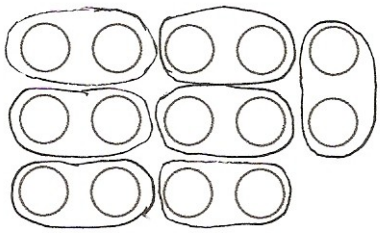
$$10 \div 5$$

P: Sama dengan apa, boleh tulis sekali?

S: (Subjek menambah '= 2' pada ayat bahagi yang beliau tulis)

$$10 \div 5 = 2$$

P: Boleh baca apa yang Umi tulis?
S: Sepuluh bahagi lima sama dengan dua.
P: Angka ni merujuk bahagian mana pada lukisan Umi (menunjukkan angka 10)?
S: Semua (subjek menunjukkan lukisannya).
P: Yang ini (menunjukkan 5)?
S: Lima rumah (menunjukkan lima buah rumah yang dilukiskan pada baris atas dan bawah).
P: Yang ini (menunjukkan 2)?
S: (Subjek menunjukkan kedua-dua barisan rumah). Dua baris.
P: Agaknya ada tak cara lain bagaimana kotak ni boleh lakukan kepada sepuluh dan lima sehingga dapat jawapan dua?
S: Tak ada.
P: Bagi nombor empat belas dengan dua, boleh Umi tunjuk apa yang berlaku dalam kotak sampai keluar nombor tujuh?
S: Boleh. (Subjek melukis seperti berikut):

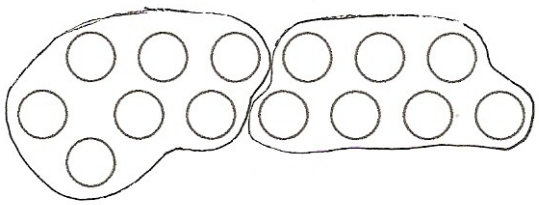


P: Apa Umi lukis?
S: Empat belas bola bahagi dua (subjek menjawab sambil menunjukkan lukisannya).
P: Empat belas bahagi dua sama dengan berapa?
S: Tujuh.
P: Macam mana tahu tujuh?
S: Ada tujuh kumpulan (subjek menunjukkan bola-bola yang telah dibulatkan).
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek mengangguk sambil menulis ayat berikut):

$$14 \div 2 = 7$$

P: Boleh baca?
S: Empat belas bahagi dua sama dengan tujuh.

P: Dua ni (menunjukkan angka dua pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam lukisan Umi tadi?
S: Dua bola (subjek menunjukkan dua bola yang dibulatkan).
P: Yang ini (menunjukkan angka tujuh).
S: Tujuh kumpulan (subjek menunjukkan tujuh bulatan yang terdapat dalam lukisannya).
P: Ada cara lain nak tunjuk apa yang berlaku dalam kotak tu?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh beritahu cikgu apa yang Umi lukis?
S: Empat belas bahagi dua (subjek menunjukkan lukisannya)
P: Yang mana nombor-nombor yang masuk ke dalam kotak tadi?
S: Empat belas (subjek menunjukkan kesemua bola) dan dua (subjek menunjukkan dua kumpulan).
P: Yang keluar melalui lubang B yang mana satu?
S: Tujuh bola (subjek menunjukkan bola-bola yang dibulatkan)
P: Sama tak lukisan ni dengan lukisan tadi?
S: Lain.
P: Lain macam mana?
S: Yang ni dua kumpulan (menunjukkan lukisan terbaru), yang ni tujuh kumpulan (menunjukkan lukisan awal bagi empat belas bahagi dua).
P: Apa lagi yang berbeza?
S: Yang ni tujuh bola satu kumpulan (menunjukkan lukisan terbaru), yang ni dua bola satu kumpulan (menunjukkan lukisan awal bagi empat belas bahagi dua).
P: Ada lagi yang berbeza?
S: … Tak ada.
P: Jadi Umi rasa apa yang berlaku dalam kotak tu?
S: Bahagi.

Dalam Petikan MK431, Umi berpendapat bahawa operasi yang berlaku di dalam ‘kotak ajaib’ adalah operasi bahagi. Umi juga menjelaskan bahawa sepuluh bahagi lima akan menghasilkan jawapan dua. Selain itu, Umi juga menjelaskan bahawa sekiranya operasi yang

berlaku di dalam kotak tersebut adalah operasi tolak jawapan yang akan di peroleh adalah lima dan bukan dua. Subjek menjelaskan menerangan tersebut secara penolakan lazim.

Subjek juga melukis sepuluh buah rumah yang disusun dalam dua baris. Umi menjelaskan sepuluh buah rumah pada lukisannya merujuk nombor yang memasuki kotak, lima buah rumah pada setiap baris merujuk nombor kedua yang memasuki kotak dan dua baris rumah merujuk nombor yang keluar dari kotak melalui lubang B. Selain itu, Umi juga menulis ayat bahagi $10 \div 5 = 2$ bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Umi juga menjelaskan bahawa nombor lima dan sepuluh merupakan nombor yang memasuki kotak melalui lubang A, manakala nombor dua merupakan nombor yang keluar melalui lubang B.

Selain itu, Umi melukis empat belas bola yang dikumpulkan dalam tujuh kumpulan bagi menjelaskan nombor empat belas dan dua yang dimasukkan ke dalam kotak. Setiap kumpulan mempunyai dua biji bola. Subjek juga menjelaskan empat belas biji bola merujuk yang dilukisnya merujuk nombor yang memasuki kotak dan saiz setiap kumpulan merujuk nombor dua yang juga memasuki kotak. Tujuh kumpulan yang terdapat pada lukisan Umi merujuk nombor yang keluar melalui lubang B.

Umi juga menulis ayat bahagi $14 \div 2 = 7$ bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Selain itu, subjek juga membuat satu lagi lukisan yang mempunyai dua kumpulan bersaiz tujuh yang

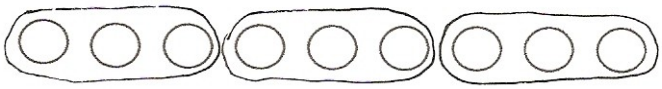
juga merupakan proses yang berlaku di dalam kotak. Subjek juga berpendapat kedua-dua lukisannya bagi empat belas bahagi dua adalah berbeza. Umi menjelaskan kedua-dua lukisan berbeza kerana mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza.

Menentukan Hasil Bahagi

Umi menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Beliau juga menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Tingkah beliau dipaparkan melalui Petikan MK432 berikut.

Petikan MK432

P: Tadi Umi kata kotak ni boleh bahagi kan.
S: (Subjek mengangguk).
P: Jadi kita namakan kotak ni 'bahagi' (meletakkan perkataan BAHAGI pada kotak). Sekarang kita akan masukkan nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis sembilan). Ini nombor apa?
S: Sembilan.
P: Kita masukkan di sini (memasukkan kad tersebut ke dalam kotak). Yang ini ? (menunjukkan kad yang tertulis tiga)?
S: Tiga.
P: Kita masukkan juga nombor ni. Nombor apa agaknya yang akan keluar dari kotak ni?
S: Tiga.
P: Kenapa Umi kata tiga.
S: Sembilan bahagi tiga sama dengan tiga.
P: Boleh Umi tunjuk apa yang berlaku dalam kotak tu hingga dapat jawapan?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh Umi jelaskan lukisan Umi?
S: (Subjek menunjukkan lukisannya). Sembilan bahagi tiga
P: Kenapa bulatkan tiga bola?
S: Sebab sembilan bahagi dengan tiga.
P: Bagaimana dengan bulatan? Rujuk pada apa dalam kotak?
S: Jawapan dia.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \div 3 = 3$$

P: Angka sembilan ni merujuk kepada bahagian mana dalam lukisan?
S: Semua (subjek menunjukkan lukisan beliau).
P: Pada kotak tadi?
S: Nombor yang masuk kotak.
P: Yang ni (menunjukkan tiga pada ÷ 3)?
S: Tiga, nombor yang masuk juga.
P: Selain cara tadi ada tak cara lain kotak tu bahagi sembilan sehingga nombor keluar nombor keluar?
S: Tak ada.
P: Sekarang kita cuba dengan satu lagi nombor. Ini apa (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan 2)?
S: Dua.
P: Umi rasa nombor apa yang akan keluar dari lubang B (menunjukkan lubang B)?
S: Satu.
P: Kenapa kata satu?
S: (Subjek menulis ayat berikut dan menjawab). Dua bahagi dengan dua sama dengan satu.

$$2 \div 2 = 1$$

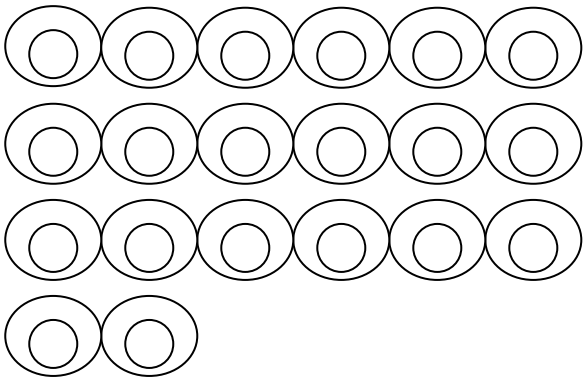
P: Bukan tolak?
S: Bukan. Bahagi.
P: Kalau dua yang pertama tadi kita gantikan dengan dua puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Sepuluh.
P: Kenapa sepuluh?
S: Dua puluh bahagi dua jawapannya sepuluh. (Subjek membuat pembahagian panjang dan memberi jawapan).

$$\begin{array}{r} 10 \\ 2\,\overline{)\,20} \\ -\,2 \\ \hline 0 \end{array}$$

P: Kalau kedua-dua nombor yang masuk diganti dengan dua puluh? Nombor apa yang akan keluar?
S: (Subjek melakukan pembahagian panjang dan menjawab). Satu.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 20\,\overline{)\,20} \\ -\,20 \\ \hline 0 \end{array}$$

P: Kenapa kata satu?
S: Sebab dua puluh bahagi dua puluh sama dengan satu.
P: Bukan sepuluh?
S: (Subjek melukis berikut sambil menjawab). Satu.



P: Kalau kita ganti dua yang pertama dengan dua ratus, dua yang masuk kemudian kekal sebagai dua puluh?
S: Jawapannya sepuluh (subjek menjawab selepas menunjukkan pembahagian berikut):

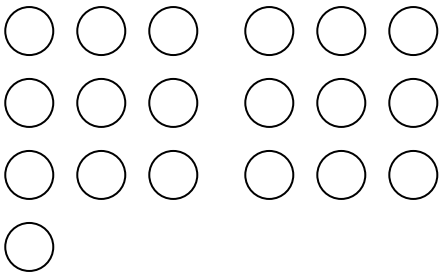
$$\begin{array}{r} 10 \\ 20\,\overline{)\,200} \\ -\,20 \\ \hline 0 \end{array}$$

P: Kenapa sepuluh?
S: Dua ratus bahagi dua puluh sama dengan sepuluh.

P: Bukan satu?
S: Bukan.
P: Bagaimana kalau nombor yang masuk tu dua ratus dan dua?
S: (Subjek menjawab sambil menulis ayat berikut)
P: Kalau dua ratus dengan dua ratus?
S: Satu (Subjek menulis ayat berikut):

$$200 \div 200 = 1$$

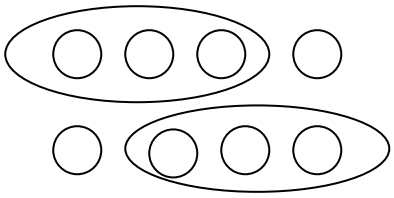
P: Kenapa satu?
S: Sebab dua ratus bahagi dua ratus sama dengan satu.
P: Kalau nombor ini (menunjukkan nombor 19).
S: Sembilan belas.
P: Dan nombor ini (menunjukkan 19).
S: Sembilan belas.
P: Kita masukkan di sini (menunjukkan lubang A) nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Satu. (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut):



P: Kenapa satu, bukan sepuluh?
S: Sebab sembilan belas bahagi sembilan belas sama dengan satu, mana boleh sepuluh (subjek menjawab sambil menulis ayat berikut):

$$19 \div 19 = 1$$

P: Baik kalau kita masukkan nombor ini pula (menunjukkan nombor lapan)
S: Lapan.
P: Dan nombor ini (menunjukkan nombor tiga). Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: (Subjek melukis seperti berikut dan cuba membahagi tiga). Tak boleh.



P: Kenapa tak boleh?
S: Ada baki.
P: Jadi apa jawapan yang akan keluar?
S: Tak ada.
P: Kenapa?
S: Sebab bahagi ada baki.
P: Kalau ada baki, tak ada jawapan ke?
S: Jawapan dia ada baki. (Subjek menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\,\overline{)\,8} \\ \underline{-\,6} \\ 2 \end{array}$$

P: Ada cara lain nak tunjuk apa yang kotak tadi buat kepada nombor-nombor lapan dan tiga?
S: Tak ada.

Dalam Petikan MK432, Umi menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B secara operasi bahagi. Bagi nombor sembilan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak Umi dapat menentukan nombor yang keluar sebagai tiga. Subjek juga menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Umi melukis sembilan biji bola yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga menulis ayat bahagi $9 \div 3 = 3$ bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Subjek menjelaskan nombor sembilan pada ayat bahagi merujuk kesemua bola dalam lukisannya. Manakala, angka tiga pula merujuk tiga biji bola dalam satu kumpulan atau tiga kumpulan.

Umi juga berpendapat nombor yang bakal keluar melalui lubang B apabila nombor dua dan dua dimasukkan melalui lubang A adalah satu. Subjek menjelaskan jawapan tersebut beliau peroleh dengan membahagi dua dengan dua. Bagi nombor dua puluh dan dua yang dimasukkan ke dalam kotak pula, Umi berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah sepuluh. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang. Subjek juga menulis ayat 20 ÷ 2 = 10 bagi mewakili penjelasannya.

Bagi nombor dua puluh dan dua puluh pula, subjek berpendapat nombor yang keluar adalah satu. Subjek juga menunjukkan secara lukisan dan pembahagian panjang. Bagi nombor dua ratus dan dua puluh pula, subjek berpendapat nombor yang keluar adalah sepuluh. Umi juga menulis ayat bahagi 200 ÷ 20 = 10 bagi mewakili pembahagian tersebut. Selain itu, bagi dua ratus dan dua ratus pula, Umi berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah satu. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang.

Bagi nombor sembilan belas dan sembilan belas pula, subjek berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah satu. Subjek menjelaskan lagi pendapatnya secara melukis sembilan belas bola dan menulis ayat bahagi, 19 ÷ 19 = 1. Bagi nombor lapan dan tiga yang memasuki kotak, Umi berpendapat tidak akan ada sebarang nombor yang akan keluar kerana pembahagian tersebut mempunyai baki. Umi melukis lapan biji bola yang mempunyai dua kumpulan bersaiz tiga. Dalam lukisan tersebut, terdapat dua biji bola yang didak

dikumpulkan dalam bulatan. Subjek juga menunjukkan pembahagian lapan dengan tiga secara pembahagian panjang bagaimana pembahagian tersebut menghasilkan baki.

Tafsiran Ayat Matematik

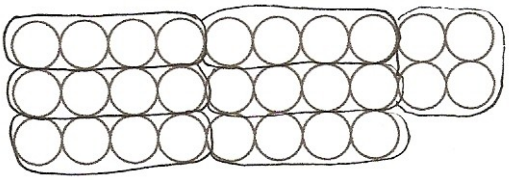
Ayat Bahagi

Ayat bahagi tanpa baki

Umi mentafsirkan ayat bahagi 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan yang bersaiz empat. Subjek juga mewakilkan ayat bahagi 28 ÷ 4 = 7 dengan menulis ayat darab 4 x 7 = 28. Tingkah laku yang ditunjukkan oleh Umi dipaparkan dalam Petikan TA441.

Petikan TA441

P: Cuba Umi baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Boleh Umi jelaskan macam mana dua puluh lapan bahagi empat. Umi boleh lukis.
S: (Subjek melukis seperti berikut pada kertas):



P: Apa yang Umi lukis?
S: Dua puluh lapan bola.
P: Ada berapa kumpulan dalam lukisan tu?
S: Tujuh (subjek menjawab selepas menghitung).
P: Satu kumpulan ada berapa bola?
S: Empat.
P: Kenapa Umi kumpulkan empat?
S: Sebab nak bahagi empat.

P: Kalau dua puluh lapan bahagi dua, berapa bola perlu dikumpulkan dalam satu kumpulan?
S: Dua.
P: Kalau bahagi tujuh?
S: Tujuh bola.
P: Dua puluh lapan bahagi empat dapat berapa?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Tujuh.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 4\,\overline{)\,28} \\ \underline{-\,28} \\ 0 \end{array}$$

P: Dalam lukisan yang mana menunjukkan tujuh?
S: Kumpulan.
P: Dua puluh lapan ni rujuk pada apa dalam lukisan?
S: Semua bola (subjek menunjukkan lukisannya).
P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat 28 ÷ 4)?
S: Empat (subjek menunjukkan satu kumpulan).
P: Ada cara lain tak nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat.
S: Tak ada.
P: Boleh Umi tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$28 \div 4 = 7$$

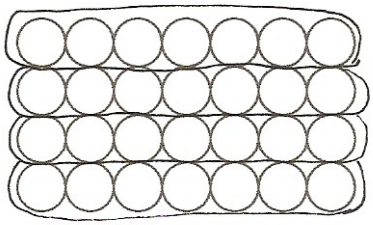
P: Cuba baca?
S: Dua puluh lapan bahagi empat sama dengan tujuh.
P: Sekarang, boleh Umi tulis ayat darab bagi ayat bahagi tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Cuba baca?
S: Empat darab tujuh sama dengan dua puluh lapan.
P: Macam mana dapat ayat tu?
S: Dua puluh lapan bahagi empat sama dengan tujuh, jadi empat darab tujuh sama dengan dua puluh lapan.
P: Baik, boleh Umi jelaskan menggunakan lukisan macam mana dapat ayat darab tu?
S: Yang ni (menunjukkan satu kumpulan) ada empat darab dengan tujuh kumpulan sama dengan dua puluh lapan … semua bola.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Ayat tu sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni empat darab tujuh (menunjukkan 4 x 7 = 28) yang ini tujuh darab empat (menunjukkan 7 x 4 = 28)
P: Jawapan ayat tu sama tak?
S: Sama.
P: Baik. Sekarang boleh Umi baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Boleh Umi jelaskan macam mana dua puluh lapan bahagi tujuh? Boleh lukis.
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Umi lukis apa?
S: Dua puluh lapan guli.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa guli?
S: Tujuh.
P: Lukisan ni sama tak dengan kedua-dua lukisan tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ini bahagi empat ada empat bola (menunjukkan lukisan awal) yang ini bahagi tujuh ada tujuh guli (menunjukkan lukisan yang baru).
P: Ada lagi tak yang tak sama?
S: Ada, kumpulan pun tak sama.
P: Tak sama macam mana?
S: Yang ini ada tujuh (menunjukkan lukisan awal) yang ini ada empat (menunjukkan lukisan yang baru).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Semua ada dua puluh lapan.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan 28 ÷ 7)?
S: Tak ada.
P: Boleh Umi tulis ayat bahagi dengan lengkap.

S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$28 \div 7 = 4$$

P: Baik, sekarang boleh tulis ayat darab bagi ayat bahagi tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Boleh Umi jelaskan gunakan lukisan macam mana dapat ayat darab tu?
S: Ada tujuh guli darab dengan empat kumpulan sama dengan dua puluh lapan guli.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan $7 \times 4 = 28$)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni tujuh darab empat, tadi empat darab tujuh.
P: Sama tak dengan ayat darab yang Umi tulis untuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: Sama.
P: Kenapa boleh sama? Ayat bahagi tak sama kan?
S: Sebab dua puluh lapan bahagi empat sama dengan tujuh.
P: Jadi, ayat darab sama?
S: (Subjek mengangguk).

Dalam Petikan TA441, Umi mentafsirkan ayat $28 \div 4$ dengan melukis tujuh kumpulan bola bersaiz empat. Subjek juga menjelaskan saiz kumpulan merujuk pembahagi. Subjek juga berpendapat bahawa sekiranya pembahagi dalam ayat bahagi adalah dua, maka bilangan bola yang perlu dilukis dalam satu kumpulan adalah dua. Demikian juga, menurut subjek, sekiranya pembahaginya adalah tujuh. Subjek menjelaskan tujuh bola perlu dilukis dalam satu kumpulan.

Umi menulis ayat bahagi 28 ÷ 4 = 7 berpandu pada lukisannya. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang bagaimana dia memperoleh tujuh sebagai hasil bahagi. Selain itu, subjek juga menulis ayat darab 4 x 7 = 28 merujuk ayat bahagi yang ditulisnya. Subjek juga menulis satu lagi ayat darab, iaitu 7 x 4 = 28 bagi ayat bahagi 28 ÷ 4. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya adalah berbeza kerana pendarab pertama dan kedua bagi kedua-dua ayat darab adalah berbeza. Subjek menjelaskan walaupun pendarabnya berbeza, jawapan bagi kedua-dua ayat bahagi adalah sama.

Umi mentafsir ayat 28 ÷ 7 dengan melukis empat kumpulan guli yang bersaiz tujuh. Subjek juga menjelaskan saiz kumpulan dalam lukisannya merujuk pembahagi. Selain itu, subjek berpendapat bahawa lukisan yang dibentuk bagi dua puluh lapan bahagi tujuh tidak sama dengan lukisan bagi bahagi empat kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza.

Umi juga mentafsir ayat bahagi 28 ÷ 7 dengan menulis dua ayat darab, iaitu 4 x 7 = 28 dan 7 x 4 = 28. Subjek menjelaskan empat merujuk pada saiz kumpulan manakala, tujuh pula merujuk bilangan kumpulan dalam lukisannya. Umi juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya tidak sama kerana kedua-dua ayat darab tersebut mempunyai pendarab yang berbeza. Selain itu, subjek juga menjelaskan ayat darab 4 x 7 = 28 dan 7 x 4 = 28

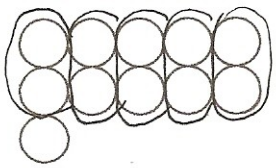
yang diperoleh bagi dua puluh lapan bahagi empat dan dua puluh lapan bahagi tujuh adalah sama, walaupun ayat bahaginya berbeza.

Ayat bahagi yang mempunyai baki

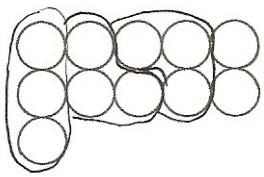
Umi mentafsirkan ayat bahagi 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan yang bersaiz dua. Subjek juga meletakkan sebiji bola lagi di luar kumpulan sebagai baki. Petikan TA442 berikut menunjukkan tingkah laku yang beliau tunjukkan.

Petikan TA442

P: Boleh Umi baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 2)?.
S: Sebelas bahagi dua.
P: Macam tadi boleh Umi tunjuk secara lukisan ke, macam mana sebelas bahagi dua?
S: (Subjek melukis seperti berikut pada kertas):



P: Umi lukis apa tu?
S: Bola.
P: Kenapa kumpulkan dua bola?
S: Sebab nak bahagi dua.
P: Kalau bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



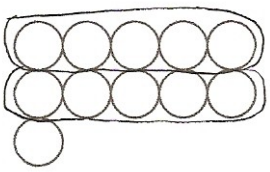
P: Di sini Umi kumpulkan tiga bola. Kenapa?
S: Sebab nak bahagi tiga.
P: Baik, cuba tengok semula lukisan tadi ini. Kenapa yang ini ada satu bola yang tak dibulatkan (menunjukkan satu bola di luar kumpulan)?
S: Baki.
P: Jadi, berapa jawapan bagi ayat bahagi tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Lima baki satu.

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 2\,)\,11 \\ \underline{-\,10} \\ 1 \end{array}$$

P: Dalam lukisan yang mana lima baki satu?
S: Lima kumpulan (menunjukkan kumpulan) baki satu (menunjukkan sebiji bola di luar kumpulan).
P: Ada cara lain tak nak tunjuk sebelas bahagi dua?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain nak terangkan tentang 11 ÷ 2?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$11 \div 2 = 5 \text{ baki } 1$$

P: Sekarang, boleh Umi tulis ayat darab bagi yang ini (menunjukkan 11 ÷ 2)?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Boleh tak tulis ayat darab?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab ada baki.
P: Baik, ada cara lain tak nak tunjuk ini (menunjukkan 11 ÷ 2)?
S: Tak ada.
P: Sekarang cuba baca apa yang tertulis di sini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 5)?
S: Sebelas bahagi lima.
P: Boleh Umi tunjuk macam mana sebelas bahagi lima?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Umi lukis apa?
S: Bola.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan sebiji bola di luar kumpulan)?
S: Baki.
P: Berapa jawapan untuk ayat tadi?
S: Dua baki satu.
P: Satu kumpulan ada berapa bola?
S: Lima.
P: Kenapa bulatkan lima?
S: Sebab nak bahagi lima.
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat tadi?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat darab untuk yang ini?
S: Tak boleh sebab ada baki.
P: Lukisan ni sama tak dengan lukisan untuk sebelas bahagi dua tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Sebab kumpulan ada dua, bola ada lima. Tadi, kumpulan lima, bola dua.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA442, Umi mentafsir ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan bola yang bersaiz dua dan sebiji bola lagi di luar kumpulan. Subjek menjelaskan, dua bola dikumpulkan dalam satu kumpulan kerana pembahaginya adalah dua. Subjek juga berpendapat bahawa sebiji bola di luar kumpulan tidak dibulatkan kerana saiznya kurang daripada pembahagi. Subjek juga menamakannya sebagai baki. Selain itu, Umi berpendapat sekiranya ayat tersebut bahagi tiga, maka tiga bola perlu dikumpulkan dalam satu kumpulan.

Umi mewakilkan lukisanya itu dengan melengkapkan ayat bahagi yang diberi kepada 11 ÷ 2 = 5 baki 1. Subjek juga berpendapat bahawa ayat darab tidak dapat ditulis bagi lukisanya itu kerana lukisannya mempunyai baki.

Bagi ayat 11 ÷ 5 pula, Umi melukis dua kumpulan yang mempunyai lima bola di dalamnya. Dalam lukisan tersebut terdapat sebiji bola yang tidak dibulatkan kerana menurut subjek bola tersebut merupakan baki. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisan yang dibentuk bagi ayat sebelas bahagi dua dan sebelas bahagi lima adalah berbeza kerana mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza.

Ayat Bahagi Membabitkan Sifar, Satu, Dan Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Umi mentafsirkan ayat 3 ÷ 0 sebagai sifar. Umi juga menjelaskan bahawa operasi bahagi yang membabitkan sifar akan menghasilkan jawapan sifar. Petikan TA443 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan TA443

P: Boleh Umi baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 0 ÷ 3)?
S: Kosong bahagi tiga
P: Boleh beritahu cikgu macam mana kosong bahagi tiga?

S: Kosong bahagi tiga sama dengan kosong.
P: Kenapa jawapannya kosong?
S: Sebab kosong bahagi semua nombor pun kosong.
P: Boleh lukis?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab kosong tak boleh lukis.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \div 3 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Kosong bahagi tiga sama dengan kosong.
P: Boleh tulis ayat darab bagi ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 0 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Tiga darab kosong sama dengan kosong.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \times 3 = 0$$

P: Sama tak kedua-dua ayat?
S: Tak sama?
P: Apa yang tak sama?
S: Kosong darab tiga (menunjukkan ayat $0 \times 3 = 0$). Yang ini tiga darab kosong (menunjukkan ayat $3 \times 0 = 0$).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 0$) Cuba baca?
S: Tiga bahagi kosong.
P: Tiga bahagi kosong dapat berapa?
S: Kosong.
P: Boleh lukis?
S: Tak boleh. Kosong tak boleh lukis.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 0 = 0$$

P: Cuba Umi baca?
S: Tiga bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Boleh tulis ayat darab bagi ayat tu?

S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \times 3 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Kosong darab tiga sama dengan kosong.
P: Ada cara lain tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 0 = 0$$

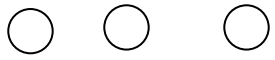
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama. Yang ni tiga darab kosong, tadi kosong darab tiga.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Tak ada lagi.
P: Yang sama ada tak?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang cuba yang ini (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 3$)?
S: Tiga bahagi tiga.
P: Tiga bahagi tiga dapat berapa?
S: Satu.
P: Yang ini boleh lukis tak?
S: Boleh. (Subjek menjawab sambil melukis yang berikut):

P: Umi lukis apa?
S: Tiga bola bahagi tiga.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Ada berapa kumpulan dalam satu kumpulan tu?
S: Tiga.
P: Kenapa kumpulkan tiga?
S: Sebab nak bahagi tiga.
P: Boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 3 = 1$$

P: Ada cara lain nak tunjuk ni (menunjukkan ayat $3 \div 3$)?
S: Tak ada.
P: Cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis ayat $3 \div 1$).
S: Tiga bahagi satu.
P: Tiga bahagi satu sama dengan berapa?

S: Tiga.
P: Boleh terangkan macam mana tiga bahagi satu dapat tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Umi lukis apa?
S: Tiga bola.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Tiga pada ayat bahagi tu rujuk pada apa dalam lukisan?
S: Semua.
P: Satu pada tiga bahagi satu?
S: Satu bola.
P: Jawapan bagi ayat bahagi tadi?
S: Tiga bola. Tiga bahagi satu sama dengan tiga.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk tiga bahagi satu?
S: Tak ada.
P: Boleh Umi tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 1 = 3$$

P: Sekarang boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$1 \times 3 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Satu darab tiga sama dengan tiga.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis yang berikut):

$$3 \times 1 = 3$$

P: Boleh baca?
S: Tiga darab satu sama dengan tiga.
P: Kedua-dua ayat darab tadi sama tak?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Yang ni tiga darab satu, tadi satu darab tiga… tak sama. Jawapan sama.
P: Tak ada cara lain nak tunjuk ayat bahagi tadi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA443, Umi mentafsirkan ayat 0 ÷ 3 sebagai sifar. Umi juga menjelaskan bahawa operasi bahagi membabitkan sifar akan menghasilkan sifar. Subjek menjelaskan bahawa penyelesaian bagi ayat 0 ÷ 3 adalah sifar. Subjek juga melengkapkan ayat yang diberi dengan menulis 0 ÷ 3 = 0. Selain itu, Umi menulis dua ayat darab sebagai kepada ayat 0 ÷ 3. Ayat-ayat tersebut adalah 3 x 0 = 0 dan 0 x 3 = 0.

Bagi ayat 3 ÷ 0 pula, Umi juga berpendapat bahawa pembahagian tersebut akan menghasilkan sifar. Subjek menjelaskan pembahagian membabitkan sifar akan menghasilkan sifar. Subjek juga menulis ayat 3 ÷ 0 = 0 bagi melengkapkan ayat 3 ÷ 0. Selain itu Umi menulis ayat darab 0 x 3 = 0 dan 3 x 0 = 0 sebagai tafsiran bagi ayat 3 ÷ 0 .

Bagi ayat 3 ÷ 3 pula, Umi melukis tiga biji bola yang dihimpunkan dalam satu kumpulan. Subjek menjelaskan tiga bola diletakkan dalam satu kumpulan kerana pembahagi ayat bahagi adalah tiga. Subjek juga melengkapkan ayat yang diberi oleh pengkaji dengan menulis ayat 3 ÷ 3 = 1. Selain itu, subjek menulis dua ayat darab iaitu, 1 x 3 = 3 dan 3 x 1 = 3. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab tersebut adalah berbeza kerana mempunyai pendarab-pendarab yang tidak sama.

Umi mentafsir ayat 3 ÷ 1 dengan melukis tiga biji bola yang diletakkan berasingan. Subjek menjelaskan saiz kumpulan merujuk pembahagi ayat bahagi 3 ÷ 1. Selain itu, subjek juga melengkapkan

ayat bahagi 3 ÷ 1 dengan menulis ayat 3 ÷ 1 = 3. Subjek juga menulis dua ayat darab iaitu, 1 x 3 = 3 dan 3 x 1 = 3. Subjek juga berpendapat kedua-dua ayat darab tersebut adalah berbeza kerana mempunyai pendarab-pendarab yang berbeza. Subjek juga berpendapat bahawa ayat darab yang ditulisnya bagi 3 ÷ 1 adalah sama dengan ayat darab yang ditulis untuk 3 ÷ 3.

Ayat Darab

Umi menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2 sebagai tafsiran bagi ayat darab 4 x 2. Subjek juga mentafsir ayat darab 4 x 2 secara lukisan iaitu dengan melukis dua kumpulan bersaiz empat. Petikan TA444 berikut memaparkan tingkah laku yang beliau tunjukkan semasa temu duga.

Petikan TA444

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 4 x 2) Cuba baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Empat darab dua.
P: Empat darab dua sama dengan apa?
S: Lapan.
P: Boleh tulis ayat tu dengan lengkap.
S: (Subjek menulis seperti berikut):

4 x 2 = 8

P: Boleh baca?
S: Empat darab dua sama dengan lapan.
P: Baik, sekarang boleh Umi tulis ayat bahagi daripada ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Boleh Umi baca?
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Baik, boleh beritahu cikgu kenapa Umi tulis seperti tu?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Kenapa tulis lapan bahagi empat. Kenapa bukan empat bahagi dua?
S: Sebab empat darab dua dapat lapan. Jadi, lapan bahagi empat dapat dua.
P: Empat pada ayat 4 x 2 = 8 tu sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: Empat (menunjukkan empat pada 8 ÷ 4 = 2).
P: Yang ini (menunjukkan lapan ayat darab)?
S: Lapan (menunjukkan lapan pada 8 ÷ 4 = 2).
P: Apa kaitan ayat bahagi ni (menunjukkan ayat bahagi) dengan ayat darab tadi? Ayat darab dengan ayat bahagi ada apa-apa kaitan tak?
S: Ada.
P: Apa kaitan darab dan bahagi?
S: Terbalik. Darab kalau terbalik dapat bahagi
P: Boleh Umi jelaskan terbalik macam mana dengan gunakan ayat tadi?
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua, empat darab dua dapat lapan. Jadi, bahagi terbalik dapat darab.
P: Baik, ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 2 = 4$$

P: Cuba baca ayat tu?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni lapan bahagi dua, yang ni (menunjukkan 8 ÷ 4 = 2) lapan bahagi empat. Yang ni (menunjukkan 8 ÷ 2 = 4) jawapan dia empat, yang ni (menunjukkan 8 ÷ 4 = 2) dua.
P: Ada lagi tak?
S: Tak ada.
P: Yang sama?
S: Lapan.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Baik sekarang, boleh Umi tunjuk secara lukisan untuk ayat bahagi ini (menunjukkan 8 ÷ 4 = 2)?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut):

P: Umi lukis apa?
S: Bola.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua
P: Kenapa bulatkan empat bola?
S: Sebab bahagi empat.
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat tadi?
S: Tak ada.
P: Cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis ayat 2 x 4)?
S: Dua darab empat.
P: Dua darab empat sama dengan berapa?
S: Lapan.
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 2 = 4$$

P: Boleh baca?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Boleh tunjuk secara lukisan?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut):

P: Umi lukis apa kali?
S: Lapan bola bahagi dua.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat tadi?
S: Tak ada.
P: Ayat ini (menunjukkan 8 ÷ 2 = 4) sama tak dengan ayat ini (menunjukkan ayat 8 ÷ 2 = 4 yang ditulis bagi 4 x 2)?
S: Sama.
P: Kenapa boleh sama?
S: Sebab empat darab dua sama dengan dua darab empat.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat bahagi untuk empat darab dua tadi?
S: Sama.
P: Baik, yang ni (menunjukkan dua pada ayat 8 ÷ 2 = 4) sama dengan apa pada ayat darab?
S: Dua darab empat (subjek menunjukkan dua pada ayat 2 x 4).
P: Dua tu sama tak dengan dua pada ayat ni (menunjukkan ayat 8 ÷ 4 = 2)?
S: Sama.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: …Tak ada.

Dalam Petikan TA444, Umi menulis ayat 8 ÷ 4 = 2 sebagai tafsiran bagi ayat darab 4 x 2. Subjek juga menulis 4 x 2 = 8 bagi melengkapkan ayat darab yang diberi oleh pengkaji. Selain itu, subjek berpendapat bahawa empat yang terdapat pada ayat 4 x 2 adalah sama dengan empat yang terdapat pada ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2. Subjek juga menjelaskan bahawa nombor dua yang terdapat pada 4 x 2 adalah sama dengan dua yang terdapat pada 8 ÷ 4 = 2. Umi juga berpendapat bahawa ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

Sebagai tafsiran kepada ayat 8 ÷ 4 = 2, Umi melukis dua kumpulan bola yang bersaiz empat. Subjek juga menjelaskan bahawa kumpulan tersebut bersaiz empat kerana pembahagi ayat bahagi adalah empat. Subjek juga menjelaskan dua kumpulan dalam lukisannya merujuk kepada hasil bahagi ayat 8 ÷ 4 = 2. Selain itu, subjek juga menulis satu lagi ayat bahagi iaitu, 8 ÷ 2 = 4 sebagai tafsiran kepada ayat darab 4 x 2.

Umi mentafsir ayat 2 x 4 pula dengan menulis ayat 8 ÷ 2 = 4. Umi juga menulis 2 x 4 = 8 bagi melengkapkan ayat yang diberi oleh pengkaji. Selain itu, subjek juga melukis empat kumpulan bersaiz dua bagi mewakili ayat 8 ÷ 2 = 4. Umi juga menulis satu lagi ayat iaitu 8 ÷ 4 = 2 sebagai tafsiran bagi ayat 2 x 4.

Petikan TA445

P: Boleh Umi baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 6 x 4)?

S: Enam darab empat.
P: Enam darab empat sama dengan berapa?
S: Dua puluh empat.
P: Macam mana dapat dua puluh empat?
S: Enam darab empat sama dengan dua puluh empat (subjek menulis seperti berikut selepas menjawab):

$$\begin{array}{r} 6 \\ \underline{\times 4} \\ 24 \end{array}$$

P: Boleh tulis ayat darab tu dengan lengkap macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$6 \times 4 = 24$$

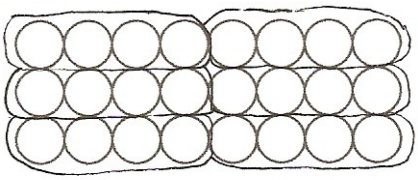
P: Sekarang boleh Umi tulis ayat bahagi untuk ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 6 = 4$$

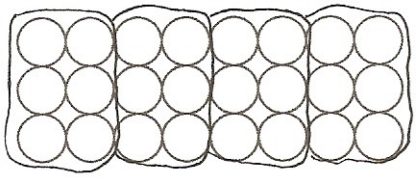
P: Boleh Umi baca?
S: Dua puluh empat bahagi enam sama dengan empat.
P: Dua puluh empat sama dengan apa pada ayat darab?
S: Yang ni (menunjukkan hasil bahagi bagi 24 ÷ 6 = 4)
P: Ada tak cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 4 = 6$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama sebab yang ni bahagi empat, yang ni (menunjukkan 24 ÷ 6 = 4) bahagi enam.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Jawapan. Yang ni enam (menunjukkan 24 ÷ 4 = 6), yang ni (menunjukkan 24 ÷ 6 = 4) empat.
P: Baik, apa kaitan ayat darab dengan ayat bahagi?
S: Ayat darab terbalik ayat bahagi.
P: Sekarang, boleh Umi tunjuk secara lukisan macam tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Enam.
P: Ini lukisan untuk ayat mana? Bahagi empat, bahagi enam atau dua-dua?
S: Dua puluh empat bahagi empat
P: Tak boleh gunakan untuk bahagi enam?
S: Tak boleh. Ini untuk bahagi empat.
P: Boleh lukis untuk bahagi enam?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ni ada berapa kumpulan?
S: Empat
P: Kumpulan tu sama dengan apa pada ayat darab (menunjukkan ayat 6 x 4)?
S: Empat.
P: Kumpulan dalam lukisan tadi?
S: Enam.
P: Umi ada cara lain tak untuk menunjukkan ayat darab tadi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA445, Umi menulis ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 sebagai tafsiran kepada ayat 6 x 4. Subjek juga melengkapkan ayat darab yang diberi dengan menulis 6 x 4 = 24. Subjek juga menulis satu lagi ayat bahagi iaitu, 24 ÷ 4 = 6 sebagai tafsiran bagi ayat darab yang diberi oleh pengkaji. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat tersebut adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang tidak sama.

Selain itu, Umi juga melukis empat kumpulan bersaiz enam bagi mewakili ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4. Subjek juga menjelaskan bahawa ayat bahagi adalah songsangan kepada ayat darab. Umi menunjukkan satu lagi lukisan yang mempunyai enam kumpulan bersaiz empat. Subjek menjelaskan bahawa lukisan tersebut merujuk ayat 24 ÷ 4 = 6 manakala, lukisan sebelumnya merujuk ayat 24 ÷ 6 = 4. Subjek berpendapat kedua-dua lukisan tersebut tidak sama kerana mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza. Subjek juga berpendapat bahawa bilangan kumpulan yang terdapat dalam lukisan kedua iaitu empat adalah sama dengan empat dalam ayat darab 6 x 4.

Petikan TA446

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 9 x 0), cuba baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Sembilan darab kosong.
P: Sembilan darab kosong sama dengan berapa?
S: Kosong.
P: Kenapa kosong?
S: Sebab kalau darab dengan kosong jawapan dia kosong.
P: Boleh tulis ayat tu dengan lengkap?

S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \times 0 = 0$$

P: Baik, sekarang boleh tulis ayat bahagi bagi ayat tu?
S: (Subjek menulis empat ayat bahagi seperti berikut):

$$0 \div 9 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Kosong bahagi sembilan sama dengan kosong.
P: Kenapa tulis ayat seperti itu?
S: Sebab sembilan darab kosong sama dengan kosong, jadi kosong bahagi sembilan sama dengan kosong.
P: Ada cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Boleh tunjuk secara lukisan?
S: Tak boleh sebab kosong tak boleh lukis.
P: Yang ini (menunjukkan sifar pada 9 x 0) sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: Kosong.
P: Kosong yang mana?
S: (Subjek menunjukkan sifar pada hasil bahagi)
P: Kenapa bukan yang ini (menunjukkan sifar di sebelah kiri ayat 0 ÷ 9 = 0)?
S: Kosong tu pun boleh juga.
P: Sama ke kedua-dua kosong tu?
S: Sama.

Dalam Petikan TA446, Umi menafsir ayat 9 x 0 dengan menulis ayat bahagi 0 ÷ 9 = 0. Umi melengkapkan ayat darab 9 x 0 dengan menulis ayat 9 x 0 = 0. Subjek juga menjelaskan bahawa sebarang pendaraban dengan sifar akan menghasikan sifar. Subjek juga menjelaskan bahawa ayat yang membabitkan sifar tidak dapat ditafsir secara lukisan. Selain itu, Umi juga berpendapat bahawa sifar pada ayat 9 x 0 boleh mewakili sifar pada hasil bahagi 0 ÷ 9 = 0 ataupun sifar di sebelah kira simbol bahagi.

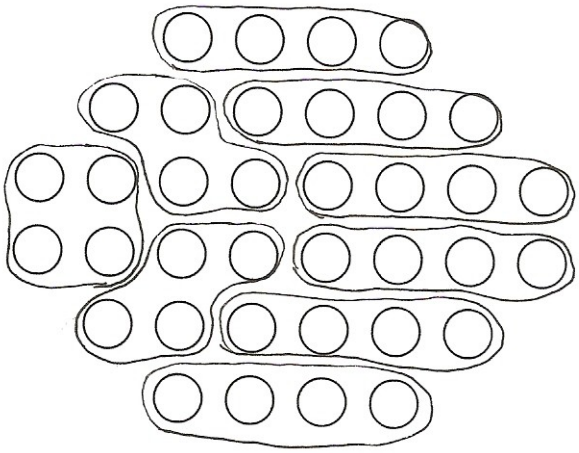
Penyelesaian Masalah

Bentuk Diskrit

Umi menyelesaikan masalah bahagi empat dengan menanda sembilan kumpulan bersaiz empat. Subjek juga menanda empat kumpulan bersaiz sembilan bagi menyelesaikan masalah bahagi sembilan. Petikan PM451 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Umi.

Petikan PM451

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Di sini ada gambar guli. Boleh Umi bahagi empat guli-guli ini? Umi boleh lukis pada gambar tu.
S: (Subjek menghitung secara senyap dan melukis pada gambar rajah yang beri seperti berikut):



P: Dah bahagi empat?
S: (Subjek mengangguk).
P: Semua sekali ada berapa guli?
S: Tiga puluh enam.

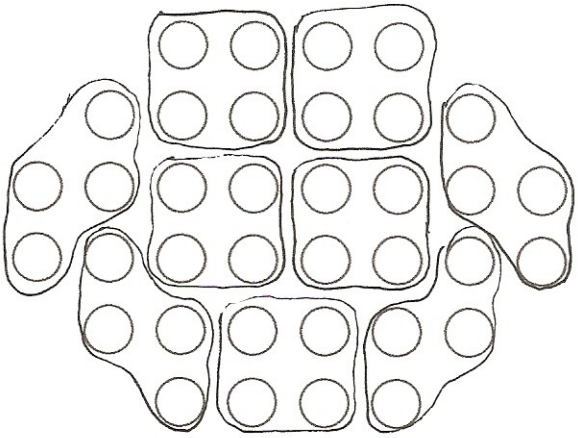
P: Macam mana Umi tahu ada tiga puluh enam?
S: (Subjek menjawab sambil menunjukkan gambar rajah tersebut). Sini ada empat, semua ada sembilan bulatan. Jadi tiga puluh enam.
P: Baik, tiga puluh enam bahagi empat dapat berapa?
S: Sembilan.
P: Macam mana dapat sembilan?
S: Sebab ada sembilan bulatan (subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang telah dilukis).
P: Baik, ada berapa guli dalam setiap bulatan?
S: Empat.
P: Kenapa Umi kumpulkan empat guli?
S: Sebab nak bahagi empat.
P: Kalau nak bahagi tiga?
S: Bulatkan tiga guli.
P: Kalau bahagi dua?
S: Bulatkan dua guli.
P: Baik. Dalam gambar rajah ini, ada macam-macam bentuk. Ada yang memanjang ada yang bentuk empat segi, sama tak kedua-duanya (menunjukkan kumpulan-kumpulan yang terdapat dalam gambar rajah)?
S: Sama
P: Kenapa sama, bentuk tak sama?
S: Bentuk tak sama tapi ada empat guli.
P: Boleh Umi tulis ayat bahagi untuk gambar tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4$$

P: Boleh Umi tulis dengan lengkap? Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4 = 9$$

P: Cuba baca?
S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan.
P: Yang ini (menunjukkan nombor empat pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Guli (menunjukkan satu kumpulan).
P: Yang ini (menunjukkan sembilan pada ayat bahagi)?
S: Bulatan.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Umi ada cara lain tak nak bahagi empat?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

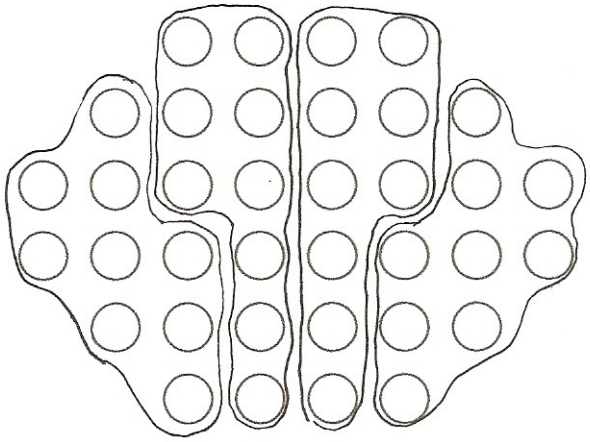


P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Sembilan.
P: Yang ini sama tak dengan yang tadi?
S: Tak.
P: Apa yang tak sama?
S: Bulatan.
P: Bulatan tak sama macam mana?
S: Yang ni panjang, yang ini empat segi (menunjukkan gambar rajah).
P: Bentuk tak sama ya?
S: Ya, bentuk tak sama.
P: Macam mana dengan guli di dalam setiap bulatan? Sama tak?
S: Sama.
P: Ada berapa guli dalam satu bulatan?
S: Empat.
P: Jadi, sama tak dengan tadi?
S: Sama, bentuk lain.
P: Baik, sekarang boleh tulis ayat bahagi untuk gambar ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 4 = 9$$

P: Cuba baca?
S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan.
P: Ayat bahagi ni sama tak dengan yang tadi?
S: Sama.
P: Ada tak cara lain nak bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Baik untuk gambar rajah ini boleh tak kita tulis ayat ini (menunjukkan ayat $36 \div 9 = 4$)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?

S: Sebab yang tu untuk bahagi sembilan.
P: Untuk bahagi sembilan, tak boleh guna untuk gambar ini ke?
S: Tak boleh, sebab yang ini bahagi empat.
P: Kalau macam tu, boleh Umi tunjuk untuk tiga puluh enam bahagi sembilan?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

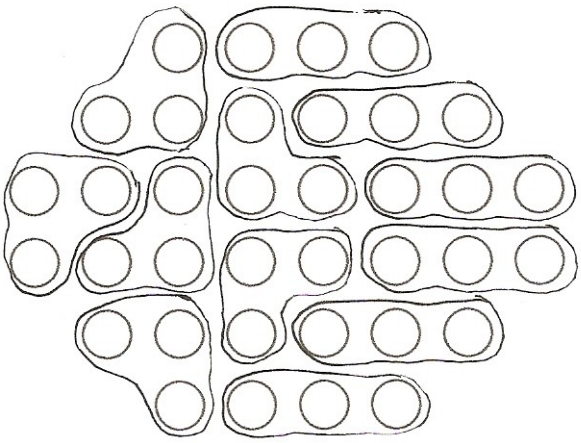


P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa guli?
S: Sembilan.
P: Gambar rajah ni sama tak dengan gambar rajah tadi?
S: Tak sama.
P: Boleh Umi beritahu apa yang tak sama pada kedua-dua gambar tu?
S: Yang ini ada empat kumpulan (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi sembilan), yang ini ada sembilan kumpulan (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Guli. Yang ni ada empat (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi sembilan) yang ini ada sembilan (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat).
P: Jadi boleh tak kita tulis ayat ini (menunjukkan ayat $36 \div 4 = 9$) bagi gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi sembilan)?
S: Tak boleh, sebab yang ni bahagi sembilan.
P: Boleh Umi tulis ayat bahagi untuk yang ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 9 = 4$$

P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat bahagi) merujuk pada apa pada gambar tadi?

S: Bulatan.
P: Yang ini (menunjukkan sembilan pada ayat bahagi)?
S: Guli dalam satu bulatan.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh tak bahagi tiga?
S: (Subjek menanda pada gambar rajah seperti berikut):

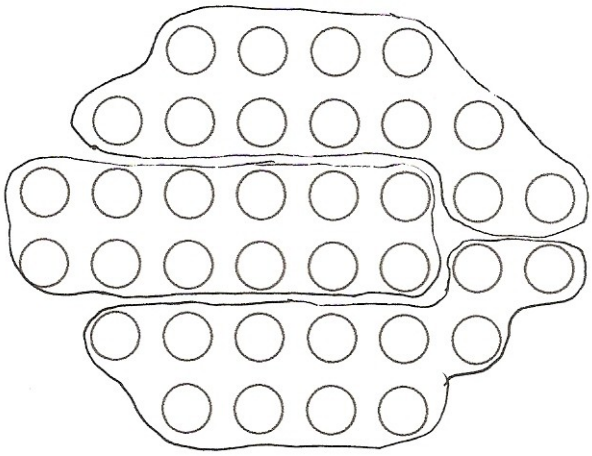


P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Dua belas (subjek menjawab selepas menghitung).
P: Macam mana dapat dua belas?
S: Ada dua belas kumpulan.
P: Satu kumpulan ada berapa guli?
S: Tiga.
P: Kenapa bulatkan tiga?
S: Sebab nak bahagi tiga.
P: Tiga puluh enam bahagi tiga sama dengan berapa?
S: Dua belas.
P: Dalam gambar rajah yang mana menunjukkan dua belas?
S: Bulatan.
P: Baik, gambar ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat), sama tak dengan yang ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga)?
S: …Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ni untuk bahagi tiga (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga), yang ni untuk bahagi empat (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat).
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 3 = 12$$

P: Cuba baca.

S: Tiga puluh enam bahagi tiga sama dengan dua belas.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Sekarang, boleh Umi bahagi dua belas?
S: (Subjek menunjukkan seperti berikut):

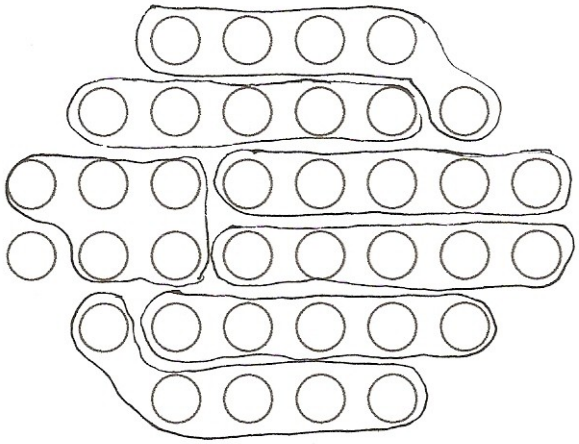


P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tiga.
P: Yang ini sama tak dengan yang tadi (menunjukkan gambar untuk bahagi tiga)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Guli dalam bulatan.
P: Guli ada berapa?
S: Yang ni dua belas, tadi ada tiga.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Ada.
P: Apa yang tak sama?
S: Bulatan. Yang ni (menunjukkan gambar untuk bahagi dua belas) tiga, yang ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga) dua belas.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Boleh Umi tulis ayat bahagi untuk yang ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 12 = 3$$

P: Boleh baca?
S: Tiga puluh enam bahagi dua belas sama dengan tiga.

P: Baik, yang ini rujuk pada apa dalam gambar (menunjukkan nombor 3 dalam ayat)?
S: Bulatan.
P: Yang ni (menunjukkan nombor 12 dalam ayat)?
S: Guli dalam bulatan.
P: Yang ni (menunjukkan nombor 36 dalam ayat)?
S: Semua guli.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk bahagi dua belas?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Umi bahagi lima?
S: (Subjek membulatkan seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tujuh.
P: Di sini ada satu guli yang berada di luar kumpulan (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan). Kenapa?
S: Baki.
P: Kenapa ada baki, tadi tak ada?
S: Sebab bahagi lima ada baki (subjek menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} 7 \\ 5\,\overline{)\,36} \\ \underline{-\,35} \\ 1 \end{array}$$

P: Jadi apa jawapan untuk bahagi lima?
S: Tujuh baki satu.
P: Yang mana menunjukkan tujuh?
S: Bulatan.
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 5 = 7 \text{ baki } 1$$

P: Yang ini (menunjukkan 36 pada ayat bahagi) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: Semua guli.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 5 pada ayat bahagi)?
S: Guli dalam satu bulatan
P: Yang ni (menunjukkan nombor 7 pada ayat bahagi)?
S: Tujuh bulatan.
P: Yang ini (menunjukkan baki 1)?
S: Baki (menunjukkan satu guli di luar kumpulan)
P: Umi ada cara lain nak tunjuk bahagi lima?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW451, Umi menyelesaikan masalah bahagi empat dengan membentuk sembilan kumpulan bersaiz empat. Umi juga berpendapat bahawa saiz kumpulan yang ditanda pada gambar rajah bergantung kepada pembahagi. Umi berpendapat, empat guli dikumpulkan kerana pembahaginya adalah empat. Menurut subjek lagi, bagi bahagi tiga dan dua, masing-masing perlu bulatkan tiga dan dua guli. Subjek juga menanda satu lagi gambar rajah yeng mempunyai sembilan kumpulan bersaiz empat bagi menunjukkan bahagi empat. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah tersebut adalah berbeza kerana mempunyai bentuk kumpulan yang berbeza.

Bagi kedua-dua gambar rajah yang mempunyai sembilan kumpulan bersaiz empat, Umi menulis ayat bahagi $36 \div 4 = 9$. Subjek juga menjelaskan nombor empat pada ayat bahagi merujuk saiz kumpulan, manakala nombor sembilan pula merujuk bilangan kumpulan. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa ayat $36 \div 9 = 4$ tidak boleh mewakili gambar rajah tersebut kerana ayat tersebut adalah untuk bahagi sembilan.

Umi menyelesaikan masalah bahagi sembilan dengan menanda empat kumpulan bersaiz sembilan. Subjek juga menjelaskan bahawa gambar rajah tersebut adalah berbeza berbanding dengan gambar rajah yang ditanda bagi bahagi empat kerana bilangan kumpulan dan saiz kumpulanya berbeza. Subjek juga menulis ayat 36 ÷ 9 = 4 bagi mewakili gambar rajah yang mempunyai empat kumpulan bersaiz sembilan itu. Subjek menjelaskan bahawa sembilan pada ayat bahagi merujuk saiz kumpulan manakala, empat pada ayat tersebut pula merujuk bilangan kumpulan. Selain itu, Umi berpendapat bahawa kedua-dua ayat 36 ÷ 9 = 4 dan 36 ÷ 4 = 9 adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza.

Umi menyelesaikan masalah bahagi tiga dengan menanda dua belas kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga menulis ayat 36 ÷ 3 = 12 bagi mewakili gambar rajah tersebut. Umi menjelaskan tiga pada ayat bahagi merujuk saiz kumpulan dan dua belas pula merujuk bilangan kumpulan. Selain itu, subjek berpendapat ayat 36 ÷ 12 = 3 tidak boleh mewakili gambar rajah yang mempunyai dua belas kumpulan kerana ayat tersebut adalah bagi bahagi dua belas. Subjek juga menjelaskan bahawa gambar rajah yang ditanda untuk bahagi empat dan bahagi tiga adalah berbeza.

Bagi bahagi dua belas pula, Umi menanda tiga kumpulan yang bersaiz dua belas. Subjek juga mewakilkan gambar rajah tersebut dengan menulis ayat 36 ÷ 12 = 3. Subjek juga menjelaskan gambar rajah bagi bahagi dua belas dan bahagi tiga adalah berbeza kerana

mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza. Subjek juga berpendapat ayat bahagi 36 ÷ 12 = 3 adalah tidak sama dengan ayat bahagi 36 ÷ 3 = 12 dan tidak boleh mewakili gambar rajah yang sama.

Bagi menyelesaikan masalah bahagi lima pula, Umi menanda tujuh kumpulan bersaiz lima. Sebiji guli dibiarkan di luar kumpulan kerana menurut subjek guli tersebut adalah baki. Subjek juga menunjukkan bahagi lima secara pembahagian panjang. Selain itu, Umi menulis ayat bahagi 36 ÷ 5 = 7 baki 1 bagi mewakili gambar rajah yang ditandanya itu. Umi juga menjelaskan bahawa lima pada ayat bahagi tersebut merujuk saiz kumpulan dalam gambar rajah manakala, tujuh pula merujuk bilangan kumpulan bersaiz empat yang dapat dibentuk. Menurutnya lagi, baki satu pula, merujuk pada satu guli yang tidak dibulatkan dalam gambar rajah.

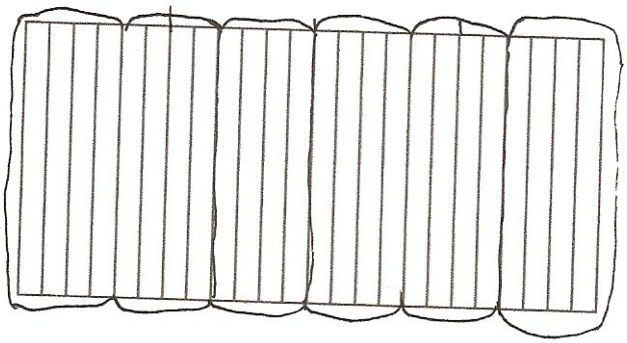
Bentuk Selanjar

Umi menyelesaikan masalah yang membabitkan gambar rajah berbentuk selanjar yang perlu dibahagi empat dengan menanda enam kumpulan bersaiz empat. Petikan PM452 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Umi.

Petikan PM452

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai 24 petak). Cuba lihat kad ini. Ada banyak jalur. Boleh Umi bahagi empat?

S: (Subjek menanda seperti berikut pada gambar rajah):

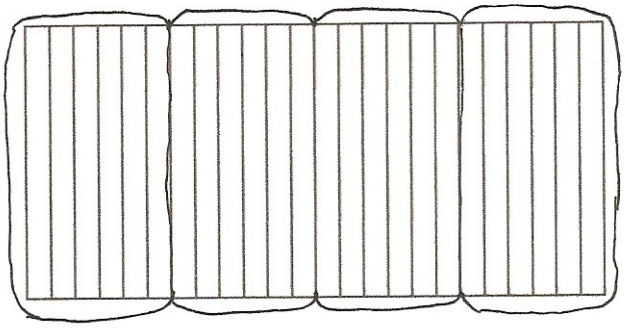


P: Dah siap?
S: Dah
P: Ada berapa kumpulan?
S: Enam.
P: Satu kumpulan ada berapa jalur?
S: Empat.
P: Kenapa Umi kumpulkan empat?
S: Sebab nak bahagi empat.
P: Kalau bahagi tiga?
S: Kumpul tiga jalur.
P: Baik, ada berapa jalur kesemuanya?
S: Dua puluh empat.
P: Macam mana Umi dapat dua puluh empat?
S: Sebab ada enam kumpulan darab empat jalur
P: Baik, sekarang boleh Adila tuliskan ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 4 = 6$$

P: Cuba baca?
S: Dua puluh empat bahagi empat sama enam.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Yang ini (menunjukkan 24 pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Dua puluh empat jalur. Semua.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat bahagi)?
S: Empat jalur.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 6 pada ayat bahagi)?
S: Enam kumpulan.
P: Ada cara lain nak bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Ada ayat bahagi lain untuk gambar rajah tu?
S: …Tak ada.
P: Boleh tak kita wakilkan ayat ini (menunjukkan ayat bahagi

24 ÷ 6 = 4) untuk gambar rajah tadi?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab ayat tu untuk bahagi enam.
P: Sekarang boleh Umi bahagi enam gambar rajah ini (memberikan satu gambar rajah baru)?
S: (Subjek menandakan seperti berikut):

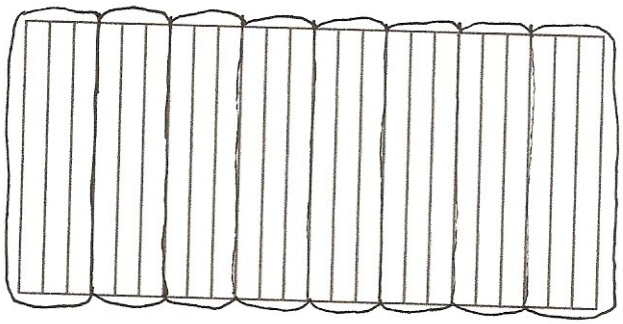


P: Umi kumpulkan berapa jalur?
S: Enam.
P: Kenapa kumpulkan enam?
S: Sebab nak bahagi enam.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Kalau kumpulkan empat jalur, dapat berapa kumpulan?
S: Enam.
P: Boleh tak kita kata itupun bahagi enam?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab bahagi enam kena kumpul enam.
P: Baik, boleh tulis ayat bahagi untuk gambar rajah tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 6 = 4$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh empat bahagi enam sama dengan empat.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat bahagi) sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan enam pada ayat bahagi)?
S: Jalur dalam satu kumpulan.
P: Ayat bahagi ini sama tak dengan ayat bahagi tadi (menunjukkan ayat bagi bahagi empat)?
S: Tak sama.

P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni enam (menunjukkan ayat bagi bahagi enam), yang ini bahagi empat (menunjukkan ayat bagi bahagi empat).
P: Ada lagi?
S: Yang ni empat (menunjukkan hasil bahagi bagi ayat bahagi enam) yang ini enam (menunjukkan hasil bahagi bagi ayat bahagi empat).
P: Lagi?
S: Tak ada lagi.
P: Baik, macam mana dengan gambar rajah? Sama tak dengan gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Sini ada empat kumpulan (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi enam), sini ada enam kumpulan (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat).
P: Ada lagi?
S: Ada. Dalam ni ada empat jalur (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat), dalam ni ada enam (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi enam).
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Umi tunjuk bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

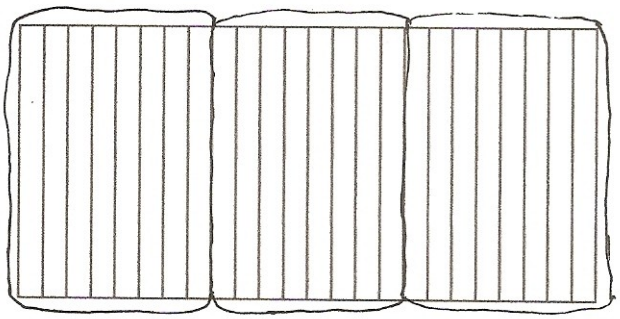


P: Sini ada berapa kumpulan?
S: (Subjek menghitung bilangan kumpulan dan menjawab). Lapan.
P: Satu kumpulan ada berapa jalur?
S: Tiga.
P: Baik, boleh Umi tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 3 = 8$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh empat bahagi tiga sama dengan lapan.

P: Ada tak ayat bahagi lain bagi gambar rajah ini?
S: Tak ada.
P: Yang ini (menunjukkan tiga pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Tiga jalur dalam satu kumpulan.
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan lapan pada ayat bahagi)?
S: Kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh Adila bahagi lapan?
S: (Subjek menandakan gambar rajah seperti berikut):

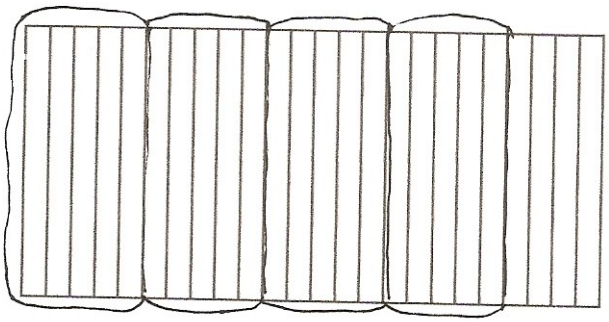


P: Yang ini berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Gambar rajah ini sama tak dengan gambar rajah tadi (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga)?
S: Tak sama.
P: Boleh Umi jelaskan apa yang tak sama?
S: Sini ada tiga kumpulan (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi lapan), sini ada lapan kumpulan (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga).
P: Baik, ada lagi tak?
S: Sini ada lapan jalur (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi lapan) sini ada tiga jalur (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga).
P: Ada lagi?
S: …Tak ada lagi.
P: Sekarang, boleh tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 8 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Dua puluh empat bahagi lapan sama dengan tiga.
P: Ayat ini sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat bahagi bagi bahagi tiga)?

S: Tak sama.
P: Boleh Umi jelaskan apa yang tak sama?
S: Sini ada tiga (menunjukkan ayat 24 ÷ 3 = 8) sini ada lapan (menunjukkan ayat 24 ÷ 8 = 3).
P: Ada lagi tak yang beza?
S: Ada. Jawapan untuk ni lapan (menunjukkan ayat 24 ÷ 3 = 8). Jawapan untuk ni tiga (menunjukkan ayat 24 ÷ 8 = 3).
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang cikgu nak Umi bahagi lima?
S: (Subjek menghitung berulang-ulang dan menanda seperti berikut):



P: Dah siap?
S: (Subjek mengangguk).
P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat kumpulan… yang ini baki (menunjukkan empat jalur yang tidak dikumpulkan).
P: Kenapa Umi kata itu baki?
S: Sebab ada empat saja.
P: Sepatutnya ada berapa untuk dikumpulkan dalam satu kumpulan?
S: Sepatutnya ada lima.
P: Jadi, berapa baki untuk bahagi lima?
S: Empat.
P: Jadi, apa jawapan untuk bahagi lima?
S: Empat baki empat.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

24 ÷ 5 = 4 baki 4

P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Macam mana dengan bahagi lima? Ada cara lain nak bahagi lima?
S: Tak ada.

P: Yang ini (menunjukkan lima pada ayat 24 ÷ 5 = 4 baki 4) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: Jalur dalam satu kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan 4 selepas simbol '=')?
S: Empat kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan 4 selepas perkataan baki)?
S: Baki.
P: Cuba bandingkan gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi lima) dengan gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi enam). Sama tak?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Satu kumpulan ada enam jalur (menunjukkan gambar bagi bahagi enam). Yang ni satu kumpulan ada lima jalur (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi lima).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Yang ni ada baki (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi lima), yang ni tak ada baki (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi enam)
P: Ada lagi?
S: Kumpulan ada empat untuk dua-dua.
P: Ada lagi yang tak sama atau sama?
S: Dua-dua ada dua puluh empat jalur.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Macam mana dengan ayat bahagi? Ada tak yang sama atau tak sama antara ini (menunjukkan 24 ÷ 6 = 4) dan ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 5 = 4 baki 4)? Yang sama dulu, apa yang sama?
S: Dua puluh empat.
P: Ada lagi yang sama?
S: Tak ada.
P: Baik, yang tak sama?
S: Yang tak sama, bahagi lima (menunjukkan 24 ÷ 5 = 4 baki 4) ada baki empat, yang ini (menunjukkan 24 ÷ 6 = 4) bahagi enam tak ada baki empat.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Yang sama?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PM452, Umi menyelesaikan masalah bahagi empat dengan menanda enam kumpulan bersaiz empat. Umi juga berpendapat bahawa kumpulan yang ditandanya itu bersaiz empat

kerana pembahaginya adalah empat. Subjek juga berpendapat bahawa sekiranya soalannya adalah bahagi tiga maka bilangan jalur yang perlu dikumpulkan dalam satu kumpulan adalah tiga. Selain itu subjek berpendapat bahawa bilangan kumpulan merujuk jawapan bagi pembahagian tersebut. Subjek juga menentukan jumlah jalur yang terdapat pada gambar rajah dengan mendapab bilangan kumpulan dan saiz kumpulan. Selain itu, Umi juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 4 = 6 bagi mewakili pembahagian tersebut.

Bagi menyelesaikan masalah bahagi enam pula, Umi menanda empat kumpulan bersaiz enam pada gambar rajah yang diberi oleh pengkaji. Subjek juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 bagi mewakili pembahagian tersebut. Subjek menjelaskan enam pada ayat bahagi tersebut merujuk bilangan jalur yang terdapat pada satu kumpulan manakala, empat pula merujuk pada bilangan kumpulan bersaiz enam yang dapat dibentuk. Selain itu Umi berpendapat bahawa gambar rajah yang ditandanya bagi menyelesaikan masalah bahagi empat dan bahagi enam adalah berbeza mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza. Demikian juga dengan ayat bahagi yang ditulisnya bagi mewakili bahagi empat dan enam. Menurut Umi, kedua-dua ayat bahagi adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza.

Bagi menyelesaikan masalah bahagi tiga pula, Umi menanda lapan kumpulan yang bersaiz tiga pada gambar rajah yang diberi. Subjek juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 3 = 8 bagi mewakili gambar

rajah tersebut. Subjek menjelaskan kaitan antara gambar rajah yang ditandanya itu dengan ayat bahagi iaitu, tiga pada ayat bahagi merujuk saiz kumpulan manakala, lapan pula merujuk bilangan kumpulan yang dapat dibentuk.

Umi menanda tiga kumpulan bersaiz lapan bagi menyelesaikan masalah bahagi lapan. Subjek menulis ayat bahagi 24 ÷ 8 = 3 bagi mewakili gambar rajah yang ditandanya itu. Subjek juga menjelaskan bahawa lapan pada ayat bahagi tersebut merujuk saiz kumpulan dalam gambar rajah manakala, tiga pada ayat bahagi pula merujuk bilangan kumpulan.

Selain itu, Umi juga berpendapat bahawa gambar rajah yang ditanda bagi bahagi tiga dan bahagi lapan adalah berbeza kerana kedua-dua gambar rajah tersebut mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza. Subjek juga berpendapat ayat bahagi yang ditulis bagi mewakili bahagi tiga dan bahagi lapan iaitu, 24 ÷ 3 = 8 dan 24 ÷ 8 = 3 adalah juga berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza.

Bagi menyelesaikan masalah bahagi lima pula, Umi menanda empat kumpulan bersaiz lima. Dalam pembahagian tersebut, empat jalur dibiarkan di luar kumpulan sebagai baki. Menurut subjek, empat jalur tersebut tidak dikumpulkan dalam satu bulatan kerana jalur-jalur itu tidak mencukupi lima. Subjek berpendapat hanya jalur yang mencukupi lima sahaja yang ditanda dalam satu kumpulan. Selain itu, Umi juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 5 = 4 baki 4 bagi mewakili

gambar rajah tersebut. Subjek juga menjelaskan perkaitan antara ayat bahagi dengan gambar rajah yang ditandanya. Menurut subjek, nombor lima pada ayat bahagi merujuk saiz kumpulan, empat selepas tanda '=' merujuk bilangan kumpulan bersaiz lima manakala, empat selepas perkataan 'baki' pula merujuk empat jalur yang tidak ditanda dalam satu kumpulan.

Selain itu, subjek juga menjelaskan perbezaan dan persamaan antara gambar rajah yang ditanda bagi bahagi lima dan bahagi enam. Subjek berpendapat kedua-dua gambar rajah yang ditanda bagi bahagi lima dan bahagi enam mempunyai bilangan kumpulan yang sama iaitu, empat. Subjek juga menjelaskan walaupun bilangan kumpulan kedua-dua gambar rajah sama saiz kumpulan adalah berbeza. Subjek juga menjelaskan gambar rajah bagi bahagi lima mempunyai empat jalur yang tidak ditanda sedangkan gambar rajah bagi bahagi enam kesemua jalur ditanda dalam kumpulan. Umi juga berpendapat bahawa ayat bahagi $24 \div 6 = 4$ dan $24 \div 5 = 4$ baki 4 mempunyai pembahagi yang berbeza. Selain itu, subjek juga menjelaskan bahawa bahagi lima mempunyai baki empat sedangkan bahagi enam tidak mempunyai baki.

Protokol 5: Syahirah

Syahirah berusia 9 tahun 10 bulan semasa temu duga dikendalkan. Tingkah laku yang ditunjukkan oleh beliau semasa temu duga dihuraikan seperti yang berikut.

1. Dia menggambarkan perkataan ‘bahagi’ dengan menulis simbol ‘ ÷ ’ dan ‘)‾‾ ’.

2. Bagi ayat enam bahagi dua, dia menggambarkannya dengan menulis ayat 6 ÷ 2 dan $2\overline{)6}$.

3. Dia mewakilkan ayat a ÷ b dengan membentuk kumpulan-kumpulan bersaiz b dan b kumpulan yang sama saiz. Menurut Syahirah, pembahagi menentukan saiz kumpulan atau bilangan kumpulan dan hasil bahagi juga mewakili saiz kumpulan atau bilangan kumpulan.

4. Bagi pembahagian yang mempunyai baki a ÷ b = c baki d, jawapannya ditulis sebagai c baki d .

5. Menurutnya, gambar rajah yang mempunyai c kumpulan bersaiz b tidak sama dengan gambar rajah yang

mempunyai b kumpulan bersaiz c kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

6. Menurutnya, persamaan a ÷ b = c adalah sama dengan a ÷ c = b kerana pembahagi dan hasil bahagi boleh saling bertukar ganti.

7. Bagi persamaan a ÷ b = c, a merujuk semua yang hendak dibahagi, b atau c merujuk saiz kumpulan, dan c atau b merujuk bilangan kumpulan.

8. Susunan yang dibentuk bagi persamaan a ÷ b = c, adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi a yang ditolak secara berulang sebanyak c kali. Setiap penolakan perlu bersaiz b atau c, dan nilai c atau b dalam a ÷ b = c adalah sama dengan bilangan penolakan berulang yang dilakukan.

9. Menurutnya, jika a ÷ b = c, maka

vii. a0 ÷ b = c0

viii. a00 ÷ b = c00

ix. a ÷ a = 1

x. a0 ÷ a0 = 1

xi. a ÷ 1 = a

xii. a0 ÷ 1 = a0

10. Bagi ayat 0 ÷ a, jawapannya adalah sifar kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar.

11. Bagi ayat a ÷ 0, jawapannya adalah sifar kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar.

12. Menurut beliau, ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

13. Persamaan darab bagi ayat a ÷ b adalah c x b = a atau b x c = a, di mana c adalah hasil bahagi bagi a ÷ b.

Gambaran Mental

Perkataan Bahagi

Syahirah memberikan dua gambaran bagi perkataan bahagi, iaitu simbol ‘ ÷ ’, simbol ‘)‾‾. Petikan GM511 berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan GM511

P: Kalau cikgu sebut bahagi, gambar apa ada dalam fikiran Syahirah?
S: Gambar bahagi
P: Gambar bahagi macam mana yang Syahirah nampak? Boleh lukis pada kertas ini. (memberikan sehelai kertas kepada subjek).
S: (Subjek menulis simbol seperti berikut):

‘ ÷ ’

P: Boleh beritahu cikgu itu apa?
S: Bahagi
P: Ada gambar lain tak bila sebut bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

‘)‾‾ ’

P: Itu apa?
S: Bahagi juga.
P: Ada gambar lain tak tentang bahagi?
S: Tak ada.
P: Tak ada gambar lain?
S: Tak ada.

Gambaran Mental Ayat Bahagi

Syahirah mempunyai dua gambaran bagi ayat enam bahagi dua. Petikan GM512 berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Syahirah.

Petikan GM512

P: Sekarang kalau saya sebut enam bahagi dua, gambar apa ada dalam fikiran Syahirah?

S: Gambar enam bahagi dua
P: Boleh tunjuk gambar enam bahagi dua tu secara lukisan?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

‘6 ÷ 2’

P: Apa Syahirah tulis tu?
S: Enam bahagi dua (Subjek menunjukkan ayat yang ditulisnya).
P: Ada gambar lain tak?
S: Ada. (Subjek menulis seperti berikut):

‘ $2\overline{)6}$ ’

P: Selain pada tu ada gambar lain tak bila cikgu sebut enam bahagi dua?
S: Tak ada.
P: Tak ada gambar lain?
S: Tak ada.
P: Kalau cikgu sebut lapan bahagi empat?
S: (Subjek terus menulis seperti berikut):

8 ÷ 4

dan

$4\overline{)8}$

P: Syahirah tulis apa tu?
S: Lapan bahagi empat?
P: Ada gambar lain bagi lapan bahagi empat?

S: Tak ada

Dalam petikan GM512, Syahirah menggambarkan enam bahagi dua dengan menulis ayat bahagi $6 \div 2$ dan $2 \overline{)6}$. Syahirah juga menggambarkan lapan bahagi empat dalam format yang sama dengan enam bahagi dua, iaitu $8 \div 4$ dan $4 \overline{)8}$.

Perwakilan

Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Syahirah mewakilkan ayat bahagi tanpa baki dengan menyusun bahan maujud yang disediakan mengikut soalan yang diberi. Selain itu, subjek menunjukkan pembahagian secara penolakan. Sedutan daripada Petikan PW521 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi.

Petikan PW521

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4) Boleh Syahirah baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Kenapa kata dua belas bahagi empat?
S: Ini dua belas, (subjek menunjukkan nombor 12 pada kad), ini bahagi, (subjek menunjukkan simbol bahagi), ini empat (subjek menunjukkan angka empat sambil menjawab).
P: Boleh tak Syahirah tunjuk dengan butang-butang ni apa yang tertulis dalam kad ini?
S: Nak tunjuk dua belas bahagi empat?
P: Ya, boleh tunjuk dengan butang-butang ni?
S: (Subjek mengira dua belas dan kemudian menyusun butang-butang tersebut dalam tiga kumpulan):

P: Dah siap ke?
S: Ya.
P: Kenapa Syahirah kata ini dua belas bahagi empat?
S: Sebab dah bahagi kepada empat (Subjek menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan semasa menyebut

empat). Macam ni pun boleh. (subjek menyusun semula dengan meletakan tiga butang dalam satu kumpulan).

P: Boleh bagi tau apa yang baru Syahirah buat tadi?

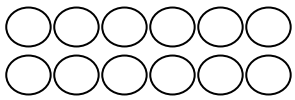
S: Ini pun dua belas bahagi empat.

P: Apa beza dengan yang tadi?

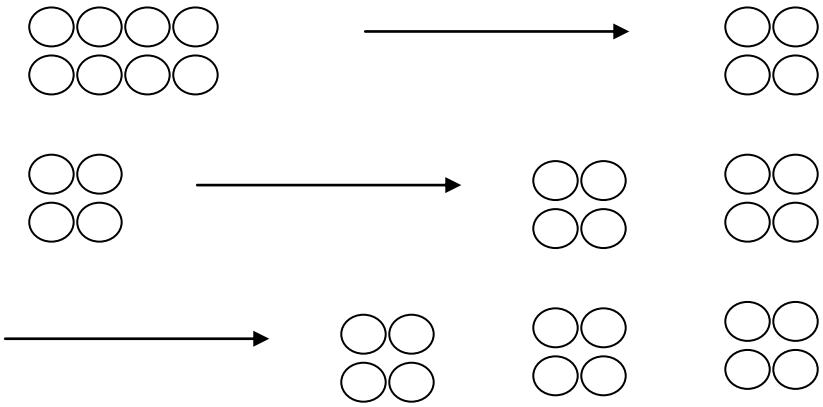
S: Sini ada empat kumpulan. Satu kumpulan ada tiga butang. Tadi tiga kumpulan, satu kumpulan ada empat butang.

P: Dua belas pada ayat tadi rujuk pada apa di sini (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).

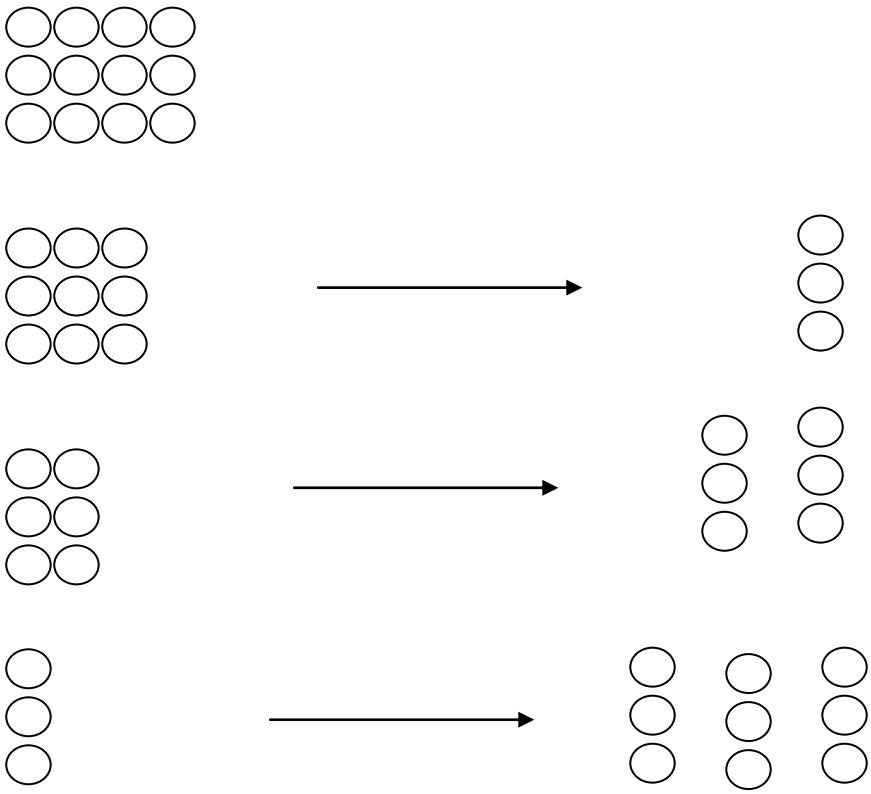
S: Semua butang-butang.
P: Yang ini (menunjukkan angka '4' pada ayat bahagi?
S: Empat kumpulan (menunjukkan empat butang yang telah dikumpulkan).
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Tiga.
P: Tiga tu menunjukkan apa?
S: Jawapan dua belas bahagi empat.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua belas bahagi empat?
S: ... Tolak pun boleh. (Subjek mendiamkan diri untuk beberapa ketika dan kemudian menjawab).
P: Tolak?
S: Ya.
P: Boleh Syahirah tunjuk dengan butang-butang ni (menunjukkan butang-butang yang terdapat dalam bekas)?
S: Boleh. (Subjek mengira dua belas butang, menyusunnya sambil menjelaskan perlakuan beliau):

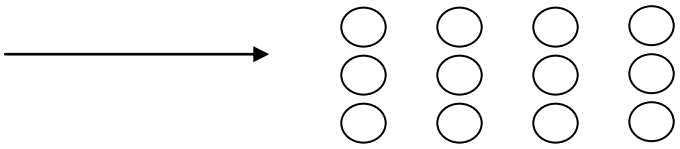


(Subjek mengeluarkan butang dalam kumpulan bersaiz empat ke sebelah kanan, daripada dua belas butang yang letakkan di tepi sebelah kiri seperti berikut):



S: Dua belas tolak empat tiga kali (subjek menjelaskan sambil mengeluarkan empat butang daripada dua belas butang sebanyak tiga kali).
P: Dua belas tolak empat tiga kali sama dengan apa?
S: Sama dengan dua belas bahagi empat.
P: Susunan ni (menunjukkan susunan yang baru dibuat oleh subjek) sama tak dengan susunan yang Syahirah buat tadi?
S: Sama. Satu kumpulan ada empat butang ... kalau tolak tiga pun boleh.
P: Tolak tiga macam mana? Boleh Siti tunjuk?
S: Boleh. (Subjek menyususn semula dua belas butang dan mengeluarkan dalam kumpulan bersaiz tiga).





P: Ini dua belas bahagi empat ke?
S: Ya. Dua belas belas bahagi tiga pun boleh.
P: Syahirah ada cara lain untuk bahagi empat?
S: ... Tak ada.
P: Bahagi tiga?
S: ...Tak ada. Sama macam tadi.

Dalam Petikan PW521, subjek mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Subjek juga membentuk empat kumpulan bersaiz tiga bagi mewakili ayat 12 ÷ 4. Subjek berpendapat empat pada ayat 12 ÷ 4 merujuk saiz kumpulan yang dibentuk ataupun bilangan kumpulan. Subjek juga berpendapat bahawa penyusunan yang dibentuk bagi ayat 12 ÷ 4 adalah sama dengan penyusunan yang dibentuk bagi ayat 12 ÷ 3 kerana pembahagi dan hasil bahagi bagi kedua-dua ayat boleh saling bertukar ganti.

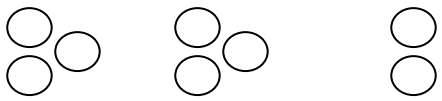
Selain itu, Shairah mewakilkan ayat 12 ÷ 4 secara penolakan berulang. Bagi ayat 12 ÷ 3, selain dari membentuk empat kumpulan bersaiz tiga dan tiga kumpulan bersaiz empat, subjek juga menunjukkan secara penolakan berulang.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Syahirah membentuk tiga kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz dua bagi mewakili ayat 8 ÷ 3. Subjek juga membentuk dua kumpulan bersaiz tiga dan satu kumpulan bersaiz dua bagi mewakili ayat tersebut. Syahirah juga mewakilkan ayat 8 ÷ 3 secara penolakan berulang. Petikan PW522 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan Ayat Bahagi yang Mempunyai Baki.

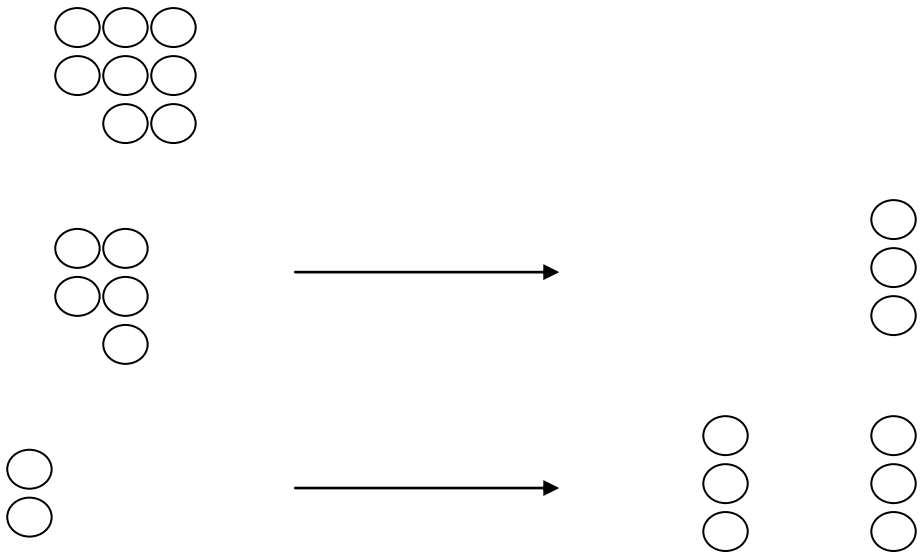
Petikan PW522

P: Cuba baca yang ini. (Menunjukkan kad yang tertulis ayat '8 ÷ 3').
S: Lapan bahagi tiga.
P: Boleh Syahirah tunjuk dengan butang-butang ini (menunjukkan sekotak butang) macam mana lapan bahagi tiga?
S: (Subjek mengira dan menyusun butang-butang tersebut seperti di bawah):



P: Dah siap?
S: Ya.
P: Boleh beritahu apa yang Syahirah buat?
S: Lapan bahagi tiga.
P: Kenapa yang ni ada dua butang (menunjukkan kumpulan yang mempunyai dua butang) yang lain ada tiga?
S: Baki.
P: Kenapa ada baki?
S: Sebab lapan bahagi tiga ada baki.
P: Di sini (menunjukkan satu kumpulan), Syahirah kumpulkan tiga butang. Kenapa tiga?
S: Sebab lapan bahagi tiga.
P: Apa jawapan bagi lapan bahagi tiga?

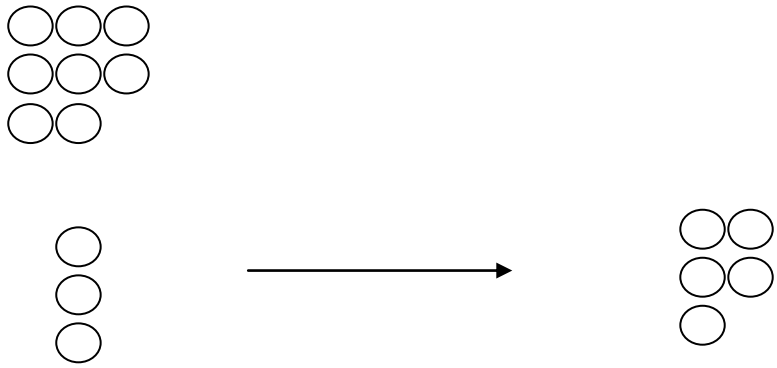
S: Dua baki dua.
P: Boleh tunjuk pada susunan?
S: Dua (menunjukkan dua kumpulan bersaiz tiga), baki dua (menunjukkan satu kumpulan bersaiz dua)
P: Ada cara lain nak bahagi tiga?
S: ... Cara tolak?
P: Boleh tunjuk?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



S: Yang ini baki (subjek menunjukkan dua butang di sebelah kiri)
P: Syahirah tolak berapa?
S: Tiga, dua kali.
P: Susunan ni sama ke dengan susunan yang Syahirah buat tadi?
S: Sama.
P: Apa jawapan lapan bahagi tiga merujuk susunan yang ini?
S: Dua (menunjukkan dua kumpulan) baki dua (menunjukkan dua butang di sebelah kiri).
P: Sekarang, cuba baca yang ini?
S: Lapan bahagi lima.
P: Boleh Syahirah tunjuk dengan butang?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):

P: Dah siap?
S: Ya.
P: Ada berapa kumpulan?

S: Dua. Satu kumpulan lima butang, yang ini (menunjukkan kumpulan yang bersaiz tiga) baki tiga.
P: Kenapa satu kumpulan ada lima, satu kumpulan ada tiga?
S: Lima sebab lapan bahagi lima, yang tiga tu baki.
P: Apa jawapan bagi yang ini (menunjukkan kad 8 ÷ 5)?
S: Satu baki tiga.
P: Kenapa satu baki tiga?
S: Sebab satu kumpulan saja yang ada lima, yang tiga lagi baki.
P: Ada cara lain nak tunjuk lapan bahagi lima?
S: Cara tolak. (Subjek menunjukkan seperti berikut):



S: Ini baki (subjek menunjukkan tiga butang di sebelah kiri)
P: Susunan ini sama tak dengan cara tadi?
S: Sama. Satu baki tiga.
P: Ada cara lain untuk bahagi ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 8 ÷ 5)?
S: Tak ada. Sama macam tadi saja.

Dalam Petikan PW522, Syahirah mewakilkan ayat 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan yang bersaiz tiga dan satu kumpulan bersaiz dua. Subjek juga memberikan jawapan kepada ayat tersebut sebagai dua baki dua. Selain itu, subjek juga menunjukkan pembahagian lapan bahagi tiga secara penolakan berulang.

Bagi ayat 8 ÷ 5 pula, subjek membentuk satu kumpulan bersaiz lima dan satu kumpulan bersaiz tiga. Menurut subjek, kumpulan yang bersaiz lima tersebut merupakan baki. Selain itu,

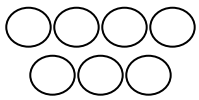
Syahirah juga menunjukkan pembahagian lapan bahagi lima secara penolakan berulang.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

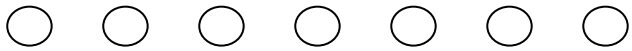
Syahirah membentuk satu kumpulan bersaiz tujuh bagi mewakili ayat 7 ÷ 7. Subjek juga membentuk tujuh kumpulan yang bersaiz satu bagi mewakili ayat tersebut. Petikan PW523 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan PW523

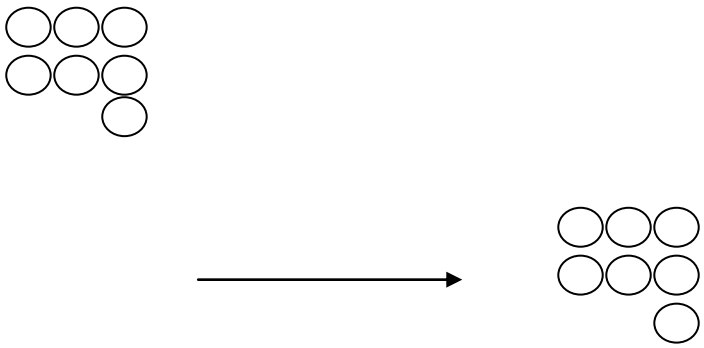
P: Boleh Syahirah baca apa yang tertulis di sini (menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 7)?
S: Tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang macam tadi?
S: (Subjek menghitung tujuh butang dan menyusunnya seperti berikut):



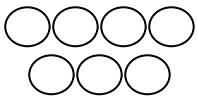
P: Sudah siap?
S: Sudah.
P: Boleh beritahu apa yang Syahirah buat?
S: Satu kumpulan, tujuh bahagi tujuh.
P: Kenapa kumpulkan dalam satu kumpulan?
S: Sebab tujuh nak bahagi tujuh. Macam ini pun boleh (subjek menyusun semula butang-butang tersebut seperti berikut):



P: Apa beza susunan yang ini dengan tadi?
S: Sama, yang ini pun tujuh bahagi tujuh.
P: Baik, yang mana jawapan bagi tujuh bahagi tujuh dalam susunan yang ini?
S: Tujuh bahagi tujuh sama dengan satu (menunjukkan satu butang).
P: Kalau dalam susunan tadi?
S: Satu kumpulan (subjek menyusun semula dan menjawab).
P: Ada cara lain tak nak tunjuk tujuh bahagi tujuh?
S: Cara tolak pun boleh (subjek menyusun seperti berikut):

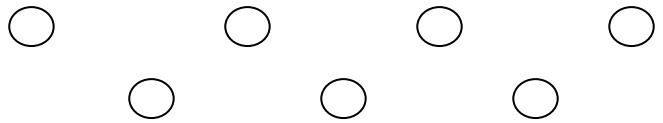


S: Tujuh tolak tujuh satu kali (subjek menunjukkan tiga butang di sebelah kiri)
P: Tujuh tolak tujuh satu kali? Sama tak dengan susunan tadi?
S: Sama.
P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Satu.
P: Satu tu rujuk pada apa dalam ayat bahagi tadi?
S: Satu kumpulan … jawapan untuk tujuh bahagi tujuh.
P: Ada cara lain tujuh bahagi tujuh?
S: Tak ada.
P: Kalau tujuh bahagi satu macam mana pula?
S: Tujuh bahagi satu sama dengan tujuh.
P: Boleh tunjuk dengan butang macam tadi?
S: (Subjek menyusun butang-butang seperti berikut):

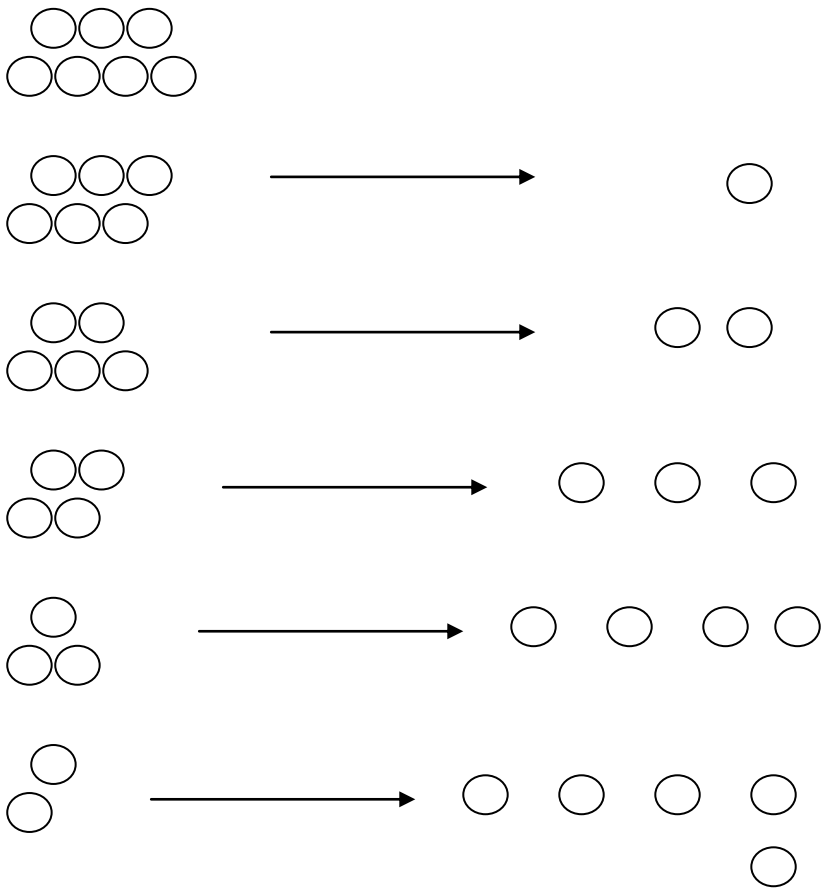


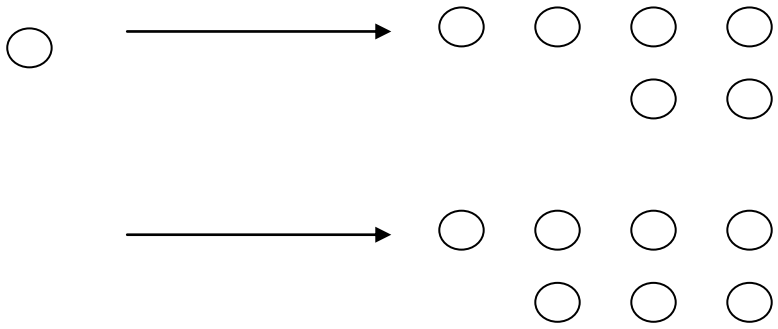
P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.

P: Kenapa satu kumpulan?
S: Sebab tujuh bahagi satu. Macam ni pun tujuh bahagi satu. (Subjek menyusun semula seperti berikut):



P: Yang ni sama tak dengan tadi?
S: Sama. Yang ni pun tujuh bahagi satu.
P: Yang ini sama tak dengan susunan yang Syahirah buat untuk tujuh bahagi tujuh?
S: Sama.
P: Jadi, boleh tak kita namakan yang ini tujuh bahagi tujuh?
S: Boleh.
P: Ada cara lain untuk wakilkan tujuh bahagi tujuh?
S: Tolak satu tujuh kali (subjek menjawab sambil menyusun semula butang dan mengeluarkan satu per satu):





P: Yang ini sama tak dengan yang tadi?
S: Sama.
P: Ada cara lain untuk tujuh bahagi satu?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW523, Syahirah mewakilkan ayat 7 ÷ 7 dengan membentuk satu kumpulan bersaiz tujuh. Subjek juga membentuk tujuh kumpulan bersaiz satu. Selain itu, subjek juga menunjukkan pembahagian tujuh bahagi tujuh secara penolakan berulang. Subjek mengeluarkan tujuh butang daripada tujuh butang yang disusun. Syahirah juga berpendapat bahawa ketiga-tiga cara yang ditunjuk bagi mewakili ayat tujuh bahagi tujuh adalah sama.

Bagi ayat 7 ÷ 1 pula, Syahirah membentuk tujuh kumpulan bersaiz satu. Subjek membentuk satu kumpulan bersaiz tujuh bagi mewakili ayat tersebut. Selain itu, Syahirah juga mewakilkan ayat tujuh bahagi satu secara penolakan berulang. Subjek juga berpendapat bahawa kesemua susunan yang dibentuk bagi mewakili tujuh bahagi tujuh boleh juga mewakili ayat tujuh bahagi satu.

Gambar Rajah

Gambar Rajah Diskret

Syahirah mewakilkan gambar rajah yang mempunyai lima belas biji bola dengan menulis ayat bahagi, 15 ÷ 3 = 5 dan 15 ÷ 5 = 3. Bagi gambar rajah yang mempunyai enam belas kura-kura pula, Syahirah menulis ayat bahagi 16 ÷ 4 = 4. Subjek juga mejelaskan kaitan gambar rajah yang diberi dengan ayat-ayat bahagi yang ditulisnya. Sedutan daripada Petikan PW524 dan PW525 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan gambar rajah diskrit.

Petikan PW524

P: Cuba Syahirah lihat gambar ni (menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas biji bola)? Berpandu kepada gambar ini boleh Syahirah tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

15 ÷ 3 = 5

15 ÷ 5 = 3

P: Boleh Syahirah baca ayat-ayat yang Syahirah tulis?
S: Lima belas bahagi tiga sama dengan lima, lima belas bahagi lima sama dengan tiga.
P: Boleh Syahirah jelaskan kenapa tulis dua ayat seperti ini (menunjukkan ayat-ayat bahagi yang ditulis oleh subjek)?
S: Sebab ada tiga bola dalam satu kumpulan, ada lima kumpulan dan ada lima belas bola dalam gambar (menunjukkan gambar rajah yang diberi).
P: Kenapa lima belas?
S: Sebab ada lima belas bola.
P: Yang ini (menunjukkan tiga pada ayat pertama)?
S: Tiga bola dalam setiap kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan tiga pada ayat kedua)?

S: Sama. Tiga bola dalam semua kumpulan.
P: Jadi tiga pada kedua-dua ayat sama ke?
S: Sama.
P: Yang ini (menunjukkan lima pada ayat pertama)?
S: Lima tu sebab ada lima kumpulan.
P: Macam mana dengan lima pada kedua-dua ayat? Sama atau tidak?
S: Sama.
P: Tapi, Syahirah tulis di kedudukan yang lain pada kedua-dua ayat?
S: Ya, tapi dua-dua ayat untuk lima kumpulan bola dalam gambar.
P: Ada tak yang tak sama pada kedua-dua ayat tadi?
S: Lima di ayat ini (menunjukkan ayat 15 ÷ 5 = 3) bahagi lima, lima di ayat ini jawapan dia (menunjukkan ayat 15 ÷ 3 = 5). Tiga di ayat ini (menunjukkan ayat 15 ÷ 5 = 3) jawapan, tiga di ayat ini bahagi tiga (menunjukkan ayat 15 ÷ 3 = 5).
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Yang sama antara kedua-dua ayat tu ada tak?
S: Lima belas.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.

Petikan PW525

P: Sekarang, cuba Syahirah lihat gambar ni (menunjukkan gambar enam belas ekor kura-kura). Boleh buat ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$16 \div 4 = 4$$

P: Cuba baca?
S: Enam belas bahagi empat sama dengan empat.
P: Empat ni (menunjukkan empat selepas simbol bahagi) merujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Empat kumpulan atau empat kura-kura pun boleh.
P: Macam mana dengan yang ni (menunjukkan empat selepas simbol '=')?
S: Sama, empat kumpulan atau empat kura-kura.
P: Boleh buat ayat bahagi lain?
S: Ayat dia sama macam tadi.
P: Kenapa sama?

S: Sebab kumpulan ada empat, kura-kura pun ada empat. Jadi ayat dia sama.
P: Yang ini (menunjukkan enam belas pada ayat bahagi) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: Enam belas kura-kura.

Syahirah mewakilkan gambar rajah yang diberi dengan menulis ayat bahagi 15 ÷ 5 = 3 dan 15 ÷ 3 = 5 kerana menurutnya kedua-dua ayat boleh merujuk gambar rajah yang sama. Selain itu, subjek juga menyamakan lima belas pada ayat bahagi dengan kesemua bola yang terdapat pada gambar rajah, tiga pada kedua-dua ayat bahagi merujuk saiz setiap kumpulan dan lima pula merujuk bilangan kumpulan.

Dalam Petikan PW525 pula, Syahirah mewakilkan gambar rajah yang mempunyai enam belas kura-kura dengan menulis ayat bahagi 16 ÷ 4 = 4 . Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua pembahagi dan hasil bahagi yang terdapat pada ayat bahagi tersebut adalah sama kerana gambar rajah yang diberi mempunyai saiz dan bilangan kumpulan yang sama.

Gambar Rajah Selanjar

Syahirah mewakilkan gambar rajah selanjar yang mempunyai dua puluh satu jalur dengan menulis ayat bahagi 21 ÷ 3 = 7 dan 21 ÷ 7 = 3. Syahirah juga menjelaskan perkaitan antara gambar

rajah dengan ayat-ayat bahagi yang ditulisnya. Sedutan Petikan PW526 yang berikut memamaparkan cara subjek mewakilkan gambar rajah selanjar.

Petikan PW526

P: Cuba tengok gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah selanjar dua puluh satu jalur). Boleh Syahirah buat ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$21 \div 7 = 3$$

$$21 \div 3 = 7$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh satu bahagi tujuh sama dengan tiga, dua puluh satu bahagi tiga sama dengan tujuh.
P: Ada dua ayat. Sama tak kedua-dua ayat tu?
S: Sama.
P: Kenapa sama?
S: Sebab dua ayat tu untuk gambar ini (menunjukkan gambar rajah).
P: Kedua-dua ayat ada nombor dua puluh satu, kenapa dua puluh satu?
S: Sebab ada dua puluh satu garis.
P: Ada berapa kumpulan dalam gambar rajah?
S: Tiga.
P: Kumpulan tu rujuk pada apa dalam ayat bahagi?
S: Jawapan (menunjukkan tiga pada ayat bahagi pertama) dan bahagi tiga (menunjukkan tiga pada ayat bahagi kedua). Dua-dua pun boleh.
P: Satu kumpulan ada berapa garis?
S: Tujuh.
P: Garis-garis tu rujuk pada apa dalam ayat bahagi?
S: Garis-garis tu sama dengan bahagi tujuh di sini (menunjukkan tujuh di ayat pertama) dan jawapan di sini (menunjukkan tujuh di ayat kedua).
P: Sama atau tidak kedua-dua tujuh tu?
S: Sama.
P: Syahirah ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: …Tak ada.

Syahirah menulis ayat bahagi 21 ÷ 3 = 7 dan 21 ÷ 7 = 3 bagi mewakili gambar rajah selanjar yang mempunyai tiga bahagian bersaiz tujuh. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi yang ditulisnya adalah sama kerana merujuk gambar rajah yang sama. Selain itu, Syahirah menyamakan kesemua jalur yang terdapat pada gambar rajah dengan nombor dua puluh satu yang terdapat pada ayat bahagi 21 ÷ 3 = 7 dan 21 ÷ 7 = 3. Subjek juga menyamakan tujuh jalur yang terdapat dalam satu kumpulan dengan angka tujuh yang terdapat pada kedua-dua ayat bahagi. Syahirah juga menyamakan angka tiga yang terdapat pada kedua-dua ayat bahagi dengan tiga kumpulan yang terdapat pada gambar rajah.

Penolakan Berulang

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Syahirah menunjukkan perkaitan antara ayat bahagi dengan penolakan dengan mengeluarkan sebanyak lima objek daripada dua puluh objek sebanyak empat kali. Subjek juga menunjukkan pembahagian 20 ÷ 5 dengan membentuk sebanyak empat kumpulan yang bersaiz lima. Sedutan Petikan PW527 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi tanpa baki.

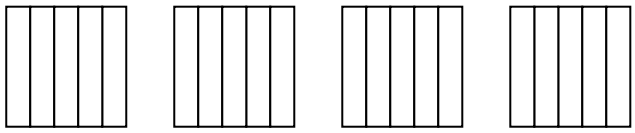
Petikan PW527

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5). Cuba baca apa yang tertulis pada kad ini?

S: Dua puluh bahagi lima.

P: Boleh Syahirah tunjuk dengan penyedut minuman ini (menunjukkan sekotak penyedut minuman) macam mana dua puluh bahagi lima?

S: (Subjek menyusun penyedut minuman yang diberi seperti berikut):



P: Ada berapa di sini (menunjukkan satu kumpulan yang terdapat pada susunan yang dibentuk oleh subjek)?

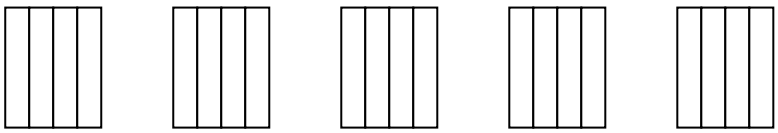
S: Lima.

P: Kenapa Syahirah kumpulkan lima?

S: Sebab kena bahagi lima (subjek menunjukkan angka lima pada kad). Kalau lima kumpulan pun boleh juga.

P: Lima kumpulan? Boleh tunjuk?

S: (Subjek menyusun semula susunannya seperti berikut):



P: Yang ini dua puluh bahagi berapa?

S: Dua puluh bahagi lima. Kalau dua puluh bahagi empat pun boleh.

P: Dua puluh bahagi empat? Boleh jelaskan?

S: Semua ada dua puluh, sini ada empat (menunjukkan satu kumpulan), jadi dua puluh bahagi empat.

P: Baik, boleh jelaskan untuk ayat ini (menunjukkan ayat 20 ÷ 5)?

S: Semua ada dua puluh, kumpulan ada lima, jadi dua puluh bahagi lima.

P: Susunan yang tadi boleh tak wakili dua puluh bahagi empat?

S: Boleh.

P: Boleh jelaskan untuk susunan tadi?

S: (Subjek menyusun semula dengan membentuk empat kumpulan bersaiz lima). Dua puluh bahagi lima (menunjukkan satu kumpulan).

P: Baik, yang mana menunjukkan jawapan kepada ayat bahagi tadi?

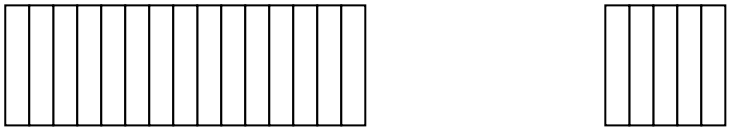
S: Dua puluh bahagi lima sama dengan empat (menunjukkan empat kumpulan).

P: Baik, sekarang cuba Syahirah baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5)?

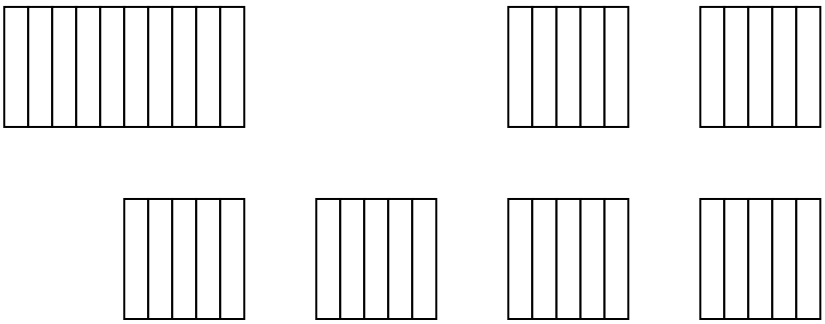
S: Dua puluh tolak lima.

P: Baik boleh Syahirah tunjuk menggunakan penyedut minuman? Gunakan penyedut minuman yang lain ya.

S: (Subjek menyusun dua puluh penyedut minuman dan kemudian mengeluarkan lima daripadanya seperti berikut):



P: Boleh jelaskan apa yang Syahirah buat?
S: Dua puluh penyedut minuman tolak lima.
P: Baik, boleh Syahirah tolak lima lagi secara berulang-ulang sampai habis?
S: (Subjek mengeluarkan lima secara berulang-ulang seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Lima
P: Syahirah keluarkan lima penyedut minuman berapa kali?
S: Empat kali.

P: Baik, susunan ini sama tak dengan susunan untuk dua puluh bahagi lima tadi?
S: Sama.
P: Apa kaitan dua puluh bahagi lima dengan dua puluh tolak lima?
S: Sama. Dua puluh tolak lima sama dengan dua puluh bahagi lima.
P: Dua puluh tolak lima berapa kali?
S: Empat kali.
P: Apa lagi yang sama antara ayat bahagi dengan ayat tolak?
S: Kumpulan ada empat.
P: Ada lagi tak yang sama?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW527, Syahirah mewakilkan 20 ÷ 5 dengan membentuk empat kumpulan bersaiz lima dan lima kumpulan bersaiz empat. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua susunan boleh mewakili ayat 20 ÷ 5 dan 20 ÷ 4. Bagi ayat 20 – 5 pula Syahirah mengeluarkan lima daripada dua puluh penyedut minuman secara berulang-ulang sehingga kesemua penyedut minuman dikeluarkan. Subjek juga berpendapat bahawa penolakan secara berulang adalah sama dengan pembahagian kerana memperoleh bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang sama.

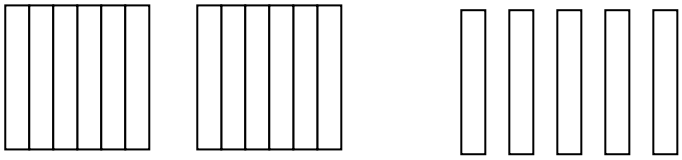
Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Syahirah mewakilkan ayat bahagi 17 ÷ 6 dengan membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima. Syahirah juga mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang daripada dua puluh bagi mewakili ayat bahagi tersebut. Selain itu, subjek juga membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan satu

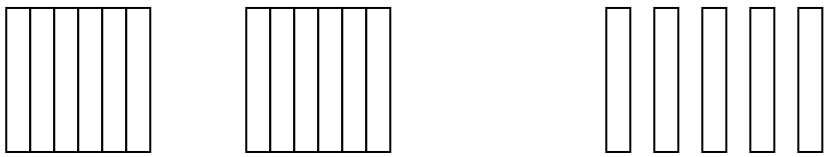
kumpulan bersaiz lima bagi mewakili pembahagian 17 ÷ 6. Petikan PW528 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW528

P: Cuba Syahirah baca (menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6)?
S: Tujuh belas bahagi enam.
P: Boleh tunjuk ayat tu macam tadi?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):

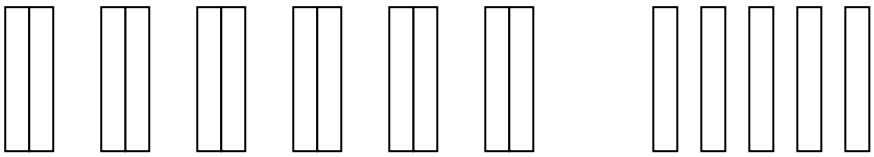


P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua kumpulan ada enam penyedut minuman, dan lima baki (menunjukkan lima penyedut minuman yang diletakkan berasingan).
P: Jawapannya apa?
S: Dua baki lima.
P: Sekarang, cuba baca yang ini (menunjukkan ayat 17 − 6)?
S: Tujuh belas tolak enam.
P: Boleh tunjuk ayat tadi dengan penyedut minuman yang lain?
S: (Subjek mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang dan mengumpulkannya secara berasingan):

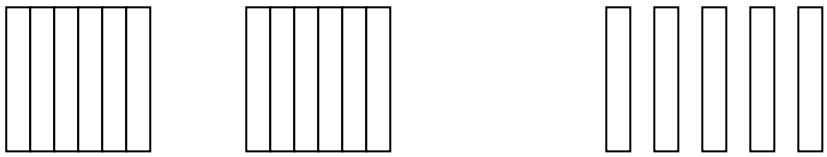


P: Dah siap?
S: Dah.
P: Syahirah tolak berapa?
S: Enam.
P: Berapa kali Syahirah keluarkan enam?
S: Dua kali, yang ini baki (menunjukkan lima penyedut minuman yang diasingkan).
P: Kenapa Syahirah kata itu baki?

S: Sebab ada lima saja.
P: Kumpulan lain ada berapa?
S: Kumpulan lain ada enam.
P: Apa kaitan susunan untuk bahagi dengan tolak?
S: Sama.
P: Jadi apa kaitan bahagi dengan darab?
S: Ayat bahagi sama dengan ayat tolak enam dua kali.
P: Syahirah ada cara lain nak tunjuk ayat bahagi tadi?
S: Cara cerita?
P: Ok, cara cerita.
S: (Subjek mengangguk dan menyusun seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Enam.
P: Kenapa buat enam kumpulan?
S: Sebab tujuh belas bahagi enam.
P: Jawapannya?
S: Dua baki lima.
P: Yang mana baki?
S: Yang ini (menunjukkan lima penyedut minuman).
P: Ada cara lain nak tunjuk tujuh belas bahagi enam?
S: …Cara tolak.
P: Boleh tunjuk cara tolak?
S: (Subjek menunjukkan seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua kumpulan yang ada enam penyedut minuman lima lagi baki.
P: Yang ni sama tak dengan tadi?
S: Susunan tak sama, tapi bahagi enam sama dengan tolak.
P: Tolak berapa?
S: Tolak enam.
P: Berapa kali tolak enam?
S: Dua kali.

Dalam petikan di atas, Syahirah membentuk dua kumpulan bersaiz enam bagi mewakili 17 ÷ 6. Subjek juga menjelaskan bahawa lima penyedut minuman yang tinggal merupakan baki. Subjek juga menunjukkan secara penolakan tujuh belas tolak enam dengan mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang daripada tujuh belas penyedut yang asal. Syahirah juga membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan lima penyedut minuman lagi diasingkan sebagai baki. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa susunan yang beliau bentuk bagi mewakili ayat bahagi 17 ÷ 6 adalah sama dengan susunan yang terhasil apabila enam penyedut dikeluarkan secara berulang sebanyak dua kali.

Selain itu, Syahirah juga menunjukkan satu lagi susunan bagi mewakili tujuh belas bahagi enam iaitu, dengan membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan lima penyedut minuman diasingkan sebagai baki. Bagaimanapun, bagi mewakili ayat tolak subjek membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan lima penyedut minuman sebagai baki. Subjek berpendapat walaupun bentuk susunan tidak sam tetapi ayat bahagi boleh diwakili dengan penolakan secara berulang.

Masalah Berkotak

Menentukan Nama Kotak

Syahirah berpendapat bahawa 'kotak ajaib' dapat membahagi nombor-nombor yang dimasukkan ke dalamnya melalui lubang A dan mengeluarkan jawapan melalui lubang B. Subjek juga menulis ayat bahagi bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Petikan MK531 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Syahirah.

Petikan MK531

P: (Menunjukkan satu kotak). Cuba lihat kotak ini. Bila kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A) satu nombor akan keluar melalui lubang ni (menunjukkan lubang B). Dua nombor masuk di sini (menunjukkan lubang A), akan diproses oleh kotak ni dan kemudian jawapannya akan keluar di sini. (menunjukkan lubang B) Kita masukkan dua nombor. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 14)?

S: Empat belas.

P: Kita masukkan nombor tu di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A). Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 2)?

S: Dua.

P: Nombor ni pun kita masukkan di sini (memasukkan nombor tersebut di A). Boleh ingat tak nombor-nombor tadi?

S: Empat belas dan dua.

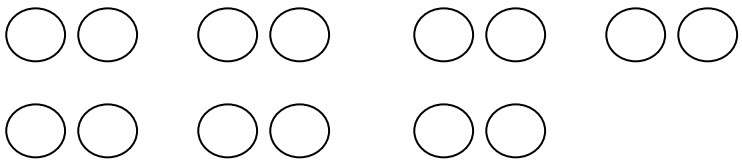
P: Baik. Kita tengok nombor apa yang keluar dari lubang B. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 7)?

S: Tujuh.

P: Apa kotak ini dah buat kepada empat belas dengan dua tadi, sehingga mengeluarkan nombor tujuh?

S: Bahagi

P: Kenapa bahagi?
S: Empat belas bahagi dua dapat tujuh.
P: Bukan tolak ke?
S: Bukan. Kalau tolak jawapan dia dua belas.
P: Baik, kita cuba nombor lain (menunjukkan kad yang tertulis 10). Ini nombor apa?
S: Sepuluh.
P: Kita masukkan nombor sepuluh di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A). Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 5)?
S: Lima.
P: Kita masukkan juga dalam lubang ni macam tadi (memasukkan kad tersebut ke dalam lubang A). Nombor yang keluar dari sini (menunjukkan kad yang keluar dari lubang B).
S: Dua (subjek menjawab sebelum pengkaji mengeluarkan nombor dari lubang B).
P: Apa agaknya kotak ni boleh buat?
S: Bahagi.
P: Kenapa bahagi?
S: Sebab sepuluh bahagi lima dapat dua.
P: Kita cuba satu lagi. Ini apa (menunjukkan nombor 4)?
S: Empat.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Nombor yang keluar (menunjukkan nombor 2).
S: Dua (subjek menjawab sebelum pengkaji menunjukkan nombor).
P: Jadi kotak ni boleh buat apa pada nombor-nombor yang masuk?
S: Bahagi.
P: Baik sekarang boleh Syahirah tunjuk secara lukisan apa kotak ni boleh buat kepada nombor empat belas dan dua hingga dapat jawapan tujuh?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut):



P: Syahirah lukis apa?
S: Bola.
P: Boleh jelaskan apa yang Syahirah lukis?
S: Empat belas bola (menunjukkan keseluruhan gambar) bahagi dua (menunjukkan satu kumpulan) sama dengan tujuh.

P: Dalam gambar ini yang mana merujuk nombor yang keluar dari lubang B?
S: Kumpulan … tujuh.
P: Ada tak cara lain kotak ni boleh bahagi dua?
S: (Subjek menjawab dan melukiskan seperti berikut):

P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Di sini yang mana yang menunjukkan nombor yang keluar melalui B?
S: Tujuh (subjek menunjukkan satu kumpulan)
P: Sekarang boleh tulis ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$14 \div 2 = 7$$

P: Boleh Syahirah baca apa yang Syahirah tulis?
S: Empat belas bahagi dua sama dengan tujuh.
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk nombor yang ini (menunjukkan nombor sepuluh, lima dan dua).
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$10 \div 5 = 2$$

P: Boleh baca?
S: Sepuluh bahagi lima sama dengan dua.

Syahirah berpendapat bahawa operasi yang dilakukan oleh ‘kotak ajaib’ adalah operasi bahagi. Setelah mengenal pasti operasi yang dilakukan oleh kotak, subjek dapat menentukan jawapan yang akan keluar melalui lubang B apabila sepuluh dan lima dimasukkan. Syahirah melukis empat belas biji bola yang dikumpulkan dalam tujuh kumpulan bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak.

Selain itu, subjek juga melukis dua kumpulan bola yang bersaiz tujuh bagi mewakili pembahagian yang sama.

Syahirah juga menulis ayat bahagi, iaitu 14 ÷ 2 = 7 bagi mewakil gambar rajah yang dilukisnya. Subjek juga menjelaskan bahawa nombor yang keluar melalui B merujuk saiz kumpulan dalam gambar rajah yang mempunyai dua kumpulan bersaiz tujuh. Subjek juga menjelaskan bahawa tujuh yang keluar melalui B boleh merujuk bilangan kumpulan dalam lukisannya yang mempunyai tujuh kumpulan bersaiz dua. Selain itu, Syahirah juga menulis ayat bahagi 10 ÷ 5 = 2 bagi mewakili proses di mana sepuluh dan lima memasuki kotak melalui A.

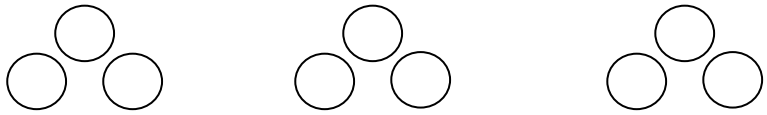
Menentukan Hasil Bahagi

Syahirah menentukan nombor yang keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Subjek juga melukis proses yang berlaku di dalam kotak. Petikan MK532 yang berikut memaparkan tingkah laku Syahirah.

Petikan MK532

P: Syahirah kata kotak ni boleh bahagi, kan? Jadi kita namakan kotak ni 'bahagi'. Sekarang cuba Syahirah masukkan nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis 9). Nombor apa ni?
S: Sembilan.
P: Syahirah masukkan dalam kotak.
S: (Subjek memasukkan kad tersebut ke dalam kotak).
P: Yang ini nombor apa? (menunjukkan kad yang tertulis 3)?

S: Tiga.
P: Boleh Syahirah masukkan juga nombor ni. Baik, nombor apa agaknya yang akan keluar dari kotak ni?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga.
S: Sebab sembilan bahagi tiga dapat tiga.
P: Boleh Syahirah tunjuk cara lukisan apa yang berlaku dalam kotak?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



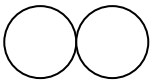
P: Syahirah lukis apa?
S: Sembilan bola bahagi tiga dapat tiga.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Tiga kumpulan tu rujuk pada apa dalam kotak?
S: Jawapan pun boleh, bahagi tiga pun boleh.
P: Satu kumpulan ada berapa bola?
S: Tiga.
P: Tiga ni rujuk pada apa pula dalam kotak?
S: Jawapan dia tiga atau bahagi tiga.
P: Boleh Syahirah tulis ayat bahagi bagi proses dalam kotak tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$9 \div 3 = 3$$

P: Yang ni (menunjukkan tiga selepas simbol bahagi) merujuk apa pada lukisan Syahirah?
S: Tiga bola atau kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan tiga selepas simbol '=')?
S: Sama. Tiga kumpulan atau tiga bola.
P: Ada tak cara lain kotak tu bahagi sembilan?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang kita cuba dengan satu nombor lain. Ini nombor apa (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 1)?
S: Satu.
P: Nombor apa yang akan keluar dari lubang ini (menunjukkan lubang B)?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Dua bahagi satu sama dengan dua.

P: Boleh tunjuk secara lukisan?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Boleh jelaskan?
S: Dua bahagi dua dapat dua.
P: Ada kemungkinan lain tak, apa yang berlaku di dalam kotak?
S: Ada (subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh jelaskan yang ini?
S: Sama dua bahagi satu juga. Cara saja lain.
S: Baik. Kalau dua tadi kita gantikan dengan dua puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua puluh.
P: Kenapa dua puluh?
S: Dua puluh bahagi satu sama dengan dua puluh.
P: Kalau kita ganti dengan dua ratus?
S: Dua ratus.
P: Kenapa?
S: Dua ratus bahagi satu sama dengan dua ratus.
P: Sekarang, kita masukkan nombor ini (menunjukkan nombor 4). Nombor apa ni?
S: Empat
P: Nombor ini (menunjukkan 2)?
S: Dua
P: Kita masukkan ke dalam ni (menunjukkan lubang A), nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Sebab empat bahagi dua sama dengan dua.
P: Boleh tunjuk apa yang berlaku dalam kotak?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Kalau kita gantikan empat dengan empat puluh, nombor apa yang akan keluar?
S: Dua puluh.

P: Mana Syahirah tahu dua puluh?
S: Dua puluh sebab empat puluh bahagi dua sama dengan dua puluh.
S: (Subjek menjawab sambil menulis seperti berikut):

$$\begin{array}{r} 20 \\ 2\,\overline{)\,40} \\ -\ 4 \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

P: Boleh Syahirah tunjuk secara ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$40 \div 2 = 20$$

P: Boleh baca?
S: Empat puluh bahagi dua sama dengan dua puluh.
P: Baik, sekarang kalau empat tadi kita ganti dengan empat ratus nombor apa yang akan keluar?
S: Dua ratus
P: Kenapa dua ratus?
S: Sebab empat ratus bahagi dua sama dengan dua ratus.
P: Boleh Syahirah tulis ayat bahagi untuk yang ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut berikut):

$$400 \div 2 = 200$$

P: Baik, kita cuba dengan nombor lain. Macam mana kalau kita masukkan nombor ini (menunjukkan nombor 8)?
S: Lapan.
P: Dan yang ini (menunjukkan nombor 3)?
S: Tiga.
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: …Tak ada.
P: Tak ada nombor yang akan keluar?
S: (Subjek mengangguk).
P: Kenapa?
S: Sebab lapan tak boleh bahagi tiga, ada baki.
P: Kalau ada baki, tak ada nombor yang akan keluar?
S: Sebab dia bukan satu nombor sahaja, ada baki.
P: Baki berapa?
S: Dua (subjek menjawab sambil menulis yang berikut):

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\,\overline{)\,8} \\ \underline{6} \\ 2 \end{array}$$

P: Jadi tak ada nombor yang akan keluar?
S: Tak ada.

Dalam Petikan MK532 Syahirah menentukan nombor yang akan keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Bagi nombor sembilan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak Syahirah berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah tiga kerana sembilan bahagi tiga sama dengan tiga. Subjek juga menjelaskan proses yang berlaku di dalam kotak secara lukisan, iaitu dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga berpendapat bahawa, angka tiga selepas simbol bahagi dalam ayat bahagi 9 ÷ 3 = 3, merujuk tiga biji bola dalam satu kumpulan ataupun tiga kumpulan. Subjek juga berpendapat angka tiga selepas simbol '=' pada ayat bahagi juga boleh merujuk saiz satu kumpulan adau bilangan kumpulan yang dibentuk.

Selain itu, bagi nombor dua dan satu yang dimasukkan ke dalam kotak subjek berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua. Menurutnya, nombor dua yang dijangka keluar melalui lubang B kerana dua bahagi satu menghasilkan dua. Subjek menunjukkan secara dua lukisan iaitu, dua kumpulan bola yang bersaiz satu dan satu kumpulan yang bersaiz dua. Selain itu subjek juga berpendapat jika nombor dua pada ayat bahagi 2 ÷ 1 diganti dengan nombor dua puluh, nombor yang bakal keluar juga adalah dua puluh. Syahirah juga berpendapat jika nombor dua diganti dengan

nombor dua ratus, maka nombor yang bakal keluar melalui lubang B adalah dua ratus.

Bagi nombor empat dan dua pula, subjek berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua kerana empat bahagi dua adalah sama dengan dua. Subjek juga menunjukkan secara lukisan iaitu, dengan melukis dua kumpulan bola yang bersaiz dua. Selain itu, apabila nombor empat diganti dengan empat puluh Syahirah berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua puluh. Subjek menjelaskan apabila nombor empat diganti dengan empat ratus jawapannya adalah dua ratus. Selain itu, subjek juga menulis ayat bahagi $40 \div 2 = 20$ bagi mewakili proses pembahagian yang berlaku kepada empat puluh dan dua yang memasuki kotak. Syahirah menunjukkan secara pembahagian panjang bagaimana empat puluh bahagi dua menghasilkan dua puluh. Subjek juga menulis ayat bahagi $400 \div 2 = 200$ bagi mewakili proses empat ratus dan dua yang memasuki kotak.

Bagi nombor lapan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak pula, subjek berpendapat bahawa tidak akan ada sebarang nombor yang keluar. Menurut Syahirah, tiada nombor yang akan keluar melalui B kerana nombor jika lapan dibahagi dengan tiga akan menghasilkan baki. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang bagaimana lapan yang dibahagi tiga menghasilkan baki.

Tafsiran Ayat Matematik

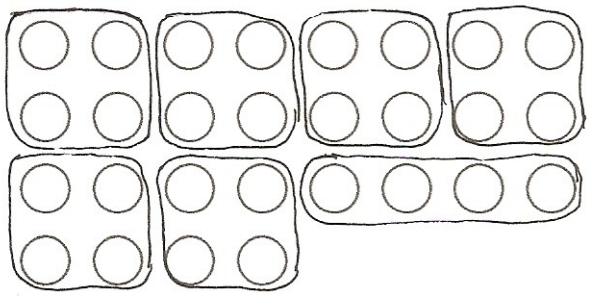
Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Syahirah mentafsirkan ayat bahagi 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan bersaiz empat. Subjek juga melukis empat kumpulan bersaiz tujuh sebagai tafsiran kepada ayat bahagi tersebut. Syahirah juga menulis ayat darab 4 x 7 = 28 bagi mewakili persaman 28 ÷ 4 = 7. Petikan TA541 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh beliau.

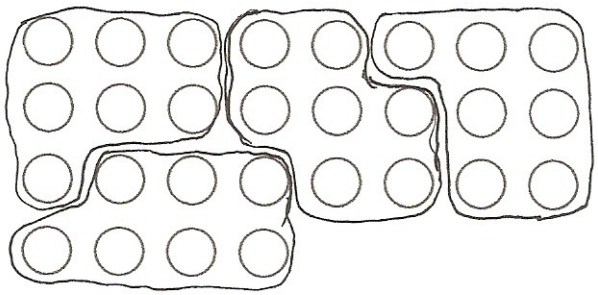
Petikan TA541

P: Cuba Syahirah baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Boleh Syahirah jelaskan macam mana dua puluh lapan bahagi empat. Boleh lukis?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ini apa? Bola?
S: Ya.
P: Boleh jelaskan lukisan Syahirah ni?

S: Dua puluh lapan bahagi empat. Ada empat bola dalam satu kumpulan.
P: Kenapa kumpulkan empat bola?
S: Sebab nak bahagi empat. Buat empat kumpulan pun boleh.
P: Empat kumpulan? Boleh tunjuk?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ini bahagi empat juga ke?
S: Ya, bahagi empat atau bahagi tujuh.
P: Kenapa bahagi tujuh?
S: Sebab satu kumpulan ada tujuh bola.
P: Gambar tadi boleh wakili bahagi tujuh?
S: Boleh.
P: Baik, dua puluh lapan bahagi empat sama dengan berapa?
S: Tujuh.
P: Kenapa tujuh?
P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat 28 ÷ 4) merujuk pada apa pada lukisan Syahirah?
S: Empat bola (menunjukkan lukisan pertama) atau empat kumpulan (menunjukkan lukisan kedua).
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat.
S: Tak ada.
P: Kedua-dua lukisan Syahirah tadi sama tak?
S: Lukisan lain tapi untuk soalan yang sama.
P: Baik, sekarang boleh Syahirah tulis ayat darab daripada ayat bahagi 28 ÷ 4
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 7 = 28$$

P: Kenapa Syahirah menulis seperti ini?
S: Sebab ada empat bola dan ada tujuh kumpulan. Empat kali tujuh sama dengan dua puluh lapan.
P: Tujuh ni (menunjukkan tujuh pada 4 x 7 = 28) rujuk pada apa dalam lukisan Syahirah?

S: Di sini (menunjukkan lukisan pertama) kumpulan, di sini (menunjukkan lukisan kedua) bola (menunjukkan satu kumpulan).
P: Macam mana pula dengan yang ini (menunjukkan empat pada ayat 4 x 7 = 28)
S: Di sini (menunjukkan lukisan pertama) bola, di sini (menunjukkan lukisan kedua) kumpulan.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Ayat ini sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama tapi untuk dua-dua lukisan.
P: Boleh guna untuk dua-dua lukisan?
S: Ya.
P: Kenapa Syahirah kata boleh guna untuk dua-dua lukisan?
S: Sebab yang ini (menunjukkan lukisan pertama) ada tujuh kumpulan satu kumpulan ada empat bola, jumlah dua puluh lapan. Yang ini pun (menunjukkan lukisan kedua) ada empat kumpulan satu kumpulan ada tujuh. Jumlah dua puluh lapan.
P: Apa kaitan bahagi dengan darab?
S: Terbalik. Songsang.
P: Boleh jelaskan?
S: Dua puluh lapan ni (menunjukkan ayat 28 ÷ 4 = 7) jadi jawapan tujuh darab empat. Tujuh ni menunjukkan ayat 7 x 4 = 28) jadi jawapan di sini (menunjukkan ayat 28 ÷ 4 = 7)
P: Sekarang cuba baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Boleh Syahirah jelaskan macam mana dua puluh lapan bahagi tujuh?
S: Semua ada dua puluh lapan, bahagi tujuh kumpulan (menunjukkan lukisan pertamanya)
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan lukisan kedua subjek), boleh tak gunakan untuk mewakili ayat bahagi tadi?
S: Boleh.
P: Sebab apa Syahirah kata boleh?
S: Sebab sini pun ada dua puluh lapan bola, satu kumpulan ada tujuh bola.
P: Boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

$$4 \times 7 = 28$$

P: Ayat-ayat ni sama tak dengan yang tadi?
S: Sama.
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat bahagi ni?
S: Tak ada.

Syahirah mentafsir ayat $28 \div 4$ dengan melukis tujuh kumpulan bersaiz empat. Subjek juga melukis satu lagi gambar rajah yang mempunyai empat kumpulan bersaiz tujuh. Subjek juga berpendapat bahawa walaupun kedua-dua lukisan beliau berbeza, kedua-duanya mewakili ayat bahagi yang sama

Selain itu, Syahirah menulis ayat darab $4 \times 7 = 28$ dan $7 \times 4 = 28$ merujuk lukisannya. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisannya boleh mewakili ayat-ayat darab yang ditulisnya.

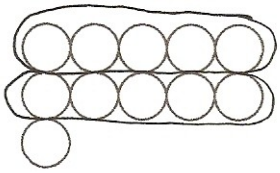
Bagi ayat $28 \div 7$ pula, subjek menjelaskan dengan menggunakan dua lukisan yang beliau lukis bagi mewakili ayat $28 \div 4$. Syahirah juga menjelaskan kaitan dua puluh lapan bahagi tujuh dengan kedua-dua lukisannya. Selain itu, Syahirah juga menulis dua ayat darab bagi ayat bahagi $28 \div 7$. Kedua-dua ayat darab tersebut adalah $4 \times 7 = 28$ dan $7 \times 4 = 28$. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya adalah sama dengan dua ayat darab yang ditulisnya bagi mewakili ayat bahagi $28 \div 4$.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

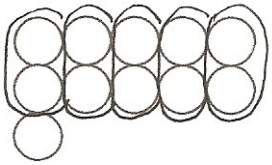
Syahirah mentafsirkan ayat 11 ÷ 2 dengan melukis dua kumpulan bola bersaiz lima dan sebiji bola diasingkan di luar kumpulan. Subjek juga melukis lima kumpulan bersaiz dua sebiji bola diletakkan di luar kumpulan. Petikan TA542 berikut menunjukkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan TA542

P: Cuba baca apa yang tertulis di sini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 2)?.
S: Sebelas bahagi dua.
P: Boleh jelaskan macam mana sebelas bahagi dua? Boleh lukis macam tadi.
S: (Subjek melukis seperti berikut pada kertas):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Kenapa dua kumpulan?
S: Sebab sebelas bahagi dua. Kalau macam ni pun sebelas bahagi dua (subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ini pun sebelas bahagi dua?
S: Ya.
P: Pada kedua-dua lukisan ada satu bola yang tidak dimasukkan dalam kumpulan. Kenapa?

S: Yang tu baki
P: Jadi apa jawapan bagi sebelas bahagi dua?
S: Lima baki satu.
P: Boleh jelaskan macam mana lima baki satu?
S: Di sini ada lima kumpulan (subjek menunjukkan lukisannya yang pertama), sini ada satu (menunjukkan baki). Jadi lima baki satu.
P: Ada cara lain nak tunjuk sebelas bahagi dua?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Syahirah tulis ayat darab bagi ayat bahagi tadi?
S: (Subjek cuba menulis dan kemudian menjawab). Tak boleh sebab ayat bahagi ada baki. Dua darab lima sepuluh bukan sebelas.
P: Baik cuba Syahirah baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 5)?
S: Sebelas bahagi lima.
P: Boleh beritahu cikgu macam mana sebelas bahagi lima tu?
S: (Subjek menggunakan lukisan pertamanya) semua ada sebelas bola bahagi lima (menunjukkan satu kumpulan).
P: Berapa jawapannya?
S: Dua baki satu.
P: Dalam lukisan, yang mana jawapannya?
S: Dua kumpulan (menunjukkan dua kumpulan bersaiz lima) dan baki satu (menunjukkan sebiji bola yang tidak dibulatkan).
P: Macam mana dengan lukisan yang ini (menunjukkan lukisan kedua subjek), boleh ke dikaitkan dengan ayat ini (menunjukkan ayat 11 ÷ 5)?
S: Boleh.
P: Boleh jelaskan kaitan lukisan dengan ayat tadi?
S: Semua ada sebelas bola, bahagi lima kumpulan sama dengan dua baki satu.

Syahirah mentafsir ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan bersaiz dua dan sebiji bola dilukis di luar kumpulan. Syahirah juga melukis dua kumpulan bersaiz lima dan sebiji bola dilukis di luar kumpulan sebagai tafsiran kepada ayat bahagi 11 ÷ 2. Subjek menjelaskan sebiji bola tidak dikumpulkan dalam lukisannya kerana bola tersebut merupakan baki dalam pembahagian 11 ÷ 2.

Subjek berpendapat kedua-dua lukisan yang dilukisnya itu merujuk pada ayat bahagi yang sama walaupun, saiz kumpulan dan bilangan kumpulannya berbeza.

Selain itu, subjek juga menjelaskan bahawa saiz kumpulan yang terdapat dalam lukisan pertamanya merujuk pembahagi, iaitu dua dan bilangan kumpulan dalam lukisan tersebut pula merujuk hasil bahagi. Subjek juga menjelaskan bahawa bilangan kumpulan dalam lukisan keduanya merujuk pembahagi, manakala saiz kumpulan pula merujuk hasil bahagi. Subjek juga berpendapat bahawa jawapan bagi sebelas bahagi dua adalah lima baki satu. Jawapan tersebut adalah bagi kedua-dua lukisan beliau. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa ayat darab tidak dapat ditulis bagi ayat sebelas bahagi dua kerana pembahagian tersebut menghasilkan baki.

Bagi ayat 11 ÷ 5 pula, Syahirah menjelaskan dengan menggunakan kedua-dua lukisan yang dilukisnya bagi ayat sebelas bahagi dua tanpa melukis lukisan yang baru. Subjek menjelaskan bahawa saiz kumpulan dalam lukisan pertamanya merujuk hasil bahagi, manakala bilangan kumpulan pula merujuk pembahagi. Bagi lukisan keduanya pula, Syahirah berpendapat saiz kumpulan merujuk pembahagi dan bilangan kumpulan pula merujuk hasil bahagi. Subjek juga berpendapat jawapan bagi sebelas bahagi lima adalah dua baki satu.

Ayat Bahagi Membabitkan Sifar, Satu, Dan Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Syahirah mentafsir ayat 3 ÷ 0 sebagai sifar. Subjek juga berpendapat bahawa sebarang operasi yang membabitkan sifar akan menghasilkan sifar. Petikan TA543 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan TA543

P: Boleh Syahirah baca apa yang tertulis di sini (menunjukkan kad yang tertulis 0 ÷ 3)?
S: Kosong bahagi tiga.
P: Boleh Syahirah jelaskan macam mana kosong bahagi tiga?
S: Kosong juga sebab kosong tak boleh bahagi tiga.
P: Kosong tak boleh bahagi ke?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Kosong kan tak ada apa-apa, jadi tak boleh bahagi?
P: Cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 3 ÷ 0)?
S: Tiga bahagi kosong.
P: Boleh jelaskan yang ini?
S: Kosong juga sebab apa-apa nombor bahagi dengan kosong jawapannya kosong.
P: Boleh jelaskan cara lukisan?
S: …Tak boleh sebab kosong tu tak ada apa-apa.
P: Kalau macam tu, boleh tulis ayat bahagi tak?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 0 = 0$$

P: Boleh Syahirah baca apa yang Syahirah tulis?
S: Tiga bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Boleh tulis ayat darab bagi ayat bahagi bagi tiga bahagi kosong?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 0 = 0$$

$$0 \times 3 = 0$$

P: Cuba baca?
S: Tiga kali kosong sama dengan kosong. Kosong darab tiga sama dengan kosong
P: Kenapa tiga darab kosong sama dengan kosong?
S: Sebab … kalau nombor … darab kosong mesti kosong. Kosong kan tak ada nombor
P: Untuk yang ini (menunjukkan ayat $0 \div 3$) boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \div 3 = 0$$

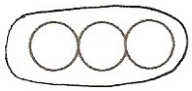
P: Boleh baca?
S: Kosong bahagi tiga sama dengan kosong.
P: Boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \times 3 = 0$$

P: Cuba baca?
S: Kosong darab tiga sama dengan kosong.
P: Ada cara lain tulis ayat darab untuk yang ini (menunjukkan ayat bahagi $0 \div 3$)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 0 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Tiga kali kosong sama dengan kosong.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni kosong darab tiga (menunjukkan ayat $0 \times 3 = 0$) yang ni tiga darab kosong (menunjukkan $3 \times 0 = 0$). Tapi, jawapan dia sama.
P: Sekarang, cuba yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat $3 \div 3$)?
S: Tiga bahagi tiga.
P: Yang ini boleh lukis?
S: Boleh. (Subjek menjawab sambil melukis yang berikut):



P: Ada berapa kumpulan dalam lukisan tu?
S: Satu.
P: Boleh jelaskan dalam lukisan tu macam tiga bahagi tiga?

S: Ini (menunjukkan lukisan) tiga bola, bahagi tiga.
P: Berapa jawapannya?
S: Satu.
P: Dalam lukisan yang mana jawapannya?
S: Yang ini (menunjukkan lukisan) satu kumpulan.
P: Sekarang, boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \div 3 = 1$$

P: Ada tak cara lain nak tunjuk tiga bahagi tiga?
S: Macam ni (subjek melukis seperti berikut):

P: Di sini ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Yang ini sama tak dengan tadi?
S: Sama. Ini pun tiga bahagi tiga.
P: Boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 1 = 3$$

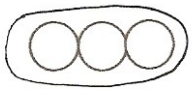
P: Boleh baca?
S: Tiga darab satu sama dengan tiga.
P: Ada cara lain untuk tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$1 \times 3 = 3$$

P: Bacakan?
S: Satu darab tiga sama dengan tiga.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama, tapi untuk gambar sama.
P: Boleh Syahirah baca yang ini? (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 1$).
S: Tiga bahagi satu.
P: Berapa jawapannya?
S: Tiga.
P: Boleh jelaskan macam mana tiga bahagi satu?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

P: Ada cara lain?

S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Dua-dua lukisan ini sama tak?
S: Lukisan lain tapi untuk tiga bahagi satu.
P: Yang mana menunjukkan jawapan untuk tiga bahagi satu dalam lukisan?
S: Tiga bola (menunjukkan kedua-dua lukisannya)
P: Boleh tulis ayat darab bagi yang ini (menunjukkan ayat $3 \div 1$)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$3 \times 1 = 3$$

$$1 \times 3 = 3$$

P: Boleh baca?
S: Tiga darab satu sama dengan tiga, satu darab tiga sama dengan tiga.
P: Sama tak kedua-dua ayat tu?
S: Tak sama tapi dua-dua pun untuk tiga bahagi satu.

Syahirah mentafsir ayat $0 \div 3$ sebagai sifar. Subjek berpendapat bahawa sekiranya sifar dibahagi dengan sebarang nombor akan menghasilkan jawapan sifar. Bagi ayat $3 \div 0$ pula, Syahirah berpendapat bahawa jawapannya juga adalah sifar. Subjek juga menjelaskan sebarang operasi matematik membabitkan sifar akan menghasilkan sifar.

Selain itu, subjek menulis ayat darab $3 \times 0 = 0$ dan $0 \times 3 = 0$ sebagai tafsiran bagi ayat $3 \div 0$. Bagi ayat $0 \div 3$ juga, Syahirah menulis ayat $0 \times 3 = 0$ dan $3 \times 0 = 0$. Selain itu, subjek melukis tiga bola yang dikumpulkan dalam satu kumpulan dan tiga

bola yang dikumpulkan berasingan sebagai tafsiran bagi ayat bahagi 3 ÷ 3.

Syahirah juga melukis tiga biji bola yang dikumpulkan dalam satu kumpulan bagi ayat 3 ÷ 1. Subjek juga melukis tiga bola yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan yang berasingan sebagai satu lagi tafsiran bagi ayat tersebut. Selain itu, subjek juga menulis ayat darab 3 x 1 = 3 dan 1 x 3 = 3 sebagai tafsiran bagi ayat 3 ÷ 1.

Ayat Darab

Syahirah mentafsir ayat darab 4 x 2 dengan menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2. Subjek juga melukis dua kumpulan bersaiz empat dan empat kumpulan bersaiz dua sebagai tafsiran bagi ayat 4 x 2. Petikan TA554 yang berikut memaparkan tingkah laku subjek.

Petikan TA554

P: Boleh Syahirah baca (menunjukkan kad yang tertulis 4 x 2)?
S: Empat darab dua.
P: Empat darab dua sama dengan?
S: Lapan.
P: Boleh tulis ayat darab tadi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

4 x 2 = 8

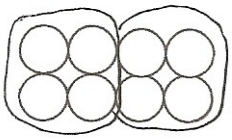
P: Cuba baca?
S: Empat darab dua sama dengan lapan.
P: Boleh buat ayat bahagi untuk ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 2 = 4$$

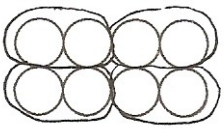
P: Boleh Syahirah baca?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Ada ayat lain?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut):

$$8 \div 4 = 2$$

P: Baik, kenapa tulis seperti tu? Kenapa tidak empat bahagi lapan?
S: Empat tak boleh bahagi lapan. Kalau lapan boleh bahagi empat dan bahagi dua.
P: Sama tak dua-dua ayat tu?
S: Tak sama, tapi dua-dua untuk empat darab dua.
P: Apa kaitan ayat bahagi tadi dengan ayat darab yang Syahirah tulis?
S: Darab kalau terbalikkan ayat dia jadi bahagi.
P: Terbalik macam mana? Boleh jelaskan?
S: Ayat darab empat darab dua sama dengan lapan, kalau terbalikkan lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Empat pada ayat ini (menunjukkan ayat 4 x 2 = 8) sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: Empat tu sama dengan bahagi empat dan jawapan empat (subjek menunjukkan empat pada ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2 dan 8 ÷ 4 = 2).
P: Baik, sekarang boleh tunjuk secara lukisan bagi lapan bahagi empat?
S: (Subjek melukis gambar rajah berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Ada cara lain tak?
S: Ada (subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ni berapa kumpulan?
S: Empat
P: Kedua-dua lukisan tu sama tak?

S: Tak sam, tapi boleh guna untuk ayat ini (menunjukkan ayat 4 x 2), ayat ini (menunjukkan ayat 8 ÷ 4 = 2) dan ayat ini (menunjukkan 8 ÷ 4 = 2).
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Sekarang, cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 2 x 4)?
S: Dua darab empat.
P: Dua darab empat sama dengan?
S: Lapan.
P: Boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

2 x 4 = 8

P: Baik, sekarang boleh tulis ayat bahagi untuk ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

8 ÷ 2 = 4

8 ÷ 4 = 2

P: Boleh baca.
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat, lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Syahirah tulis dua ayat. Sama tak dua-dua ayat tu?
S: Ayat tak sama tapi untuk ayat dua darab empat.
P: Ayat ini (menunjukkan 8 ÷ 4 = 2) sama tak dengan ayat (menunjukkan ayat 8 ÷ 4 = 2 yang ditulis bagi 4 x 2) yang Syahirah tulis untuk empat darab dua tadi?
S: Sama.
P: Kenapa Syahirah rasa sama?
S: Sama sebab dua-dua pun lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Ayat darab tak sama kan?
S: …Dua ayat pun sama dengan lapan. Jadi sama.
P: Yang ni (menunjukkan empat pada ayat 2 x 4) sama dengan apa pada ayat yang Syahirah tulis tu? 8 ÷ 4 = 2) sama dengan yang mana pada ayat darab?
S: Empat ni (subjek menunjukkan empat pada ayat 8 ÷ 4 = 2 dan 8 ÷ 4 = 2)
P: Boleh jelaskan guna lukisan untuk ayat ni (menunjukkan ayat 2 x 4)?
S: (Subjek menggunakan lukisan yang dibuat untuk empat darab dua) Dua darab empat sama dengan lapan.
P: Lukisan ni (menunjukkan lukisan kedua untuk 4 x 2)?
S: Dua darab empat sama dengan lapan.
P: Ada cara lain untuk wakilkan ayat 2 x 4?

S: …Tak ada.

Syahirah menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2 dan 8 ÷ 2 = 4 sebagai tafsiran bagi ayat darab 4 x 2. Subjek juga membentuk dua lukisan iaitu, dua kumpulan bersaiz empat dan empat kumpulan bersaiz dua bagi mewakili ayat 4 x 2. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa empat yang terdapat pada ayat darab 4 x 2 adalah sama dengan empat yang terdapat pada ayat 8 ÷ 4 = 2 dan 8 ÷ 2 = 4. Subjek juga menjelaskan walaupun, kedua-dua ayat bahagi yang ditulis bagi ayat darab 4 x 2 adalah berbeza, namun kedua-duanya merujuk ayat darab yang sama. Selain itu, Syahirah berpendapat bahawa ayat bahagi adalah songsangan bagi ayat darab.

Bagi ayat 2 x 4 pula, Syahirah mentafsirnya dengan menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2 dan 8 ÷ 2 = 4. Subjek juga melengkapkan ayat 2 x 4 sebagai 2 x 4 = 8. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi yang ditulisnya itu walaupun berbeza tetapi merujuk ayat darab yang sama. Subjek juga menjelaskan ayat darab 2 x 4 dengan menggunakan lukisan yang dilukis bagi ayat darab 4 x 2. Syahirah juga berpendapat ayat bahagi yang ditulis untuk 4 x 2 adalah sama dengan ayat bahagi yang ditulis untuk ayat 2 x 4 kerana kedua-dua ayat darab menghasilkan jawapan lapan.

Petikan TA555

P: Sekarang, cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 6 x 4) ?

S: Enam darab empat.
P: Enam darab empat sama dengan berapa?
S: Dua puluh empat.
P: Macam mana tahu dua puluh empat?
S: Enam darab empat sama dengan dua puluh empat (subjek menulis seperti berikut sambil menjawab):

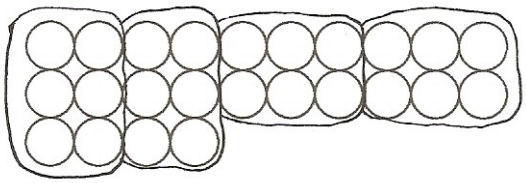
$$6 \times 4 = 24$$

P: Baik, sekarang boleh Syahirah tulis ayat bahagi untuk ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

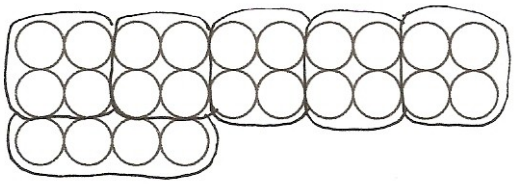
$$24 \div 6 = 4$$

$$24 \div 4 = 6$$

P: Cuba baca?
S: Dua puluh empat bahagi enam sama dengan empat, dua puluh empat bahagi empat sama dengan enam.
P: Sama tak kedua-dua ayat?
S: Tak sama sebab ini bahagi enam, yang ni bahagi empat. Tapi untuk dua-dua untuk enam darab empat.
P: Sekarang boleh Syahirah tunjuk enam darab empat secara lukisan?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Kenapa kumpulkan empat?
S: Sebab enam darab empat. Kalau enam kumpulan pun sama juga.
P: Sama macam mana, boleh tunjuk?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ni ada berapa kumpulan?
S: Enam.
P: Tadi, Syahirah kata sama. Sama macam mana?
S: Yang ini pun enam darab empat (subjek menunjukkan lukisannya)
P: Boleh tak tulis ayat darab lain untuk lukisan tu?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut):

$$4 \times 6 = 24$$

P: Ayat ni sama tak dengan tadi?
S: Tak sama. Tapi, dua-dua gambar pun boleh guna untuk empat darab enam. Dua-dua ayat bahagi pun boleh guna.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA555 Syahirah menulis ayat $24 \div 6 = 4$ dan $24 \div 4 = 6$ sebagai tafsiran bagi ayat 6×4. Subjek juga melukis empat kumpulan bersaiz enam dan enam kumpulan bersaiz empat bagi mewakili enam darab empat. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua lukisan dan kedua-dua ayat bahagi merujuk ayat darab yang sama. Selain itu, Syahirah juga menulis ayat darab $4 \times 6 = 24$ bagi mewakili kedua-dua lukisan yang dibuatnya.

Petikan TA556

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 9×0) cuba baca yang ini?
S: Sembilan darab kosong.
P: Sembilan darab kosong sama dengan?
S: Kosong.
P: Kenapa kosong?
S: Sebab kalau apa-apa nombor darab dengan kosong jawapanya mesti kosong.
P: Boleh tulis ayat darab dengan lengkap?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut):

$$9 \times 0 = 0$$

P: Sekarang boleh tulis ayat bahagi bagi ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$0 \div 9 = 0$$

P: Ada ayat lain?
S: (Subjek membaca ayat yang ditulis). Sembilan bahagi kosong sama dengan kosong.

$$9 \div 0 = 0$$

P: Ayat ni sama ke dengan ayat tadi?
S: Tak sama tapi untuk sembilan darab kosong.
P: Ada cara lain lagi untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Boleh tunjuk secara lukisan?
S: …Tak boleh sebab kosong tu tak ada nombor.

Dalam Petikan TA556, Syahirah menulis ayat $9 \div 0 = 0$ dan ayat $0 \div 9 = 0$ sebagai tafsiran bagi ayat darab 9×0. Subjek juga menjelaskan bahawa sebarang nombor jika didarab dengan sifar akan menghasilkan sifar dengan menulis ayat $9 \times 0 = 0$. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa ayat tersebut tidak dapat diwakilkan secara lukisan kerana membabitkan sifar.

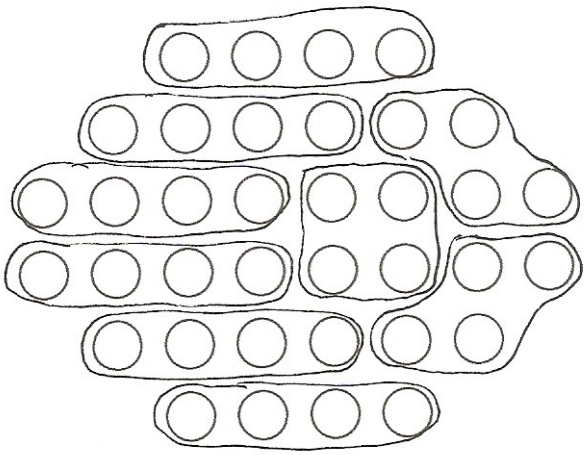
Penyelesaian Masalah

Bentuk diskrit

Syahirah menyelesaikan masalah 36 ÷ 4 dengan membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan kumpulan. Beliau juga membulatkan sembilan guli bagi membentuk empat kumpulan sebagai penyelesaian kepada masalah 36 ÷ 4 tersebut. Petikan PM551 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Syahirah

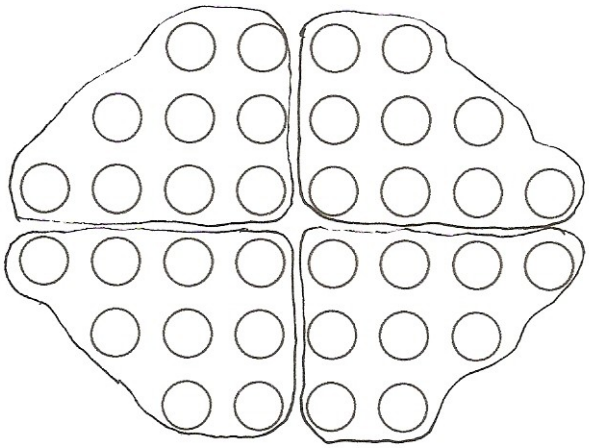
Petikan PM551

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Di sini ada gambar guli. Boleh Syahirah bahagi empat guli-guli ini?
S: (Subjek menghitung guli-guli tersebut dan kemudian membulatkan gambar rajah yang diberi seperti berikut). Dah.



P: Dah siap?
S: Ya.

P: Ada berapa guli dalam gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang diberi)?
S: Tiga puluh enam.
P: Macam mana Syahirah tahu ada tiga puluh enam?
S: (Subjek mengira bulatan-bulatan yang dibuatnya dan menjawab). Sini ada sembilan kumpulan. Satu kumpulan ada empat. Sembilan darab empat, tiga puluh enam.
P: Jadi tiga puluh enam bahagi empat dapat berapa?
S: Sembilan.
P: Macam mana dapat sembilan kumpulan?
S: Sebab satu kumpulan ada empat guli, semua sembilan kumpulan.
P: Kenapa Syahirah kumpulkan empat guli?
S: Sebab nak bahagi empat, buat empat kumpulan pun boleh.
P: Boleh tunjuk buat empat kumpulan (memberikan satu gambar rajah yang lain).
S: (Subjek melukis seperti berikut pada gambar rajah yang diberi):



P: Dah siap?
S: Ya.
P: Ini tiga puluh enam bahagi berapa?
S: Bahagi empat. Bahagi sembilan pun boleh.
P: Bahagi sembilan pun boleh? Gambar ini boleh digunakan untuk wakili tiga puluh enam bahagi sembilan?
S: Boleh.
P: Macam mana dengan gambar tadi? Boleh mewakili tiga puluh enam bahagi sembilan juga? (menunjukkan gambar rajah yang telah dilukiskan oleh subjek sebelumnya).
S: Boleh, sebab tiga puluh enam bahagi empat, sembilan. Kalau bahagi sembilan, dapat empat (Subjek menjawab sambil menulis yang berikut pada kertas):

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4\,\overline{)\,36} \\ -\ \underline{36} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4 \\ 9\,\overline{)\,36} \\ -\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

P: Jadi, sama tak kedua-dua gambar rajah tu?
S: Sama … bentuk saja lain.
P: Bentuk mana yang lain?
S: Bentuk-bentuk ni (subjek menjawab sambil menunjukkan kumpulan-kumpulan yang telah dibulatkan).
P: Kalau bentuk-bentuknya berbeza, macam mana dengan guli di dalamnya?
S: Bentuk saja berbeza, guli dalam dia sama.
P: Sekarang, boleh tak Syahirah tulis ayat bahagi untuk kedua-dua gambar rajah tadi?
S: Macam ni ke (subjek menulis ayat di bawah pada kertas yang diberi)?

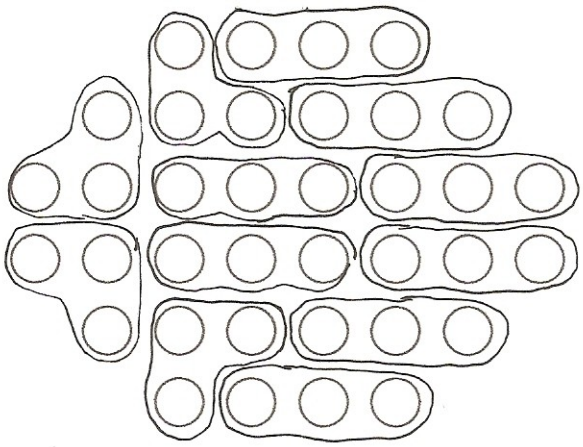
$$36 \div 4 = 9$$

P: Ya.
S: (Subjek menulis dua persamaan berikut pada kedua-dua kertas gambar rajah).

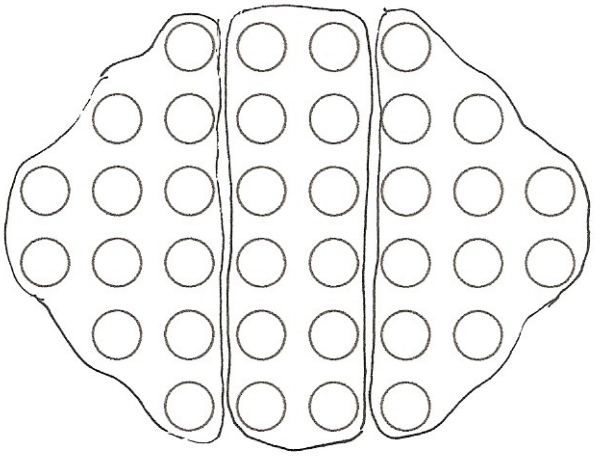
$$36 \div 4 = 9$$

$$36 \div 9 = 4$$

P: Boleh beritahu cikgu apa yang Syahirah tulis tu?
S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan. Tiga puluh enam bahagi sembilan sama dengan empat.
P: Kedua-dua ayat tu sama tak?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ni (menunjukkan angka empat pada persamaan pertama) bahagi empat, yang ni (menunjukkan angka sembilan pada persamaan kedua) bahagi sembilan. Jawapannya (menunjukkan kedua-dua jawapan persamaan pertama dan kedua) yang ini sembilan, yang ini empat
P: Ada cara lain tak nak bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh tak Syahirah bahagi tiga guli-guli ni (memberikan satu gambar rajah lain yang mengandungi tiga puluh enam guli)?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada gambar rajah yang di beri):



P: Dah siap?
S: (Subjek mengangguk).
P: Syahirah bulatkan tiga guli di sini. Kenapa agaknya?
S: Sebab nak bahagi tiga, bulatkan dua belas pun boleh.
P: Kenapa dua belas?
S: Sebab tiga puluh enam bahagi tiga sama dengan dua belas.
P: Boleh Syahirah tunjuk macam mana bulatkan dua belas tu?
S: Boleh. (Subjek melukis seperti berikut):



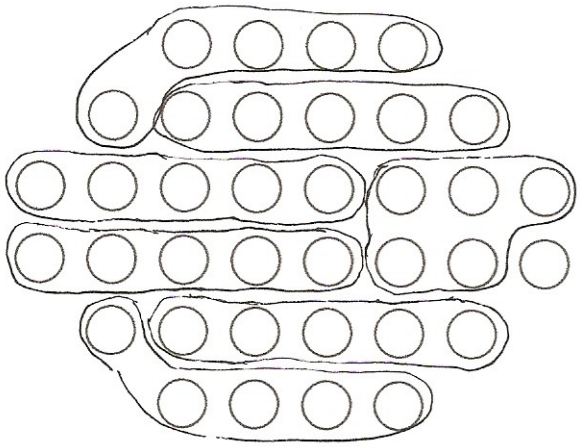
P: Tadi, Syahirah kumpulkan empat guli (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 4), yang ni tiga guli (menunjukkan gambar rajah 36 ÷ 3). Sama tak kedua-duanya?
S: Tak.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ni bahagi empat atau sembilan (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan bersaiz empat.), yang ni bahagi tiga atau dua belas (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan tiga-tiga).

P: Boleh tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang bari ditanda)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

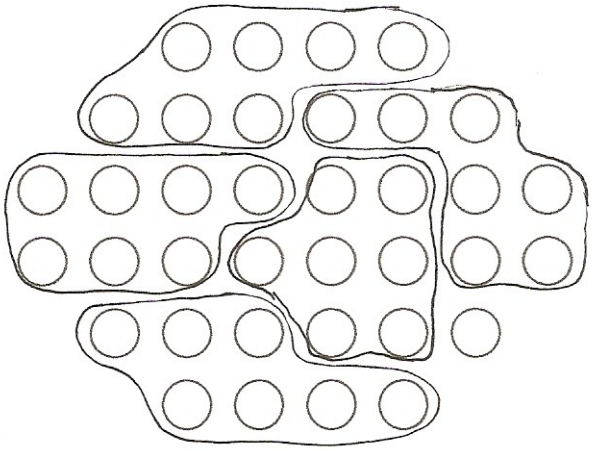
$$36 \div 3 = 12$$

$$36 \div 12 = 3$$

P: Sama tak kedua-dua ayat yang Syahirah tulis ni?
S: Tak sama. Yang ini bahagi tiga (menunjukkan ayat yang pertama). Yang ini bahagi dua belas (menunjukkan ayat yang kedua)
P: Kedua-dua ayat ni dengan ayat tadi (menunjukkan ayat yang ditulis untuk bahagi empat)?
S: Tak sama. Yang ni untuk bahagi tiga atau dua belas. Tadi tu, bahagi empat atau sembilan.
P: Ada cara lain tak nak bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh tak Syahirah bahagi lima?
S: (Subjek membulatkan seperti berikut):



P: Di sini ada satu (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan)?
S: Guli lebih satu.
P: Lebih macam mana?
S: Yang tu baki. Tiga puluh enam bahagi lima sama dengan tujuh baki satu.
P: Tiga puluh enam boleh tak bahagi lima?
S: Boleh.
P: Ada cara lain tak untuk bahagi lima?
S: Ada. (Subjek menanda seperti berikut):



P: Ada berapa guli dalam bulatan tu?
S: Tujuh
P: Sama tak dengan gambar rajah tadi?
S: Tak sama. Yang ni ada tujuh guli dalam satu kumpulan. Yang tadi ada lima guli dalam satu kumpulan. Tapi baki sama.
P: Sekarang boleh Syahirah tuliskan ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menuliskan seperti berikut):

$$36 \div 5 = 7 \text{ baki } 1$$

P: Ayat ni untuk gambar rajah mana?
S: Dua-dua pun boleh
P: Ada ayat lain bagi mewakili gambar rajah tu?
S: Ada. (Subjek menulis seperti berikut):

$$36 \div 7 = 5 \text{ baki } 1$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi (menunjukksn ayat $36 \div 5 = 7$ baki 1)?
S: Tak sama, tapi boleh tulis untuk gambar rajah yang sama.
P: Ada tak cara lain nak tunjuk bahagi lima?
S: Tak ada.

Syahirah menyelesaikan $36 \div 4$ dengan membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan kumpulan. Subjek menentukan jumlah guli yang terdapat pada gambar rajah dengan menggunakan kaedah pendaraban. Menurut subjek, jumlah guli adalah tiga puluh enam

kerana beliau dapat membentuk sembilan kumpulan bersaiz empat pada gambar rajah yang diberi. Subjek juga berpendapat bahawa saiz kumpulan boleh mewakili pembahagi atau hasil bahagi. Subjek juga membentuk empat kumpulan bersaiz sembilan bagi menyelesaikan masalah bahagi empat.

Selain itu, Syahirah juga menunjukkan secara pembahagian panjang bagaimana tiga puluh enam bahagi empat menghasilkan sembilan dan sebaliknya. Subjek juga berpendapat bahawa gambar berkumpulan empat yang ditandanya tidak sama dengan gambar berkumpulan sembilan, tetapi kedua-dua gambar tersebut boleh merujuk sebagai penyelesaian bagi bahagi empat atau bahagi sembilan. Subjek juga menulis ayat bahagi $36 \div 4 = 9$ dan $36 \div 9 = 4$ bagi mewakili kedua-dua gambar rajah yang ditanda oleh beliau bagi bahagi empat dan bahagi sembilan.

Bagi bahagi tiga pula subjek menanda dua belas kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga berpendapat gambar rajah tersebut tidak sama dengan gambar rajah yang ditanda bagi bahagi empat kerana pembahaginya adalah berbeza. Subjek juga membentuk tiga kumpulan bersaiz dua belas sebagai satu lagi penyelesaian bagi bahagi tiga. Syahirah juga berpendapat kedua-dua gambar rajah walaupun berbeza merujuk kepada soalan yang sama iaitu bahagi tiga. Selain iru subjek juga menulis ayat $36 \div 3 = 12$ dan $36 \div 12 = 3$ bagi mewakili kedua-dua gambar rajah yang ditanda oleh beliau.

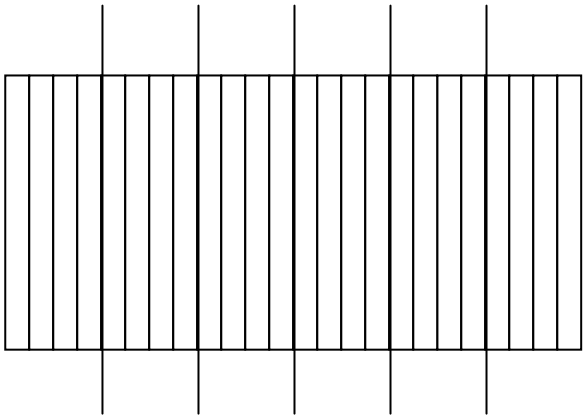
Bagi menyelesaikan bahagi lima pula, subjek menanda tujuh kumpulan bersaiz lima dan lima kumpulan bersaiz tujuh. Dalam kedua-dua gambar rajah, sebiji guli tidak dibulatkan dan dinamakan sebagai baki. Selain itu, subjek juga menulis ayat bahagi 36 ÷ 5 = 7 baki 1 dan 36 ÷ 7 = 5 baki 1 bagi mewakili gambar rajah yang ditanda bagi bahagi lima dan bahagi tujuh.

Bentuk Selanjar

Syahirah menyelesaikan masalah yang membabitkan gambar rajah berbentuk selanjar dengan membentuk kumpulan-kumpulan bersaiz empat bagi menunjukkan bahagi empat. Subjek juga membentuk kumpulan bersaiz enam bagi mewakili pembahagian yang sama. Petikan PM552 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Syahirah.

Petikan PM552

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai 24 petak). Cuba lihat kad ini. Apa yang terdapat pada kad ini?
S: Ada banyak jalur.
P: Sekarang, cikgu nak Syahirah bahagi empat jalur-jalur tu?
S: (Subjek menghitung kesemua jalur dan membulatkan setiap empat jalur yang terdapat pada gambar rajah dan menjawab). Ada enam kumpulan.

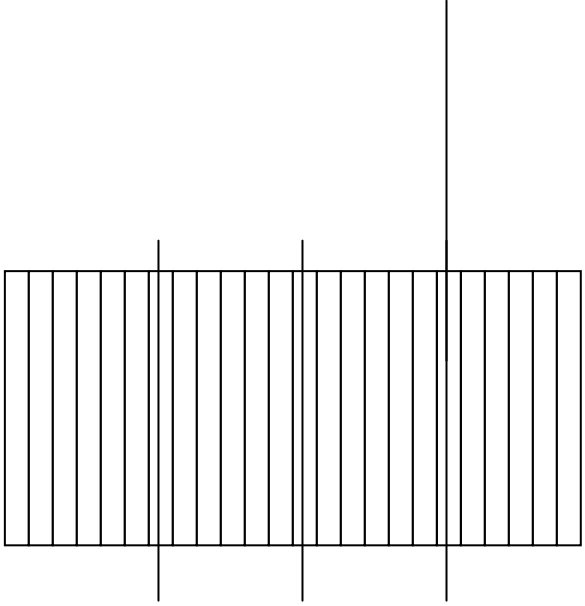


P: Ada enam kumpulan? Pembahagian ni untuk bahagi berapa?
S: Bahagi empat. Bahagi enam pun boleh.
P: Bahagi enam pun boleh? Boleh beritahu cikgu macam mana?
S: Sini ada dua puluh empat. Kalau bahagi empat sama dengan enam, kalau bahagi enam sama dengan empat. (Subjek menjawab sambil menunjukkan gambar rajah yang telah dibulatkan.
P: Boleh Syahirah tuliskan ayat bahagi bagi gambar rajah tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

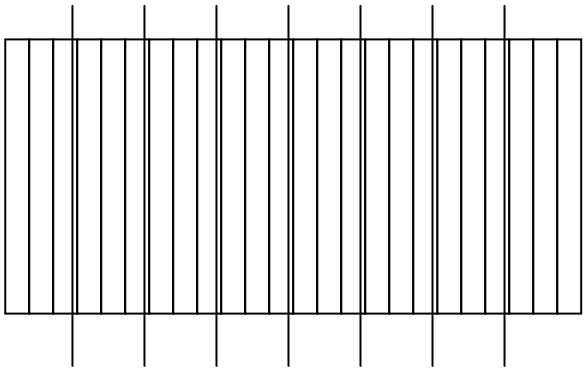
$$24 \div 4 = 6$$

$$24 \div 6 = 4$$

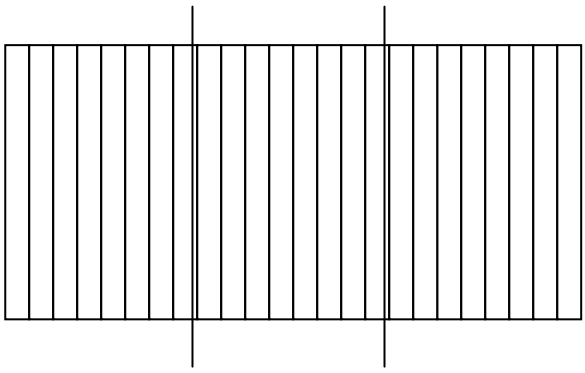
P: Boleh Syahirah jelaskan bagaimana ayat-ayat tu mewakili gambar rajah tadi?
S: (Subjek menunjukkan gambar rajah sambil menjawab) Dua puluh empat ni (menunjukkan 24 pada kedua-dua ayat bahagi) semua guli.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat pertama)?
S: Bahagi empat bila ada empat jalur dalam satu kumpulan, bahagi enam bila ada enam kumpulan. Jawapan empat sebab ada empat jalur.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain tak nak bahagi empat gambar rajah tadi?
S: Ada.
P: Boleh tunjuk di sini (memberikan gambar rajah baru)?
S: (Subjek menandakan seperti berikut):



P: Yang ini mewakili ayat bahagi yang mana?
S: Dua-dua pun boleh.
P: Kenapa Syahirah rasa dua-dua boleh?
S: Yang ni ada empat kumpulan, satu kumpulan ada enam. Jadi dua puluh empat bahagi enam bahagi enam sama dengan empat.
P: Lagi?
S: Dua puluh empat bahagi empat sama dengan enam (subjek menjawab sambil menunjukkan gambar rajah).
P: Ada cara lain nak bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh tunjuk bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Boleh jelaskan pada cikgu apa yang Syahirah buat?
S: Dua puluh empat bahagi tiga sama dengan lapan (subjek menjawab sambil menunjukkan gambar rajah.).
P: Ada cara lain untuk bahagi tiga?
S: Ada (Subjek melukis seperti berikut):



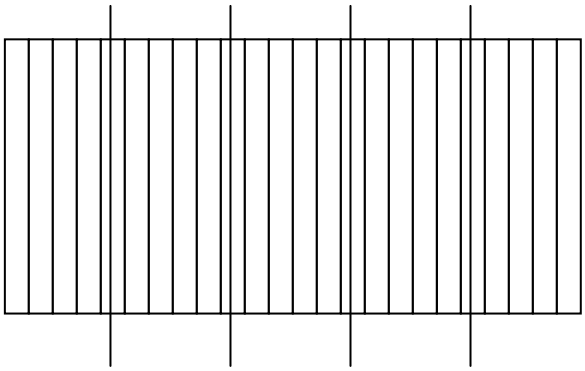
P: Boleh tuliskan ayat bahagi untuk gambar rajah tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 3 = 8$$

P: Ada ayat lain yang boleh ditulis untuk gambar rajah tu?
S: Ada (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 8 = 3$$

P: Ayat ni untuk gambar rajah mana?
S: Dua-dua pun boleh
P: Ada persamaan tak antara kedua-dua gambar rajah?
S: Yang ni tiga kumpulan dan ada lapan jalur (menunjukkan gambar rajah yang baru dilukis). Yang ni ada lapan kumpulan, jalur ada ada (subjek menunjukkan gambar yang dikumpulkan dalam lapan kumpulan)
P: Macam mana dengan ayat? Sama tak kedua-duanya
S: Tak sama. Tapi boleh tulis untuk dua-dua gambar
P: Sekarang boleh Syahirah bahagi lima?
S: (Subjek menandakan seperti berikut):



P: Kenapa Syahirah tak bulatkan jalur-jalur ini (menunjukkan jalur yang tidak dibulatkan)?
S: Yang ni tak cukup lima jalur.
P: Berapa yang tak cukup?

S: Kurang satu.
P: Jadi kalau bahagi lima dapat berapa?
S: Empat baki empat.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$24 \div 5 = 4 \text{ baki } 4$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Tak ada cara lain ke untuk bahagi lima?
S: …Tak ada.
P: Cuba tengok balik ayat bahagi tadi. Boleh beritahu cikgu lima pada ayat tu merujuk pada apa dalam gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang baru ditanda)?
S: Jalur.
P: Empat (menunjukkan 4 selepas simbol '=' pada ayat)?
S: Empat kumoulan. Baki pun empat.
P: Ada cara lain untuk bahagi lima?
S: Tak ada.

Syahirah menyelesaikan bahagi empat dengan membentuk enam kumpulan bersaiz empat. Subjek juga membentuk empat kumpulan bersaiz enam sebagai penyelesaian kepada soalan yang sama. Subjek berpendapat kedua-dua gambar rajah yang dibentuknya boleh mewakili penyelesaian bagi bahagi empat atau bahagi enam. Selain itu, Syahirah juga menulis dua ayat bahagi $24 \div 4 = 6$ dan $24 \div 6 = 4$ bagi mewakili kedua-dua gambar rajah bersaiz empat dan gambar rajah bersaiz enam yang ditandanya. Syahirah juga memperoleh jawapan bagi soalan bahagi yang dikemukakan dengan menghitung jumlah kumpulan yang dapat dibentuknya.

Bagi menyelesaikan bahagi tiga pula, subjek menanda lapan kumpulan bersaiz tiga dan tiga kumpulan bersaiz lapan. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah yang walaupun berbeza

merujuk pada soalan pembahagian yang sama, iaitu bahagi tiga. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah yang ditanda oleh beliau boleh mewakili bahagi lapan. Subjek juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 3 = 8 dan 24 ÷ 8 = 3 bagi mewakili kedua-dua gambar rajah yang ditandanya. Subjek juga berpendapat kedua-dua ayat bahagi tersebut boleh merujuk kedua-dua gambar rajah yang ditanda untuk bahagi tiga dan bahagi lapan.

Bagi menyelesaikan bahagi lima pula, Syahirah menanda empat kumpulan bersaiz lima. Subjek menjelaskan bahagi lima merujuk saiz kumpulan yang ditanda oleh beliau dan empat kumpulan besaiz lima pula merujuk jawapan bagi pembahagian tersebut. Pada gambar rajah tersebut terdapat empat jalur yang tidak dibulatkan oleh subjek kerana menurut beliau empat jalur tersebut merupakan baki. Selain itu, bagi mewakili gambar rajah tersebut subjek juga menulis ayat bahagi sebagai 24 ÷ 5 = 4 baki 4.

Protokol 6: Afiq

Afiq berusia 9 tahun 4 bulan ketika rakaman temu duga diadakan. Berikut adalah tingkah laku yang beliau tunjukkan semasa rakaman tersebut.

1. Dia menggambarkan perkataan ‘bahagi’ dengan menulis simbol ‘ ÷ ’.

2. Bagi ayat enam bahagi dua, dia menggambarkannya dengan menulis ayat $6 \div 2$.

3. Dia mewakilkan ayat a ÷ b dengan membentuk kumpulan-kumpulan bersaiz b atau b kumpulan yang sama saiz. Menurutnya, pembahagi menentukan saiz kumpulan atau bilangan kumpulan.

4. Bagi pembahagian yang mempunyai baki a ÷ b = c baki d, hanya c sahaja diambil kira sebagai jawapan.

5. Menurutnya, gambar rajah yang mempunyai c kumpulan bersaiz b tidak sama dengan gambar rajah yang mempunyai b kumpulan bersaiz c kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

6. Menurutnya, persamaan a ÷ b = c adalah sama dengan a ÷ c = b kerana pembahagi dan hasil bahagi boleh saling bertukar ganti.

7. Bagi persamaan a ÷ b = c, a merujuk semua yang hendak dibahagi, b merujuk saiz kumpulan, dan c merujuk bilangan kumpulan.

8. Susunan yang dibentuk bagi persamaan a ÷ b = c, adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi a yang ditolak secara berulang sebanyak c kali. Setiap penolakan perlu bersaiz b, dan nilai c dalam a ÷ b = c adalah sama dengan bilangan penolakan berulang yang dilakukan.

9. Menurutnya, jika a ÷ b = c, maka

   i. a0 ÷ b = c0

   ii. a00 ÷ b = c00

   iii. a ÷ a = 1

   iv. a0 ÷ a0 = 1

   v. a ÷ 1 = a

   vi. a0 ÷ 1 = a0

10. Bagi ayat 0 ÷ a, jawapannya adalah sifar kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar.

11. Bagi ayat a ÷ 0, jawapannya adalah sifar kerana operasi yang membabitkan sifar adalah sifar.

12. Menurutnya, ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

13. Persamaan darab bagi ayat a ÷ b adalah c x b = a, di mana c adalah hasil bahagi bagi a ÷ b.

Gambaran Mental

Perkataan Bahagi

Terdapat hanya satu gambaran yang diberikan oleh Afiq bagi perkataan bahagi, iaitu simbol ‘ ÷ ’. Petikan berikut memaparkan gambaran mental yang dipunyai beliau bagi perkataan ‘bahagi’.

Petikan GM611

P: Kalau cikgu sebut bahagi gambar apa ada dalam fikiran Afiq?
S: Gambar?
P: Ada gambar tak dalam fikiran bila sebut bahagi?
S: Ada.
P: Gambar apa dalam fikiran Afiq?
S: (Subjek mendiamkan diri)
P: Afiq boleh tulis di kertas ini (memberikan subjek sehelai kertas)
S: (Subjek menulis simbol berikut pada kertas):

‘ ÷ ’

P: Boleh beritahu cikgu, apa yang Afiq tulis?
S: Gambar bahagi
P: Ini simbol bahagi, ya. Afiq ada gambar lain tak bila cikgu sebut bahagi?
S: (Subjek mendiamkan diri sebentar dan menjawab). Tak ada.
P: Bila cikgu sebut bahagi, apa lagi yang terlintas di fikiran Afiq?
S: Bahagi ini sahaja. (Subjek menunjukkan symbol bahagi yang beliau tulis)
P: Tak ada gambar lain?
S: Tak ada.

Gambaran Mental Ayat Bahagi

Afiq mempunyai satu gambaran bagi ayat enam bahagi dua, iaitu 6 ÷ 2. Petikan GM612 berikut memaparkan tingkah laku Afiq.

Petikan GM612

P: Baik, kalau saya sebut enam bahagi dua, gambar apa ada dalam fikiran Afiq?
S: Enam bahagi dua?
P: Ya. Enam bahagi dua.
S: (Subjek menulis seperti berikut pada kertas yang disediakan):

6 ÷ 2

P: Afiq tulis apa tu?
S: Enam bahagi dua (subjek menunjukkan ayat yang ditulisnya).
P: Selain gambar tu, ada gambar lain?
S: Tak ada.
P: Kalau saya sebut lapan bahagi empat?
S: (Subjek terus menulis seperti berikut pada kertas):

8 ÷ 4

P: Ada gambar lain tak?
S: Tak ada.
P: Betul? Tak ada?
S: Tak ada.

Dalam petikan GM612, Afiq menggambarkan enam bahagi dua dengan menulis ayat bahagi 6 ÷ 2. Selain itu, Afiq menulis 8 ÷ 4 bagi menggambarkan ayat lapan bahagi empat.

Perwakilan

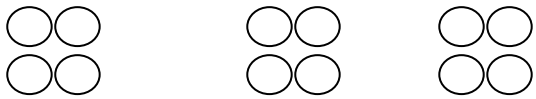
Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Afiq mewakilkan ayat bahagi tanpa baki iaitu 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Subjek juga mewakilkan ayat bahagi tersebut dengan membentuk empat kumpulan bersaiz tiga. Petikan PW631 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi.

Petikan PW631

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4) Boleh Afiq baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Baik, sekarang boleh Afiq tunjuk bagaimana dua belas bahagi empat menggunakan butang-butang ni (memberikan satu kotak butang)?
S: (Subjek menghitung dua belas dan kemudian menyusun seperti berikut):



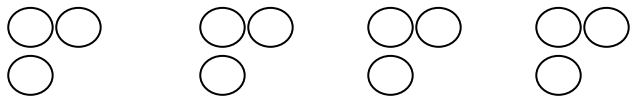
P: Dah siap ke?
S: (Subjek mengangguk).
P: Afiq buat berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Satu kumpulan ada empat butang.
P: Kenapa Afiq kumpulkan empat butang?
S: Sebab kena bahagi empat.

P: Yang ini (menunjukkan dua belas pada ayat 12 ÷ 4) rujuk pada apa dalam susunan ni (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).

S: Dua belas biji butang.
P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat 12 ÷ 4)?
S: Empat butang (menunjukkan empat butang dalam satu kumpulan).
P: Ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Tiga kumpulan tu sama apa pada ayat ni (menunjukkan ayat 12 ÷ 4)?
S: Jawapan dia. Dua belas bahagi empat sama dengan tiga.
P: Macam mana Afiq tau jawapan dia tiga?
S: Dua belas bahagi empat sama dengan tiga (subjek menulis yang berikut):

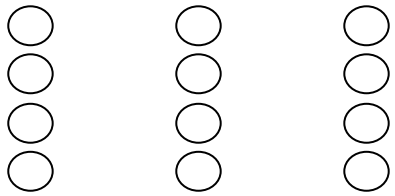
$$\begin{array}{r} \underline{\;\;3} \\ 4\,)\,12 \\ \underline{-\,12} \\ 0 \end{array}$$

P: Baik, kalau bahagi empat perlu letak empat butang dalam satu kumpulan ke atau ada cara lain nak bahagi empat?
S: Ada. (Subjek menyusun semula seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Empat.
P: Kumpulan tu rujuk pada apa dalam ayat bahagi?
S: Bahagi empat.
P: Susunan ini pun dua belas bahagi empat ke?
S: Ya.
P: Sama tak kedua-dua susunan?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Kumpulan tak sama. Yang ni empat, tadi tiga.
P: Ada lagi?
S: Butang dalam dia tak sama.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain lagi nak tunjuk dua belas bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh tunjuk dengan butang untuk yang ini (menunjukkan ayat 12 ÷ 3)?

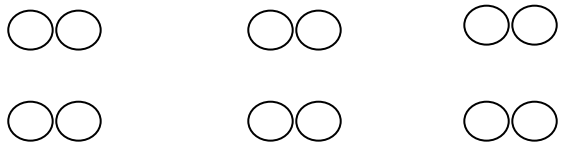
S: Yang ni pun dua belas bahagi tiga (subjek menunjukkan susunan yang dibuat bagi 12 ÷ 4).
P: Boleh wakilkan untuk dua belas bahagi tiga juga?
S: Ya. Dua-dua pun boleh.
P: Yang mana menunjukkan bahagi tiga?
S: Ini (menunjukkan satu kumpulan).
P: Kumpulan ada berapa?
S: Empat.
P: Empat tu apa pada ayat ni (menunjukkan 12 ÷ 3)?
S: Jawapan. Dua belas bahagi tiga sama dengan empat.
P: Ada cara lain nak tunjuk ayat ni (menunjukkan 12 ÷ 3)?
S: … Ada (subjek menyusun seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Yang mana menunjukkan bahagi tiga?
S: Tiga kumpulan.
P: Butang dalam satu kumpulan tu sama dengan apa pada ayat dua belas bahagi tiga?
S: Jawapan dia.
P: Sekarang, boleh Afiq tunjuk macam mana dua belas bahagi enam?
S: Boleh (subjek menyusun semula seperti berikut):

P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Dua.
P: Dua tu sama dengan apa pada dua belas bahagi enam.
S: Jawapan dua belas bahagi enam.
P: Selain pada dua belas bahagi enam, ada tak ayat lain yang kita boleh wakilkan susunan ini?
S: Dua belas bahagi dua pun boleh.
P: Kenapa dua belas bahagi dua?
S: Sebab ada dua kumpulan.
P: Kalau yang ini dua belas bahagi dua, yang mana menunjukkan jawapan dua belas bahagi dua?
S: Satu kumpulan.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?

S: Enam.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua belas bahagi dua?
S: Ada (subjek menyusun seperti berikut):



P: Yang ni berapa kumpulan?
S: Enam.
P: Kumpulan tu menunjukkan apa pada ayat dua belas bahagi dua?
S: Jawapan dia. Enam.
P: Ada cara lain nak tunjuk dua belas bahagi dua?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW631, Afiq mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Afiq juga menyamakan saiz kumpulan yang dibentuk dengan pembahagi, manakala bilangan kumpulan sebagai jawapan kepada ayat 12 ÷ 4. Afiq juga membentuk satu lagi susunan yang mempunyai empat kumpulan bersaiz tiga. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua susunan yang dibentuk bagi dua belas bahagi empat adalah berbeza kerana kedua-dua susunan mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang berbeza.

Bagi ayat 12 ÷ 3 pula, Afiq berpendapat bahawa susunan yang dibentuk bagi dua belas bahagi empat boleh mewakilinya. Subjek berpendapat bahawa saiz kumpulan merujuk pembahagi, manakala bilangan kumpulan pula merujuk hasil bahagi iaitu, empat. Selain itu, subjek membentuk satu lagi susunan yang mempunyai empat kumpulan bersaiz tiga.

Bagi bahagi enam pula, Afiq membentuk dua kumpulan bersaiz enam. Subjek menjelaskan bahawa saiz kumpulan merujuk pembahagi manakala bilangan kumpulan pula merujuk hasil bahagi. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa susunan yang dibentuk bagi dua belas bahagi enam boleh mewakili dua belas bahagi dua. Afiq menjelaskan bagi bahagi dua, saiz kumpulan tersebut merujuk hasil bahagi manakala bilangan kumpulan pula merujuk pembahagi. Selain itu, Afiq juga membentuk satu lagi susunan iaitu enam kumpulan bersaiz dua. Subjek menjelaskan bahawa saiz kumpulan tersebut merujuk pembahagi dan bilangan kumpulan pula merujuk kepada hasil bahagi.

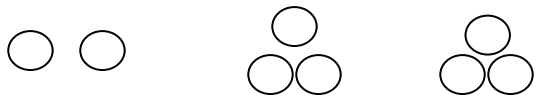
Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Afiq mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki iaitu 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan yang bersaiz tiga. Subjek juga melukis gambar rajah bagi menjelaskan ayat 8 ÷ 3. Petikan PW622 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW622

P: Cuba Afiq baca yang ini. (Menunjukkan kad yang tertulis ayat '8 ÷ 3').
S: Lapan bahagi tiga.
P: Boleh tunjuk dengan butang macam tadi?

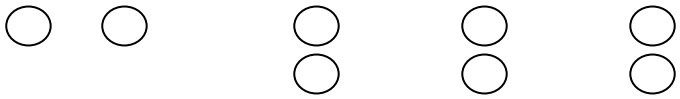
S: (Subjek menghitung dan menyusun butang seperti di bawah):



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua. Dua baki.
P: Yang mana baki?
S: Yang ni (menunjukkan dua butang).
P: Kenapa ada baki?
S: Sebab lapan bahagi tiga dapat baki (subjek menulis seperti berikut pada kertas):

$$\begin{array}{r} \underline{2} \\ 3\,)\,8 \\ \underline{-\,6} \\ 2 \end{array}$$

P: Yang mana menunjukkan ini (menunjukkan tiga pada 8 ÷ 3)?
S: Satu kumpulan.
P: Kenapa Afiq tiga butang dalam satu kumpulan?
S: Sebab soalan dia lapan bahagi tiga.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk ayat ni (menunjukkan 8 ÷ 3)?
S: Ada. (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Yang ni dua belas bahagi berapa?
S: Tiga.
P: Yang mana menunjukkan tiga?
S: Ada tiga kumpulan.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Dua.
P: Yang ni pun (menunjukkan dua butang yang diasingkan) satu kumpulan ke?
S: Bukan. Itu baki.
P: Baki berapa?
S: Dua.
P: Yang ni sama tak dengan susunan tadi?
S: Tak sama.

P: Apa yang tak sama?
S: Kumpulan dengan butang dalam kumpulan.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Baki sama?
S: Sama.
P: Baik, kalau lapan bahagi lima macam mana?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):

P: Ada berapa kumpulan.
S: Satu, baki tiga (subjek menulis seperti berikut dan menjawab):

$$\begin{array}{r} \underline{1} \\ 5\,\overline{)\,8} \\ \underline{-\,5} \\ 3 \end{array}$$

P: Yang mana baki?
S: Yang ini (menunjukkan kumpulan yang mempunyai tiga butang).
P: Kenapa Afiq kira ini (menunjukkan kumpulan bersaiz lima) sebagai satu kumpulan, yang ni baki (menunjukkan kumpulan bersaiz tiga)?
S: Sebab kena bahagi lima.
P: Kalau bahagi lima, satu kumpulan perlu ada berapa?
S: Lima.
P: Kenapa tak kira ini sebagai satu kumpulan (menunjukkan kumpulan bersaiz tiga)?
S: Sebab tak sama dengan lima.
P: Perlu ada lima baru boleh kira sebagai satu kumpulan?
S: Ya.
P: Dalam susunan ni yang mana menunjukkan ini (menunjukkan 8 pada ayat '8 ÷ 5')?
S: Semua butang.
P: Termasuk yang ini ke (menunjukkan kumpulan tiga butang)?
S: Ya.
P: Yang ni (menunjukkan 5 pada ayat 8 ÷ 5)?
S: Lima (menunjukkan kumpulan bersaiz lima).
P: Apa jawapan bagi ni (menunjukkan 8 ÷ 5)?
S: Satu baki tiga.
P: Dalam susunan yang mana satu baki tiga?

S: Ini satu (menunjukkan kumpulan bersaiz lima) ini baki tiga (menunjukkan kumpulan yang bersaiz tiga).
P: Ada cara lain tak nak tunjuk lapan bahagi lima?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW622, Afiq mewakilkan ayat 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan yang bersaiz tiga dan satu kumpulan bersaiz dua. Subjek juga berpendapat bahawa jawapan bagi ayat bahagi itu adalah dua baki dua. Subjek juga berpendapat bahawa saiz kumpulan perlu sama dengan pembahagi. Subjek juga membentuk satu lagi susunan dengan butang yang disediakan oleh pengkaji. Dalam susunan itu, Afiq membentuk tiga kumpulan bersaiz dua dan dua butang lagi diasingkan sebagai baki. Subjek menjelaskan bilangan kumpulan merujuk pembahagi dan jawapannya adalah dua baki dua. Subjek juga memastikan jawapannya secara pembahagian panjang.

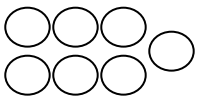
Bagi 8 ÷ 5 pula, Afiq membentuk satu kumpulan bersaiz lima dan satu kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga menunjukkan hasil bahagi secara pembahagian panjang. Subjek menjelaskan bahawa dalam susunan tersebut kumpulan yang bersaiz kurang daripada pembahagi adalah baki dan kumpulan yang bersaiz lima diambil kira sebagai satu kumpulan. Afiq juga berpendapat bahawa jawapan bagi pembahagian tersebut adalah satu baki tiga.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

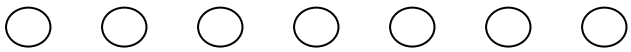
Afiq membentuk satu kumpulan yang bersaiz tujuh bagi mewakilkan ayat 7 ÷ 7. Subjek juga membentuk sebanyak tujuh kumpulan yang hanya mengandungi satu objek. Petikan PW623, yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai penyebut dan pengangka yang sama.

Petikan PW623

P: Boleh Afiq baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 7 ÷ 7)
S: Tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh Afiq tunjuk dengan butang macam tadi?
S: (Subjek mengambil tujuh butang dan menyusunnya seperti berikut):

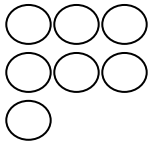


P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Kenapa letak dalam satu kumpulan?
S: Sebab nak bahagi tujuh.
P: Ada berapa dalam satu kumpulan?
S: Tujuh.
P: Tujuh bahagi tujuh dapat berapa?
S: Satu.
P: Afiq ada cara lain tak nak tunjuk tujuh bahagi tujuh?
S: (Subjek menyusun semula seperti berikut):



P: Yang ni ada berapa kumpulan?
S: Tujuh.

P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Satu.
P: Susunan ni sama tak dengan tadi?
S: Tak… kumpulan tak sama, butang pun tak sama.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain tak nak tujuh bahagi tujuh?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Afiq tunjuk untuk tujuh bahagi satu?
S: Yang ni pun sama dengan tujuh bahagi satu (menunjukkan susunan yang dibuat bagi tujuh bahagi tujuh).
P: Boleh wakilkan susunan tu untuk tujuh bahagi satu?
S: Boleh.
P: Afiq boleh jelaskan tak macam mana? Yang mana tujuh, yang mana bahagi satu?
S: Semua (menunjukkan semua butang) tujuh, bahagi satu (menunjukkan satu butang).
P: Ada cara lain tak nak tunjuk tujuh bahagi satu?
S: (Subjek menyusun semula seperti berikut):



P: Yang ni sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Kumpulan satu tadi tujuh.
P: Lagi?
S: Satu kumpulan ada tujuh butang, yang tadi satu kumpulan ada satu butang.
P: Susunan ni sama tak dengan susunan tujuh bahagi tujuh tadi?
S: Tak sama.
P: Yang mula-mula Afiq buat tu, yang ada satu kumpulan tu sama tak?
S: Sama.
P: Kenapa boleh sama, ayat tak sama kan?
S: Sama sebab ada dua cara untuk tujuh bahagi tujuh dan tujuh bahagi satu.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk tujuh bahagi satu?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW623, Afiq mewakilkan ayat 7 ÷ 7 dengan membentuk satu kumpulan yang mempunyai tujuh butang di dalamnya. Afiq juga membentuk satu lagi susunan yang mempunyai tujuh kumpulan bersaiz satu. Subjek menjelaskan bahawa saiz kumpulan yang dibentuk boleh mewakili pembahagi atau hasil bahagi.

Bagi ayat 7 ÷ 1 pula, Afiq berpendapat bahawa susunan yang dibentuknya bagi mewakili ayat 7 ÷ 7, boleh digunakan untuk mewakili tujuh bahagi satu. Selain itu, subjek menjelaskan bahawa kedua-dua susunan tersebut adalah berbeza kerana mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza. Subjek juga berpendapat bahawa susunan yang dibentuk bagi ayat 7 ÷ 7, iaitu dengan membentuk satu kumpulan bersaiz tujuh adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi ayat 7 ÷ 1. Afiq menjelaskan kesamaan antar kedua-dua susunan adalah kerana terdapat dua kaedah untuk menunjukkan ayat tujuh bahagi tujuh dan tujuh bahagi satu.

Gambar Rajah

Gambar rajah diskret

Afiq mewakilkan gambar rajah yang diberi dengan menulis ayat bahagi, 15 ÷ 5 = 3 dan 15 ÷ 3 = 5. Subjek juga mejelaskan kaitan gambar rajah yang diberi dengan ayat bahagi yang ditulisnya.

Petikan PW624 yang berikut, menggambarkan cara subjek mewakilkan gambar rajah

Petikan PW624

P: (Menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas biji bola) Cuba Afiq lihat gambar ni? Boleh tak Afiq tulis ayat bahagi bagi gambar ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 3 = 5$$

P: Cuba Afiq baca apa yang Afiq tulis tu?
S: Lima belas bahagi dengan tiga sama dengan lima.
P: Boleh Afiq jelaskan, kenapa Afiq tulis lima belas?
S: Sebab semua ada lima belas bola (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lima belas bola)
P: Bahagi tiga?
S: Sebab ada tiga bola.
P: Lima?
S: Ada lima kumpulan (subjek menunjukkan semua kumpulan pada gambar rajah).
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ni?
S: Ada. (Subjek menulis seperti berikut):

$$15 \div 5 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Lima belas bahagi lima sama dengan tiga.
P: Ayat ni sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Ini lima belas bahagi lima (menunjukkan ayat $15 \div 5 = 3$), yang ni lima belas bahagi tiga (menunjukkan ayat $15 \div 3 = 5$).
P: Ada lagi tak yang tak sama?
S: Yang ni tiga (menunjukkan tiga pada ayat $15 \div 5 = 3$), yang ini lima (menunjukkan lima pada ayat $15 \div 3 = 5$).
P: Ada lagi?
S: …Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Lima belas.
P: Lagi?
S: Tak ada.

P: Lima belas ni (menunjukkan lima belas pada ayat) sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Semua.
P: Yang ni (menunjukkan lima pada ayat)?
S: Lima kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan tiga pada ayat)?
S: Tiga bola dalam satu kumpulan (subjek menunjukkan bola dalam satu kumpulan).
P: Tiga ni (menunjukkan tiga pada ayat 15 ÷ 5 = 3) sama tak dengan tiga di sini (menunjukkan tiga pada ayat 15 ÷ 3 = 5)?
S: Dalam ayat tak sama, dalam gambar sama.
P: Kenapa tiga tu tak sama dalam ayat?
S: Sebab tiga ni (menunjukkan 15 ÷ 5 = 3) jawapan dia, tiga ni (menunjukkan 15 ÷ 3 = 5) soalan.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ni?
S: Tak ada.

Petikan PW625

P: (Menunjukkan gambar enam belas ekor kura-kura) ini gambar lain. Gambar apa ni?
S: Kura-kura.
P: Baik, macam tadi, boleh Afiq buat ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$16 \div 4 = 4$$

P: Cuba baca?
S: Enam belas bahagi empat sama dengan empat.
P: Kenapa Afiq tulis enam belas?
S: Sebab ada enam belas kura-kura.
P: Yang ni (menunjukkan pembahagi empat pada ayat 16 ÷ 4 = 4)?
S: Empat kura-kura.
P: Yang ni (menunjukkan hasil bahagi empat pada 16 ÷ 4 = 4)?
S: Empat kumpulan.
P: Empat tu boleh tak wakili kura-kura?
S: …Boleh.
P: Boleh? Kenapa?
S: Sebab kura-kura pun ada empat, kumpulan pun empat.
P: Macam mana dengan empat tadi (menunjukkan pembahagi empat pada ayat 16 ÷ 4 = 4)?
S: Boleh juga.
P: Kenapa?
S: Kumpulan pun empat, sama macam kura-kura.

P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek cuba menulis dan menjawab). Tak ada.

Dalam Petikan PW624, Afiq mewakilkan gambar rajah yang mempunyai lima kumpulan kura-kura bersaiz tiga dengan menulis ayat bahagi $15 \div 5 = 3$ dan $15 \div 3 = 5$. Subjek juga menyamakan lima belas pada kedua-dua ayat bahagi dengan kesemua objek, dan tiga pula disamakan dengan saiz setiap kumpulan. Subjek juga menjelaskan lima kumpulan yang terdapat di gambar rajah adalah sama dengan lima pada ayat bahagi.

Selain itu, Afiq berpendapat bahawa tiga pada kedua-dua ayat bahagi yang ditulisnya adalah berbeza kerana satu menunjukkan pembahagi manakala, satu lagi menunjukkan hasil bahagi. Bagaimanapun, Afiq menjelaskan bahawa pada gambar rajah, tiga merujuk kepada perkara yang sama iaitu, saiz kumpulan.

Dalam Petikan PW625 pula, Afiq mewakilkan gambar rajah yang mempunyai empat kumpulan kura-kura bersaiz empat dengan menulis persamaan $16 \div 4 = 4$. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua pembahagi dan hasil bahagi bagi ayat bahagi tersebut adalah sama kerana gambar rajah yang diberi oleh pengkaji mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan yang sama.

Gambar Rajah Selanjar

Afiq mewakilkan gambar rajah selanjar dengan menulis ayat bahagi 21 ÷ 7 = 3 dan ayat bahagi 21 ÷ 3 = 7. Subjek juga menjelaskan perkaitan antara gambar rajah yang dikemukakan dengan ayat bahagi yang ditulis oleh beliau. Sedutan Petikan PW626 memamaparkan cara subjek mewakilkan gambar rajah selanjar.

Petikan PW626

P: Cuba tengok gambar ini, ada banyak jalur. Boleh Afiq tulis ayat bahagi untuk gambar ni (menunjukkan gambar rajah selanjar yang mempunyai dua puluh satu jalur)?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

21 ÷ 7 = 3

P: Boleh baca?
S: Dua puluh satu bahagi tujuh.
P: Kenapa dua puluh satu?
S: Sebab ada dua puluh satu jalur.
P: Yang ini (menunjukkan tujuh pada ayat 21 ÷ 7 = 3)?
S: Satu kumpulan ada tujuh.
P: Yang ni (menunjukkan tiga pada ayat 21 ÷ 7 = 3)?
S: Tiga kumpulan
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

21 ÷ 3 = 7

P: Cuba baca.
S: Dua puluh satu bahagi tiga sama dengan tujuh.
P: Dalam gambar, yang mana dua puluh satu?
S: Semua.
P: Yang ini (menunjukkan tujuh pada ayat 21 ÷ 3 = 7)?
S: Satu kumpulan ada tujuh.
P: Yang ni (menunjukkan tiga pada ayat 21 ÷ 3 = 7)?
S: Tiga kumpulan.
P: Ayat ini (menunjukkan 21 ÷ 3 = 7) sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan 21 ÷ 7 = 3)?

S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab ini tiga (menunjukkan tiga pada 21 ÷ 3 = 7), yang ni tujuh. (menunjukkan tujuh pada 21 ÷ 7 = 3)?
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Ada. Yang ini tiga (menunjukkan tiga pada ayat 21 ÷ 7 = 3), yang ni tujuh (menunjukkan ayat 21 ÷ 3 = 7).
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Tiga ni (menunjukkan ayat 21 ÷ 3 = 7) sama tak dengan tiga ini (menunjukkan 21 ÷ 7 = 3)?
S: Sini (menunjukkan ayat 21 ÷ 3 = 7 dan 21 ÷ 7 = 3) tak sama, dalam gambar sama. Tiga kumpulan.
P: Ada cara lain menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW626, Afiq menulis ayat bahagi 21 ÷ 3 = 7 dan 21 ÷ 7 = 3 bagi mewakili gambar rajah selanjar yang dikemukakan. Subjek juga menyamakan kesemua jalur yang terdapat pada gambar rajah dengan nombor dua puluh satu yang terdapat pada ayat 21 ÷ 3 = 7 dan 21 ÷ 7 = 3. Tujuh jalur yang terdapat pada satu bahagian pula disamakan dengan angka tujuh yang terdapat pada kedua-dua ayat bahagi, manakala tiga pula disamakan dengan bilangan kumpulan. Selain itu, Afiq juga menjelaskan bahawa tiga pada kedua-dua ayat bahagi adalah berbeza, tetapi kedua-duanya merujuk kepada bilangan kumpulan yang sama.

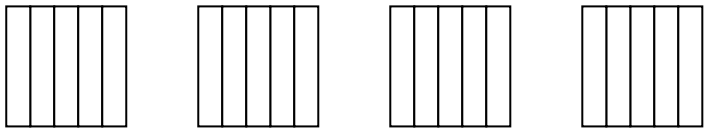
Penolakan Berulang

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Afiq mewakilkan pembahagian 20 ÷ 5 dengan membentuk sebanyak empat kumpulan yang bersaiz lima. Subjek juga mewakilkan pembahagian secara penolakan berulang dengan mengeluarkan lima penyedut minuman secara berulang sebanyak empat kali. Petikan PW627 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi tanpa baki.

Petikan PW627

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5). Cuba Afiq baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua puluh bahagi lima.
P: Sekarang, boleh Afiq tunjuk dengan penyedut minuman ini bagaimana dua puluh bahagi lima?
S: (Subjek menyusun penyedut minuman seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa penyedut minuman?
S: Lima.
P: Kenapa Afiq letak lima penyedut minuman dalam satu kumpulan (menunjukkan satu kumpulan)?
S: Sebab nak bahagi lima.

P: Kalau dua puluh bahagi sepuluh, macam mana Afiq akan susun?
S: Nak susun ke?
P: Boleh jawab tanpa susun? Kalau bahagi sepuluh macam mana Afiq akan susun?
S: Satu kumpulan letak sepuluh.
P: Baik, kalau dua puluh bahagi lima, apa jawapannya?

S: Empat.

P: Macam mana dapat empat?

S: Dua puluh bahagi lima, empat (subjek menulis yang berikut):

$$\begin{array}{r} \underline{\ \ 4} \\ 5\ )\ 20 \\ -\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

P: Kalau dalam susunan tadi yang mana jawapan dia?

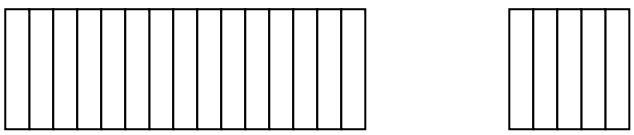
S: Empat kumpulan. (Subjek menunjukkan empat kumpulan penyedut minuman).

P: Baik, sekarang boleh Afiq baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5)?

S: Dua puluh tolak lima.

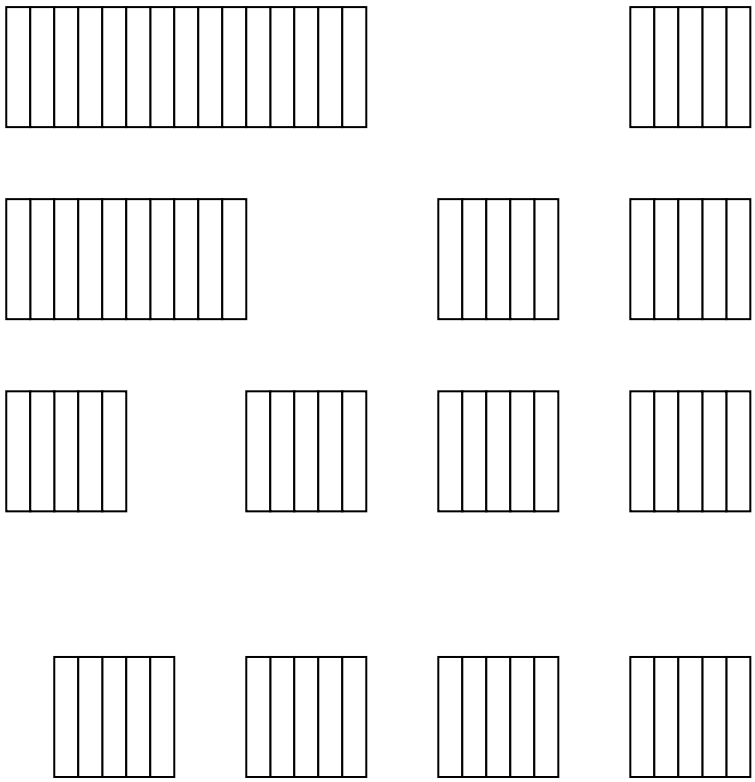
P: Baik, Afiq boleh tunjuk tak macam tadi? Gunakan penyedut minuman yang lain, ya!

S: (Subjek meletakkan dua puluh penyedut minuman kemudian mengeluarkan lima daripadanya seperti berikut):



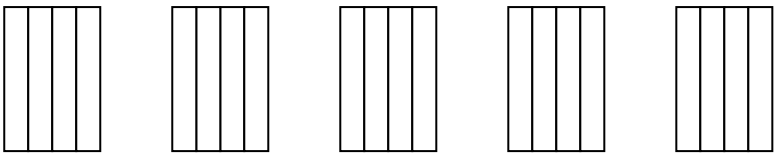
P: Baik, Afiq dah tolak lima?
S: Dah.
P: Berapa yang tinggal?
S: Lima belas.
P: Baik, sekarang boleh Afiq tolak lima lagi? Buat sampai tak boleh tolak lima lagi. Boleh?
S: (Subjek mengangguk).

P: Dah tolak, letak berasingan
S: (Subjek mengasingkan lima lagi seperti berikut):

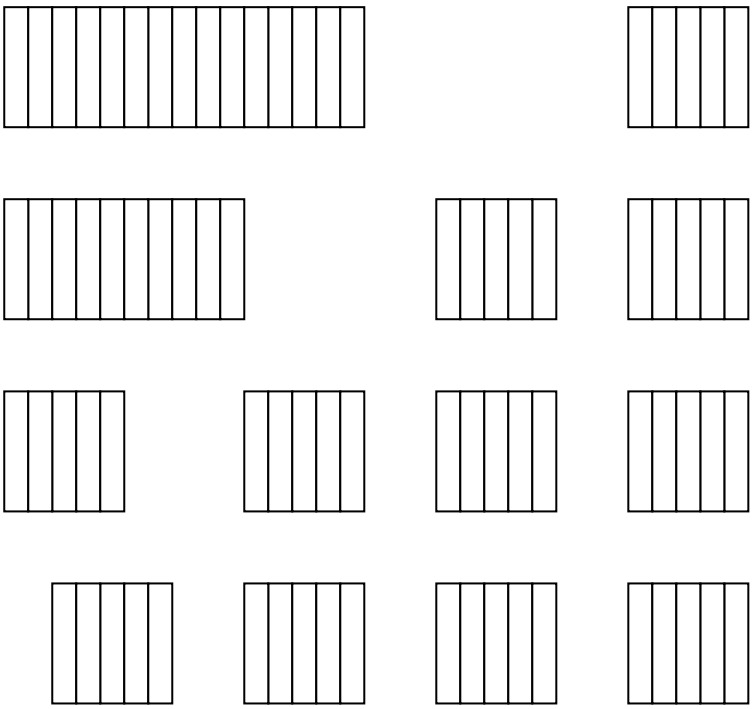


P: Ada berapa yang tinggal?
S: Tak ada.
P: Berapa kali Afiq keluarkan lima?
S: Empat.
P: Dua puluh bahagi lima tadi dapat berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Jadi, apa kaitan antara bahagi dengan tolak secara berulang-ulang tu?
S: Sama.
P: Sama macam mana?
S: Susunan dia. Dua puluh bahagi lima dapat empat kumpulan, dua puluh tolak lima…dapat empat kumpulan.
P: Apa lagi yang sama?
S: Tak ada lagi.
P: Yang beza ada tak?
S: Yang ni bahagi (subjek menunjukkan susunan bagi dua puluh bahagi lima) yang ni tolak (subjek menunjukkan susunan bagi dua puluh tolak lima).
P: Ada lagi tak yang berbeza?
S: Tak ada.
P: Apa lagi kaitan antara ayat bahagi dan ayat tolak?
S: Tak ada.

P: Kalau nak bahagi, boleh tak buat dengan tolak berulang-ulang sampai habis?
S: Boleh.
P: Kenapa Afiq rasa boleh?
S: Sebab dua puluh tolak lima, tolak lima, sampai habis pun sama dengan dua puluh bahagi lima.
P: Afiq ada cara lain tak nak tunjuk dua puluh bahagi lima?
S: Ada (subjek menyusun seperti berikut):
.



P: Ada berapa kumpulan?
S: Lima.
P: Yang ni dua puluh bahagi berapa?
S: Lima.
P: Apa jawapan untuk pembahagian tadi? Dua puluh bahagi lima dapat berapa?
S: Empat.
P: Boleh Afiq tunjuk secara penolakan berulang macam tadi? Dua puluh tolak berapa?
S: Dua puluh tolak lima.
P: Baik, boleh tunjuk?
S: (Subjek menyusun seperti berikut):



P: Berapa kali Afiq tolak lima?
S: Empat kali.
P: Yang mana menunjukkan jawapan untuk dua puluh bahagi lima?
S: Tolak empat kali.
P: Jadi jawapannya berapa?
S: Empat.
P: Ada cara lain tak tunjuk secara penolakan ni?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW627, Afiq mewakilkan 20 ÷ 5 dengan membentuk empat kumpulan bersaiz lima. Subjek juga menolak lima penyedut minuman daripada dua puluh penyedut secara berulang-ulang sehingga tidak ada yang tinggal lagi. Afiq mengeluarkan lima daripada dua puluh penyedut minuman sebanyak empat kali. Selain itu, Afiq menjelaskan bahawa penolakan secara berulang adalah sama dengan pembahagian kerana memperoleh bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang sama.

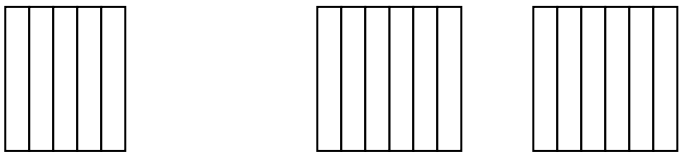
Selain itu, Afiq juga mewakilkan 20 ÷ 5 dengan membentuk lima kumpulan bersaiz empat. Subjek juga menunjukkan secara penolakan berulang, iaitu menolak lima penyedut minuman sebanyak empat kali. Afiq berpendapat bahawa hasil bahagi bagi ayat 20 ÷ 5 adalah sama dengan bilangan penolakan secara berulang yang dilakukan bagi 20 – 5. Afiq juga menjelaskan bahawa hasil bahagi bagi dua puluh bahagi lima adalah empat dan jawapan ini boleh diperoleh dengan mengira bilangan ‘tolak lima’ yang dilakukan kepada dua puluh.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Afiq mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki, iaitu 17 ÷ 6 dengan mengeluarkan sebanyak enam penyedut minuman daripada tujuh belas secara berulang sehingga baki yang tinggal kurang daripada enam. Subjek juga menunjukkan pembahagian 17 ÷ 6 dengan membentuk dua kumpulan yang bersaiz enam. Kumpulan yang kurang daripada enam diasingkan sebagai baki. Petikan PW628 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW628

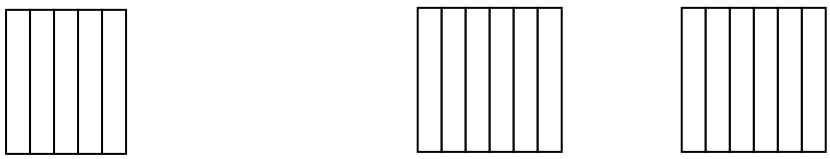
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6) cuba Afiq baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Tujuh belas bahagi enam.
P: Boleh tunjuk dengan penyedut minuman macam tadi?
S: (Subjek menyusun seperti berikut dan memberi jawapan) Tak cukup.



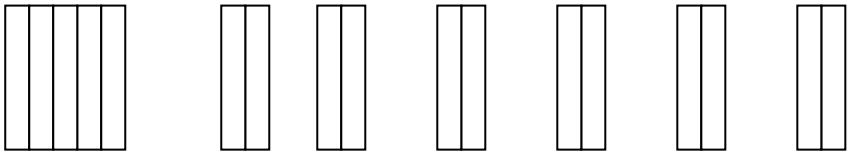
P: Dah siap?
S: Dah.
P: Apa jawapannya?
S: Dua baki lima (subjek menulis yang berikut selepas menjawab):

$$\begin{array}{r} 2 \\ 6\,\overline{)\,17} \\ -\,\underline{12} \\ 5 \end{array}$$

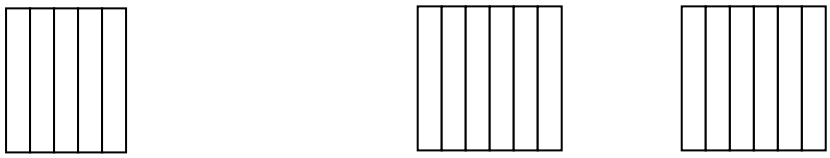
P: Yang mana dua, dan yang mana baki lima?
S: Ini dua (menunjukkan dua kumpulan bersaiz enam) yang ni baki (menunjukkan kumpulan bersaiz lima).
P: Kenapa Afiq kata ini baki (menunjukkan lima penyedut yang diasingkan)?
S: Sebab ada lima saja.
P: Sepatutnya ada berapa?
S: Enam.
P: Kenapa perlu ada enam?
S: Sebab nak bahagi enam
P: Sekarang, boleh Afiq tunjuk secara penolakan? (Menunjukkan ayat 17 - 6). Gunakan penyedut minuman yang lain.
S: Tujuh belas tolak enam. (Subjek menghitung tujuh belas penyedut minuman dan mengeluarkan enam penyedut minuman sebanyak dua kali dan mengumpulkannya secara berasingan)



P: Berapa kali Afiq tolak enam?
S: Dua kali.
P: Yang ini (menunjukkan kumpulan yang mempunyai lima penyedut minuman)?
S: Tak boleh tolak enam lagi sebab ada lima saja.
P: Jadi, dapat berapa kumpulan enam dan berapa baki?
S: Dua kumpulan dan lima baki.
P: Jawapan ni sama tak dengan yang Afiq buat cara bahagi tadi?
S: Sama.
P: Apa yang sama?
S: Jawapan dia. Dua baki lima.
P: Apa lagi yang sama?
S: (Subjek menunjukkan kedua-dua susunan) susunan dia sama.
P: Apa yang sama dalam kedua-dua susunan?
S: Ada dua kumpulan enam dan lima baki
P: Afiq ada cara lain nak tunjuk tujuh belas bahagi enam?
S: Ada (subjek menunjukkan seperti berikut):



P: Dapat berapa kumpulan?
S: Enam, baki lima juga.
P: Jadi apa jawapan untuk tujuh belas bahagi enam?
S: Dua baki lima.
P: Yang mana menunjukkan dua baki lima?
S: Ini dua (menunjukkan satu kumpulan) ini baki lima (menunjukkan kumpulan bersaiz lima).
P: Baik, Afiq ada cara lain nak tunjuk cara penolakan macam tadi (menunjukkan ayat 17 − 6)?
S: Tujuh belas tolak enam. Sama macam tadi, tolak enam.
P: Tadi tolak enam berapa kali?
S: Dua kali.
P: Ingat lagi tak yang tadi? Afiq nak susun sekali lagi? Gunakan penyedut minuman yang lain.
S: Ya (subjek menyusun semula bagi 17 – 6).



P: Afiq tolak enam berapa kali?
S: Dua kali.
P: Jadi apa jawapan untuk yang tadi?
S: Dua baki lima.
P: Jadi, apa kaitan antara bahagi dan tolak? Gunakan contoh yang ini (menunjukkan ayat 17 ÷ 6 dan 17 – 6).
S: Tujuh belas bahagi enam, jawapan dia sama dengan tujuh belas tolak enam, tolak enam.
P: Tolak dua kali?
S: Ya, tolak dua kali, dan ada baki lima untuk dua-dua.

Dalam Petikan PW628, Afiq membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima bagi mewakili 17 ÷ 6. Subjek berpendapat bahawa kumpulan yang bersaiz lima adalah baki kerana saiznya kurang daripada enam. Subjek juga menunjukkan secara

penolakan berulang dengan mengeluarkan enam daripada tujuh belas penyedut minuman yang asal sebanyak dua kali. Afiq membentuk dua kumpulan bersaiz enam meninggalkan satu kumpulan bersaiz lima. Afiq juga berpendapat bahawa susunan yang dibentuknya bagi pembahagian $17 \div 6$ adalah sama dengan susunan yang terhasil apabila enam penyedut dikeluarkan secara berulang sebanyak dua kali.

Bagi ayat $17 \div 6$, Afiq juga membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz lima. Afiq menjelaskan bahawa jawapan bagi pembahagian tersebut adalah dua baki lima. Menurut Afiq, enam diperoleh daripada saiz setiap kumpulan yang dapat dibentuk.

Selain itu, subjek juga menunjukkan secara penolakan berulang $17 - 6$, iaitu dengan mengeluarkan dua kumpulan bersaiz enam daripada tujuh belas meninggalkan satu kumpulan bersaiz lima. Afiq menjelaskan bahawa jawapan bagi penolakan berulang juga adalah dua baki lima. Menurut subjek, jawapan tersebut diperoleh dengan menghitung bilangan pengeluaran kumpulan bersaiz enam yang dilakukan. Menurut Afiq lagi, jumlah yang tinggal selepas pengeluaran dilakukan merupakan baki. Afiq juga berpendapat bahawa penyelsaian bagi ayat bahagi $17 \div 6$ adalah sama dengan penolakan $17 - 6$ yang dilakukan secara berulang sebanyak dua kali.

Masalah Berkotak

Menentukan Nama Kotak

Afiq berpendapat bahawa operasi yang berlaku di dalam 'kotak ajaib' adalah operasi bahagi kerana kotak tersebut dapat membahagi nombor-nombor yang dimasukkan ke dalamnya dan memberikan jawapan. Subjek juga menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak ajaib secara lukisan. Petikan MK631 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Afiq.

Petikan MK631

P: (Menunjukkan satu kotak). Kotak ini apabila kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A) satu nombor akan keluar melalui lubang ni (menunjukkan lubang B). Kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A), kotak ni akan proses kemudian jawapannya akan keluar di sini (menunjukkan lubang B). Afiq faham ya?

S: (Subjek mwngangguk).

P: Baik, sekarang kita masukkan dua nombor ya. Ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 14)?

S: Empat belas.

P: Baik, kita masukkan nombor tadi di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A). Yang ni nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 2)?

S: Dua.

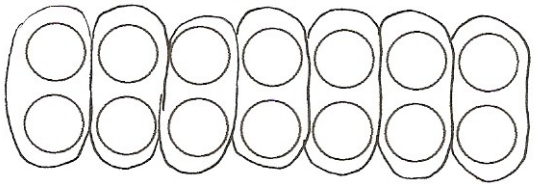
P: Nombor ni pun kita masukkan di sini (memasukkan nombor tersebut di A). Afiq boleh ingat nombor-nombor tadi?

S: Ingat. Empat belas dan dua.

P: Sekarang, kita tengok nombor apa yang keluar dari sini. (Mengeluarkan nombor dari B) ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 7)?

S: Tujuh.

P: Apa kotak ini dah buat kepada empat belas dengan dua tadi, sehingga menghasilkan nombor tujuh? Empat belas dengan dua menghasilkan tujuh.
S: Empat belas bahagi dua.
P: Kenapa bahagi?
S: Empat belas bahagi dua sama dengan tujuh.
P: Baik, kita cuba nombor lain pula (menunjukkan kad yang tertulis 10). Nombor apa?
S: Sepuluh.
P: Kita masukkan nombor ni ke dalam lubang. (Memasukkan kad tersebut di lubang A). Yang ni nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 5)?
S: Lima.
P: Baik, boleh Afiq masukkan dalam lubang ni macam tadi?
S: (Subjek memasukkan kad tersebut ke dalam lubang A).
P: Nombor apa yang keluar dari sini (menunjukkan kad yang keluar dari lubang B).
S: Dua.
P: Ingat tak nombor yang masuk tadi?
S: Sepuluh dan …
P: Lima. Nombor yang masuk ialah sepuluh dan lima, nombor yang keluar dua. Apa agaknya kotak ini dah buat kepada nombor-nombor tadi?
S: Bahagi.
P: Bahagi ke? Bukan tolak?
S: Bahagi. Sepuluh bahagi lima, dua.
P: Baik, kita cuba satu lagi, ya. Ini apa (menunjukkan kad yang tertulis nombor 4)?
S: Empat.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Nombor yang keluar (menunjukkan nombor 2).
S: Dua (subjek menjawab sebelum pengkaji mengeluarkan kad).
P: Nombor apa (menunjukkan nombor 2).
S: Dua.
P: Macam mana Afiq tahu jawapannya?
S: Bahagi. Empat bahagi dua, dua.
P: Bukan darab ke?
S: Bukan…bahagi.
P: Kenapa bukan darab?
S: Kalau darab… jawapan dia lapan.
P: Baik sekarang boleh Afiq tunjuk apa kotak buat kepada nombor-nombor empat belas dan dua hingga dapat jawapan tujuh? Afiq boleh lukis?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Afiq lukis apa?
S: Empat belas bola.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Tujuh.
P: Afiq bulatkan berapa bola?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Sebab empat belas bahagi dua.
P: Yang mana nombor yang masuk ke dalam kotak tadi?
S: Empat belas (menunjukkan empat belas bola pada lukisan) dan dua (menunjukkan satu kumpulan).
P: Yang mana menunjukkan nombor yang keluar dari lubang B tadi?
S: Tujuh (menunjukkan kumpulan).
P: Ada cara lain tak nak tunjuk empat belas bahagi dua tadi?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Afiq tulis ayat bahagi macam ni (menunjukkan satu contoh ayat bahagi)?
S: Untuk ni (menunjukkan lukisannya)?
P: Ya, untuk apa yang berlaku dalam kotak tadi?
S: (Subjek menulis ayat berikut):

$$14 \div 2 = 7$$

P: Cuba baca?
S: Empat belas bahagi dua sama dengan tujuh.
P: Yang ni (menunjukkan 2 pada ayat bahagi) sama dengan apa pada lukisan?
S: Dua bola (menunjukkan satu kumpulan).
P: Yang ini (menunjukkan tujuh pada ayat bahagi)?
S: Tujuh (menunjukkan tujuh kumpulan).
P: Afiq ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: …Tak ada.
P: Boleh Afiq tulis ayat bahagi untuk nombor-nombor sepuluh dan lima yang memasuki kotak tadi? Ingat lagi tak nombor apa yang masuk dan keluar?
S: Ingat, sepuluh dan lima dapat dua (subjek menulis seperti berikut):

$$10 \div 5 = 2$$

P: Cuba baca.
S: Sepuluh bahagi dengan lima sama dengan dua.
P: Yang mana nombor yang keluar?
S: Dua.
P: Yang masuk?
S: Sepuluh dan lima.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan MK631, Afiq menjelaskan bahawa operasi yang berlaku di dalam 'kotak ajaib' adalah operasi bahagi. Subjek menjelaskan bahawa empat belas bahagi dua adalah sama dengan tujuh. Selain itu subjek juga berpendapat bahawa operasi yang berlaku adalah bahagi kerana sepuluh bahagi lima akan menghasilkan jawapan dua. Subjek juga menjelaskan bahawa sekiranya operasi tolak atau operasi darab yang berlaku di dalam kotak, maka jawapan yang diperoleh adalah berbeza. Subjek juga dapat menentukan hasil bahagi yang akan keluar melalui lubang B sebelum pengkaji menunjukkan nombor tersebut. Apabila nombor empat dan dua dimasukkan ke dalam kotak, Afiq dapat menentukan nombor yang akan keluar adalah dua dengan menggunakan operasi bahagi.

Selain itu, Afiq juga menjelaskan proses yang berlaku di dalam kotak bagi secara lukisan. Afiq melukis empat belas bola yang dikumpulan dalam tujuh kumpulan. Setiap kumpulan bersaiz dua. Subjek menjelaskan bahawa tujuh kumpulan pada lukisannya merujuk nombor yang keluar melalui lubang B, manakala dua dan empat belas

pula merujuk nombor-nombor yang memasuki kotak. melukis dua kumpulan yang mengandungi lima guli di dalamnya.

Selain itu, Afi menulis ayat bahagi 14 ÷ 2 = 7 bagi mewakili gambar rajah yang dilukisnya dan juga proses yang berlaku di dalam kotak. Subjek menjelaskan bahawa dua pada ayat bahagi merujuk dua bola yang dilukisnya di dalam satu kumpulan. Subjek juga menjelaskan dua tersebut merujuk nombor yang memasuki kotak.

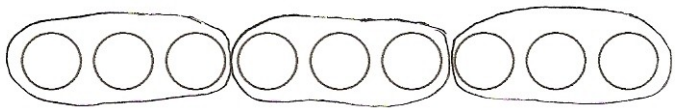
Afiq juga berpendapat bahawa tujuh pada ayat bahagi 14 ÷ 2 = 7 bilangan kumpulan yang terdapat pada lukisan dan juga nombor yang kelua r melalui lubang B. Afiq juga menulis ayat bahagi 10 ÷ 5 = 2 bagi mewakili sepuluh dan lima yang memasuki kotak. Subjek menjelaskan nombor sepuluh dan lima pada ayat tersebut merujuk nombor yang memasuki kotak, manakala dua pula merujuk nombor yang keluar melalui lubang B kotak tersebut.

Menentukan Hasil Bahagi

Afiq menggunakan kaedah operasi bahagi bagi menentukan nombor yang akan keluar melalui lubang B. Subjek juga menjelaskan proses yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Petikan MK632 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan MK632

P: Baik, Afiq kata kotak ni boleh bahagi, kan. Jadi namakan kotak ni bahagi Sekarang kita akan masukkan nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis 9). Berapa ni?
S: Sembilan.
P: Boleh Afiq masukkan dalam kotak?
S: (Subjek memasukkan kad tersebut ke dalam kotak).
P: Yang ini berapa? (menunjukkan kad yang tertulis tiga)?
S: Tiga.
P: Afiq masukkan!
S: (Subjek memasukkan nombor tersebut).
P: Ingat nombor-nombor tadi?
S: Sembilan dan tiga.
P: Baik, nombor berapa yang akan keluar?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga?
S: Sebab sembilan bahagi dengan tiga dapat tiga.
P: Baik, Afiq boleh tak tunjuk apa yang kotak tu buat kepada sembilan dan tiga hingga dapat tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut):

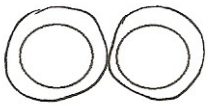


P: Afiq lukis apa?
S: Guli.
P: Ada berapa kumpulan guli?
S: Tiga.
P: Kenapa buat tiga kumpulan?
S: Sebab sembilan bahagi dengan tiga sama dengan tiga.
P: Dalam lukisan, yang mana menunjukkan jawapan tiga?
S: Kumpulan.
P: Dalam kumpulan ada berapa guli?
S: Tiga juga.
P: Boleh tak jawapan tiga yang keluar dari kotak tadi mewakili tiga guli dalam satu kumpulan tu?
S: …Tiga yang keluar tu jawapan.
P: Tiga pada jawapan tu, boleh tak mewakili tiga guli dalam satu kumpulan?
S: Tiga dalam kumpulan sama dengan tiga yang masuk kotak.
P: Jadi tak sama dengan nombor yang keluar ke?
S: Tak.
P: Nombor tiga yang keluar tu sama dengan bahagian mana dalam lukisan Afiq?

S: Kumpulan.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk apa yang berlaku di dalam kotak?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Afiq tuliskan ayat bahagi bagi apa yang berlaku dalam kotak ni?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut):

$$9 \div 3 = 3$$

P: Boleh baca?
S: Sembilan bahagi dengan tiga sama dengan tiga
P: Baik, angka sembilan ni merujuk kepada bahagian mana dalam lukisan?
S: Semua (menunjukkan semua guli).
P: Yang ni (menunjukkan tiga selepas simbol bahagi)?
S: Tiga guli (menunjukkan satu kumpulan).
P: Yang ini (menunjukkan tiga selepas tanda '=')?
S: Tiga kumpulan (menunjukkan semua kumpulan).
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Sekarang kita cuba dengan satu lagi nombor. Ini apa (menunjukkan nombor 2)?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan 1)?
S: Satu.
P: Apa agaknya yang akan keluar dari lubang ini (menunjukkan lubang B)?
S: Dua.
P: Macam mana dapat dua?
S: Dua bahagi dengan satu sama dengan dua.
P: Baik, boleh Afiq tunjuk macam tadi secara lukisan?
S: Boleh. (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut):



P: Afiq lukis apa?
S: Dua biji gula-gula.
P: Yang mana rujuk pada nombor yang keluar dari kotak?
S: Dua gula-gula.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Dua kumpulan tu nombor yang masuk kotak ke?
S: Ya dan jawapan dia.
P: Nombor satu yang masuk kotak tu sama dengan yang mana?

S: Satu gula-gula (menunjukkan satu kumpulan).
P: Baik. Kalau dua yang masuk kotak tadi kita gantikan dengan dua puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua puluh.
P: Kenapa dua puluh?
S: Dua puluh bahagi satu jawapannya dua puluh (subjek menjawab sambil menulis yang berikut):

```
   20
1 ) 20
  - 2
     0
```

P: Kalau kita ganti dengan dua ratus?
S: Dua ratus.
P: Kenapa dua ratus?
S: Dua ratus bahagi satu dua ratus.

```
   200
1 ) 200
  - 2
     0
   - 0
      0
    - 0
      0
```

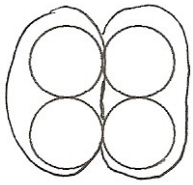
P: Boleh Afiq tulis ayat bahagi macam ini (menunjukkan ayat bahagi 9 ÷ 3 = 3)
S: (Subjek menulis seperti berikut):

$$200 \div 1 = 200$$

P: Baik, sekarang kalau nombor ini (menunjukkan nombor 4).
S: Empat
P: Dan nombor ini (menunjukkan 2).
S: Dua
P: Kita masukkan di sini (menunjukkan lubang A) nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua.
P: Macam mana Afiq tau dua?
S: Empat bahagi dua sama dengan dua.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: Boleh. (Subjek menulis seperti berikut):

$$4 \div 2 = 2$$

P: Sekarang boleh Afiq tunjuk secara lukisan?
S: Boleh. (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut):



P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Dua kumpulan tu menunjukkan nombor mana? Yang masuk kotak atau yang keluar?
S: …Keluar.
P: Dua yang masuk, yang mana pula dalam lukisan?
S: Dua ni (menunjukkan satu kumpulan)
P: Kalau kita gantikan empat dengan empat puluh, nombor apa yang akan keluar?
S: (Subjek menjawab selepas menulis yang berikut):

$$\begin{array}{r} \underline{20} \\ 2\,)\,40 \\ \underline{-\,2} \\ 0 \\ \underline{-\,0} \\ 0 \end{array}$$

P: Macam mana tahu dua puluh?
S: Empat puluh bahagi dua sama dua puluh.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis ayat berikut):

$$40 \div 2 = 20$$

P: Boleh Afiq baca?
S: Empat puluh bahagi dua sama dengan dua puluh.
P: Kalau empat diganti dengan empat ratus?
S: Dua ratus
P: Kenapa Adila berkata demikian?
S: Empat ratus bahagi dua sama dua ratus.
P: Bukan dua puluh?
S: Dua puluh kalau empat puluh bahagi dua.
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menuliskan ayat berikut):

$$400 \div 2 = 200$$

P: Cuba baca?
S: Empat ratus bahagi dua sama dengan dua ratus.

P: Baik sekarang kita masukkan nombor ini (menunjukkan 8)?
S: Lapan.
P: Dan nombor ini (menunjukkan 3)?
S: Tiga.
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: (Subjek menulis seperti berikut) Ada baki.

$$\begin{array}{r} \underline{2} \\ 3\,)\,8 \\ \underline{-\,6} \\ 2 \end{array}$$

P: Jadi, nombor apa yang akan keluar?
S: Tak ada nombor yang keluar.
P: Kenapa?
S: Sebab ada baki.
P: Kalau ada baki, tak ada nombor yang akan keluar?
S: (Subjek mengangguk).
P: Kenapa?
S: Lapan tak boleh bahagi tiga…ada baki.

Dalam Petikan MK632, Afiq menentukan nombor yang akan keluar melalui lubang B dengan menggunakan kaedah operasi bahagi. Bagi nombor sembilan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak Afiq berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah tiga. Subjek menentukannya secara kaedah operasi bahagi.

Selain itu, subjek juga menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Dalam lukisan itu, subjek membentuk tiga kumpulan bersaiz tiga. Afiq menjelaskan bahawa tiga guli yang dikumpulkan dalam satu kumpulan merujuk kepada pembahagi dan nombor yang memasuki kotak. Subjek juga menjelaskan bahawa tiga kumpulan yang dilukisnya itu merujuk nombor yang keluar dari kotak

Afiq juga menulis ayat bahagi $9 \div 3 = 3$ bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak. Subjek juga menjelaskan nombor

sembilan pada persamaan bahagi merujuk kesemua guli dalam lukisannya. Menurut subjek lagi, nombor tiga pada pembahagi pula merujuk tiga guli dalam satu kumpulan, manakala tiga di bahagian hasil bahagi pula merujuk tiga kumpulan yang dibentuk.

Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa nombor yang akan keluar melalui lubang B apabila nombor dua dan satu dimasukkan melalui lubang A adalah dua. Menurut subjek, jawapan tersebut diperoleh dengan membahagi dua dengan satu. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang. Selain itu, Afiq juga melukis gambar rajah dua biji gula-gula. Afiq menjelaskan bahawa sebiji gula-gula merujuk pembahagi yang bernilai satu. Dua kumpulan pula merujuk nombor yang keluar melalui lubang B. Subjek juga menulis ayat $2 \div 1 = 2$ bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak.

Bagi nombor dua pada ayat bahagi $2 \div 1 = 2$ yang diganti dengan nombor dua puluh, Afiq berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua puluh. Subjek juga menjelaskan bahawa sekiranya nombor dua tersebut diganti dengan nombor dua ratus, maka nombor yang akan keluar melalui lubang B adalah dua ratus. Subjek juga menulis ayat bahagi $20 \div 1 = 20$ dan $200 \div 1 = 200$ bagi mewakili proses tersebut.

Bagi nombor empat dan dua yang memasuki kotak pula, subjek berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua. Afiq juga menulis ayat bahagi $4 \div 2 = 2$ bagi mewakili proses yang

berlaku di dalam kotak. Subjek juga melukis dua kumpulan bersaiz dua bagi mewakili proses tersebut. Bagi nombor empat yang diganti dengan empat puluh, Afiq berpendapat bahawa nombor yang akan keluar adalah dua puluh. Selain itu, subjek menjelaskan apabila nombor empat diganti dengan empat ratus jawapannya adalah dua ratus. Afiq juga menulis ayat bahagi $40 \div 2 = 20$ bagi mewakili empat puluh bahagi dua. Selain itu, Afiq juga menulis ayat bahagi $400 \div 2 = 200$ bagi empat ratus bahagi dengan dua.

Bagi nombor lapan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak pula, Afiq berpendapat bahawa tidak akan ada sebarang nombor yang keluar. Menurut subjek, ini adalah kerana nombor lapan bahagi dengan tiga akan menghasilkan baki.

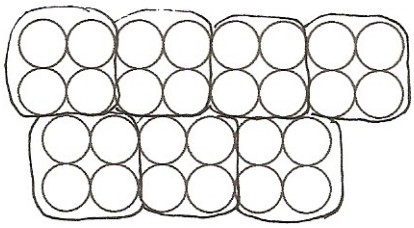
Tafsiran Ayat Matematik

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Afiq mentafsirkan ayat bahagi 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan yang mempunyai empat guli di dalamnya. Subjek juga menulis ayat darab 4 x 7 = 28 dan ayat 7 x 4 = 28 bagi mewakili ayat bahagi 28 ÷ 4 = 7. Tingkah laku yang Afiq tunjukkan semasa temu duga dipaparkan dalam Petikan TA641.

Petikan TA641

P: Boleh Afiq baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Boleh Afiq terangkan kepada cikgu macam mana dua puluh lapan bahagi empat.
S: Nak lukis?
P: Boleh lukis pada kertas.
S: (Subjek melukis dan membulatkan seperti berikut pada kertas):



P: Boleh bagi tahu cikgu apa yang Afiq lukis?
S: Dua puluh lapan guli bahagi empat.
P: Kenapa Afiq bulatkan empat guli seperti ini (menunjukkan gambar rajah)?
S: Sebab bahagi empat.
P: Ada cara lain Afiq boleh tunjuk bahagi empat?
S: (Subjek hanya mendiamkan diri).

P: Afiq ada cara lain tak nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Baik, dua puluh lapan bahagi empat sama dengan berapa?
S: Tujuh.
P: Macam mana dapat tujuh?
S: Sebab kumpulan ada tujuh.
P: Dua puluh lapan rujuk pada bahagian mana dalam gambar Afiq?
S: Semua (subjek menunjukkan semua bulatan dalam lukisannya).
P: Tujuh?
S: Ini. (Subjek menunjukkan kumpulan-kumpulan yang terdapat pada lukisannya)
P: Empat?
S: (Subjek menunjukkan empat bola yang dibulatkan sekali) Ini.
P: Sekarang boleh Afiq tulis ayat darab bagi ayat bahagi 28 ÷ 4
S: (Subjek menulis seperti berikut):

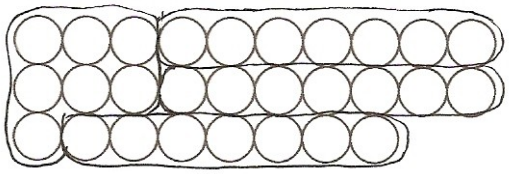
$$4 \times 7 = 28$$

P: Boleh Afiq jelaskan menggunakan gambar yang Afiq lukis tadi bagaimana Afiq dapat ayat ini (menunjukkan ayat 4 x 7 = 28) daripada ayat bahagi ini (menunjukkan ayat 28 ÷ 4)?
S: Empat guli darab tujuh (Subjek menjawab sambil menunjukkan gambar yang beliau lukis)
P: Empat dalam ni (menunjukkan 4 x 7 = 28) rujuk pada apa dalam lukisan?
S: (Subjek menunjukkan empat bulatan dalam satu kumpulan). Empat guli.
P: Yang ini (menunjukkan 7 pada ayat 4 x 7 = 28)?
S: (Subjek menunjukkan tujuh kumpulan yang terdapat pada gambar rajah) Kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan 28 pada ayat darab)?
S: Semua guli.
P: Afiq ada tak cara lain untuk menulis ayat darab?
S: (Subjek mendiamkan diri sebentar dan kemudian menulis seperti berikut):

$$7 \times 4 = 28$$

P: Ayat ini sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama tapi jawapan sama.
P: Apa yang tak sama?

S: Nombor dia (subjek menunjukkan angka 7 dan 4 pada kedua-dua ayat darab).
P: Nombor yang mana?
S: Yang ni empat (menunjukkan 4 pada 4 x 7 = 28) yang ini tujuh (menunjukkan 7 pada 7 x 4 = 28).
P: Jawapan dia sama tak?
S: Sama.
P: Baik. Sekarang boleh Afiq baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Boleh Afiq tunjuk macam mana dua puluh lapan bahagi tujuh?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Afiq lukis apa?
S: Dua puluh lapan bola.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa bola?
S: Tujuh.
P: Kenapa Afiq kumpulkan tujuh bola dalam satu kumpulan?
S: Sebab kena bahagi tujuh.
P: Lukisan ni sama tak dengan kedua-dua lukisan Afiq untuk bahagi empat tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab tadi ada empat bola dalam satu kumpulan (menunjukkan lukisan untuk bahagi empat) yang ini ada tujuh bola (menunjukkan lukisan untuk bahagi tujuh).
P: Apa lagi?
S: Tadi ada tujuh kumpulan (menunjukkan lukisan untuk bahagi empat), yang ni empat (menunjukkan lukisan baru).
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Yang sama…dua puluh lapan bola.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk yang ini (menunjukkan 28 ÷ 7)?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat bahagi tu dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$28 \div 7 = 4$$

P: Baik, sekarang boleh tulis ayat darab bagi ayat bahagi ini (menunjukkan ayat $28 \div 7 = 4$)?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$7 \times 4 = 28$$

P: Cuba baca.
S: Tujuh darab empat sama dengan dua puluh lapan.
P: Boleh Afiq jelaskan macam mana dapat ayat darab tu? Tujuh sama dengan apa pada lukisan?
S: Tujuh bola satu kumpulan.
P: Empat?
S: Empat kumpulan.
P: Dua puluh lapan?
S: Semua.
P: Apa kaitan ayat bahagi dengan ayat darab tu?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ayat darab dengan ayat bahagi ada kaitan tak?
S: Ada.
P: Kaitan macam mana?
S: Darab dengan bahagi terbalik.
P: Boleh tunjuk yang mana kaitan tadi pada ayat bahagi dan darab?
S: Yang ni soalan dia (menunjukkan dua puluh lapan pada ayat bahagi), yang ni jawapan (menunjukkan dua puluh lapan pada ayat darab).
P: Afiq ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$4 \times 7 = 28$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat $7 \times 4 = 28$)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni (menunjukkan $4 \times 7 = 28$) empat darab tujuh, yang ni (menunjukkan $7 \times 4 = 28$) tujuh darab empat.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Dua puluh lapan.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Ayat darab ni sama tak dengan ayat darab yang Afiq tulis untuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: Sama.

P: Kenapa ayat darab sama, sedangkan ayat bahagi tak sama?
S: Sebab dua puluh lapan bahagi empat dapat tujuh, dua puluh lapan bahagi tujuh dapat empat. Sebab tu ayat darab sama.

Dalam Petikan TA641, Afiq mentafsirkan ayat 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan bola bersaiz empat. Afiq menjelaskan bahawa saiz kumpulan pada lukisannya adalah empat kerana pembahagi pada ayat dua pulu lapan bahagi empat adalah empat.

Selain itu, Afiq menulis ayat darab 4 x 7 = 28 dan 7 x 4 = 28 merujuk ayat bahagi yang diberi. Subjek juga menulis ayat bahagi yang diberi oleh pengkaji dengan lengkap, iaitu 28 ÷ 4 = 7. Afiq juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya adalah berbeza kerana pendarab pertama dan kedua bagi kedua-dua ayat darab tersebut adalah berbeza. Subjek menjelaskan hasil darab bagi kedua-dua ayat darab tersebut adalah sama, iaitu dua puluh lapan. Selain itu, subjek berpendapat bahawa empat pada ayat darab merujuk saiz setiap kumpulan dalam lukisannya, manakala tujuh pada ayat darab merujuk bilangan kumpulan.

Bagi ayat 28 ÷ 7 pula, Afiq melukis empat kumpulan yang bersaiz tujuh. Subjek juga berpendapat bahawa lukisan tersebut tidak sama dengan lukisan yang dilakukannya bagi ayat 28 ÷ 4. Afiq berpendapat bahawa kedua-dua lukisan itu berbeza kerana kedua-duanya mempunyai saiz kumpulan dan bilangan kumpulan adalah berbeza.

Afiq juga menulis dua ayat darab bagi ayat bahagi 28 ÷ 7, iaitu 7 x 4 = 28 dan 4 x 7 = 28. Afiq melengkapkan ayat bahagi yang diberi oleh pengkaji dengan menulis ayat bahagi 28 ÷ 7 = 4. Afiq juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya tidak sama kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai pendarab pertama dan kedua yang berbeza, iaitu empat dan tujuh. Bagaimanapun, subjek berpendapat bahawa jawapan bagi ayat darab 4 x 7 dan 7 x 4 adalah sama kerana hasil darab kedua-dua ayat darab adalah dua puluh lapan. Afiq juga berpendapat bahawa darab adalah songsangan kepada bahagi.

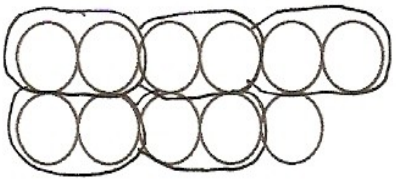
Selain itu, subjek menyamakan tujuh pada ayat darab dengan saiz kumpulan dalam lukisannya. Subjek juga menyamakan tujuh pada ayat darab dengan bilangan kumpulan, manakala dua puluh lapan pula disamakan dengan semua bola dalam lukisannya. Afiq juga berpendapat bahawa ayat darab yang ditulis bagi kedua-dua ayat bahagi 28 ÷ 4 dan 28 ÷ 7, adalah sama kerana dua puluh lapan mempunyai hasil darab yang sama.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Afiq mentafsirkan ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan yang bersaiz dua. Satu bola dibiarkan diluar kumpulan kerana saiznya kurang daripada dua. Petikan TA642 yang berikut menunjukkan tingkah laku Afiq semasa temu duga.

Petikan TA642

P: Cuba Afiq baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 2)?.
S: Sebelas bahagi dua.
P: Boleh Afiq jelaskan macam mana sebelas bahagi dua? Tunjuk secara lukisan ke?
S: (Subjek melukis seperti berikut pada kertas):

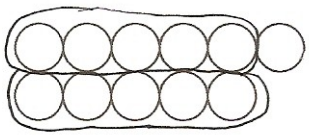


P: Afiq lukis apa?
S: Getah
P: Ada berapa kumpulan?
S: Lima.
P: Ada berapa getah dalam satu kumpulan?
S: Dua.
P: Kenapa Afiq kumpulkan dua getah?
S: Sebab soalan dia sebelas bahagi dua.
P: Kenapa getah ni (menunjukkan lukisan) tak dibulatkan?
S: Sebab ada satu saja.
P: Sepatutnya ada berapa, untuk dibulatkan?
S: Dua.
P: Jadi, apa jawapan bagi sebelas bahagi dua?
S: Lima baki satu.
P: Macam mana dapat lima baki satu?
S: (Subjek menulis seperti berikut) Lima baki satu.

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 2\,\big)\,11 \\ -\,\underline{10} \\ 1 \end{array}$$

P: Yang ini (menunjukkan bola yang tunggal) tak kira?
S: Baki satu.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk?
S: Tak ada.
P: Baik, boleh Afiq tulis ayat darab bagi yang ini (menunjukkan 11 ÷ 2)?
S: …Susah.
P: Boleh tulis tak?
S: Tak boleh.

P: Kenapa tak boleh?
S: Ada baki.
P: Kalau ada baki tak boleh tulis ayat darab ke?
S: Tak boleh.
P: Ada cara lain nak tunjuk 11 ÷ 2?
S: Tak ada.
P: Baik, cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 5)?
S: Sebelas bahagi lima.
P: Boleh jelaskan macam mana sebelas bahagi lima tu?
S: (Subjek melukis seperti berikut):



P: Yang ni apa?
S: Sebelas bola bahagi lima.
P: Yang ni berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Ada berapa bola dalam satu kumpulan?
S: Lima.
P: Yang ini kenapa tak bulatkan (menunjukkan satu bola yang tidak dibulatkan)?
S: Baki.
P: Jadi apa jawapan untuk ayat bahagi tadi?
S: Dua baki satu (subjek menulis seperti berikut).

$$\begin{array}{r} \underline{\;\;2\;\;} \\ 5\,\big)\,11 \\ -\,\underline{10} \\ 1 \end{array}$$

P: Boleh tulis ayat darab untuk yang ini?
S: Tak boleh sebab ada baki.
P: Kalau tak ada baki boleh tulis?
S: Kalau tak ada baki, boleh.
P: Ada cara lain nak tunjuk sebelas bahagi lima?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA642, Afiq mentafsir ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan getah yang bersaiz dua. Menurut Afiq, dua

getah diletakkan dalam satu kumpulan kerana pembahagi untuk ayat bahagi 11 ÷ 2 adalah dua. Afiq juga menjelaskan bahawa satu getah tidak dibulatkan sebagai satu kumpulan kerana saiznya kurang daripada pembahagi.

Selain itu, Afiq berpendapat bahawa jawapan bagi ayat bahagi 11 ÷ 2 adalah lima baki satu. Subjek juga berpendapat bahawa ayat darab tidak boleh ditulis sebagai tafsiran bagi ayat 11 ÷ 2 kerana pembahagian tersebut menghasilkan baki.

Bagi ayat 11 ÷ 5 pula, Afiq melukis dua kumpulan bola yang bersaiz lima. Lukisan tersebut juga mempunyai sebiji bola yang tidak dibulatkan. Afiq menjelaskan bahawa bola yang tidak dibulatkan tersebut merujuk saiz yang kurang daripada lima. Selain itu, Afiq juga berpendapat bahawa jawapan bagi pembahagian tersebut adalah dua baki satu. Subjek juga menunjukkan secara pembahagian panjang bagaimana sebelas bahagi lima menghasilkan dua baki satu. Afiq juga menjelaskan bahawa ayat darab tidak dapat ditafsir daripada ayat sebelas bahagi lima kerana ayat tersebut mempunyai baki.

Ayat Bahagi Membabitkan Sifar, Satu, Dan Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Afiq mentafsirkan ayat 3 ÷ 0 sebagai sifar. Subjek juga menjelaskan bahawa sebarang pembahagian yang membabitkan sifar

akan menghasilkan jawapan sifar. Petikan TA643 yang berikut memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan TA643

P: Boleh Afiq baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 0 ÷ 3)?
S: Kosong bahagi tiga
P: Boleh Afiq jelaskan macam mana kosong bahagi tiga tu?
S: Kosong bahagi tiga, kosong.
P: Kenapa Afiq rasa kosong?
S: Sebab kosong tak boleh bahagi, jadi jawapannya kosong.
P: Kosong tak boleh bahagi ke?
S: Tak boleh, sebab kosong tu tak ada nombor.
P: Boleh tunjuk secara lukisan macam tadi?
S: Tak boleh lukis sebab kosong.
P: Baik, boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$0 \div 3 = 0$$

P: Sekarang, boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$3 \times 0 = 0$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Tak ada.
P: Cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis 3 ÷ 0)?
S: Tiga bahagi kosong.
P: Yang ni apa jawapannya?
S: …Kosong juga.
P: Kenapa jawapannya kosong?
S: Sebab bahagi kosong, mesti kosong.
P: Boleh lukis tak yang ini?
S: Kosong tak boleh lukis.
P: Boleh tulis dengan lengkap ayat bahagi tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$3 \div 0 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Tiga bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Sekarang, boleh tulis ayat darab bagi ayat bahagi 3 ÷ 0?

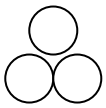
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$0 \times 3 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Kosong darab tiga sama dengan kosong.
P: Ada cara lain tulis ayat darab?
S: …Tak ada.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Kenapa sama? Ayat bahagi tak sama, kan?
S: Ayat bahagi tak sama, jawapan sama.
P: Berapa jawapan dia?
S: Kosong.
P: Sekarang, boleh baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 3 ÷ 3)?
S: Tiga bahagi tiga.
P: Berapa jawapannya?
S: Satu.
P: Macam mana dapat satu?
S: Tiga bahagi tiga sama dengan satu (subjek menulis yang berikut)

$$\begin{array}{r} \underline{1} \\ 3\,\overline{)\,3} \\ \underline{-\,3} \\ 0 \end{array}$$

P: Yang ni boleh lukis?
S: Boleh (subjek menjawab sambil melukis yang berikut).



P: Gambar apa ni?
S: Tiga bahagi tiga.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Satu kumpulan tu sama dengan apa pada ayat bahagi tu?
S: Jawapan tiga bahagi tiga.
P: Berapa jawapan dia?
S: Satu.
P: Satu tu sama dengan apa dalam lukisan?
S: Satu kumpulan.
P: Baik boleh tulis ayat bahagi dengan lengkap?
S: Boleh. (Subjek menulis seperti berikut).

$$3 \div 3 = 1$$

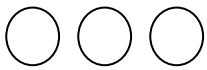
P: Cuba baca.
S: Tiga bahagi dengan tiga sama dengan satu.
P: Ada cara lain nak tunjuk $3 \div 3$?
S: Tak ada.
P: Boleh tulis ayat darab?
S: Boleh (subjek menulis seperti berikut).

$$3 \times 1 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Tiga darab satu sama dengan tiga.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Tak ada.
P: Kenapa Afiq tulis tiga darab satu?
S: Sebab tiga bahagi tiga sama dengan satu. Jadi tiga darab satu sama dengan tiga.
P: Tiga ni (menunjukkan tiga di hasil bahagi ayat bahagi) sama dengan tiga yang mana pada ayat darab?
S: Yang ni (menunjukkan tiga pada pendarab ayat darab).
P: Bukan tiga ni (menunjukkan tiga pada hasil darab)?
S: Tiga tu pun boleh juga.
P: Cuba Afiq baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 1$).
S: Tiga bahagi satu.
P: Tiga bahagi satu dapat berapa?
S: Tiga
P: Boleh lengkapkan ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$3 \div 1 = 3$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Boleh jelaskan macam mana tiga bahagi satu dapat tiga? Afiq boleh lukis.
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Afiq lukis apa?
S: Tiga bola.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Yang mana menunjukkan tiga ni dalam lukisan (menunjukkan tiga pada $3 \div 1$)?
S: Tiga bola.

P: Yang ni (menunjukkan satu pada 3 ÷ 1)?
S: Satu bola.
P: Ada cara lain tak nak tunjuk ayat tu?
S: Tak ada.
P: Sekarang, boleh tulis ayat darab bagi ni (menunjukkan 3 ÷ 1)?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$1 \times 3 = 3$$

P: Cuba baca?
S: Satu darab tiga sama dengan tiga.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Tak ada.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat darab tadi?
S: Tak sama, tapi jawapan sama.

Dalam Petikan TA643, Afiq berpendapat bahawa sifar dibahagi dengan sebarang nombor akan menghasilkan jawapan sifar. Subjek juga menjelaskan bahawa pembahagian tersebut tidak dapat diwakilkan secara lukisan kerana tidak dapat melukis sifar. Subjek juga melengkapkan ayat bahagi 0 ÷ 3 dengan menulis 0 ÷ 3 = 0. Selain itu, subjek menulis ayat darab 3 x 0 = 0 sebagai tafsiran kepada ayat bahagi 0 ÷ 3 = 0.

Bagi ayat 3 ÷ 0 pula, Afiq berpendapat bahawa jawapannya adalah sifar. Subjek juga berpendapat bahawa pembahagian yang membabitkan sifar adalah sifar. Afiq juga menjelaskan bahawa ayat bahagi tidak dapat ditafsir secara lukisan kerana menurut Afiq, sifar tidak dapat dilukis. Afiq juga mentafsir ayat 3 ÷ 0 dengan menulis ayat darab 0 x 3 = 0.

Bagi ayat 3 ÷ 3 pula, Afiq melukis satu kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga menjelaskan saiz kumpulan merujuk pembahagi. Selain

itu, Afiq menulis ayat darab 3 x 1 = 3 sebagai tafsiran kepada 3 ÷ 3. Subjek juga menjelaskan bahawa tiga pada hasil darab 3 x 1 = 3 adalah sama dengan tiga disebelah kira ayat 3 ÷ 3.

Afiq mentafsir ayat 3 ÷ 1 dengan melukis tiga kumpulan bola yang bersaiz satu. Afiq juga menulis ayat darab 1 x 3 = 3 sebagai tafsiran kepada ayat bahagi. Subjek juga melengkapkan ayat yang diberi oleh pengkaji dengan menulis 3 ÷ 1 = 3. Subjek juga menjelaskan perkaitan antara lukisan dengan ayat darab yang ditulisnya. Afiq berpendapat bahawa saiz kumpulan merujuk pembahagi. Selain itu subjek juga berpendapat bahawa ayat darab yang ditulis bagi 3 ÷ 3 dan 3 ÷ 1 adalah berbeza kerana mempunyai pendarab yang berbeza. Bagaimanapun, subjek menjelaskan hasil darab bagi kedua-dua ayat adalah sama, iaitu tiga.

Ayat Darab

Afiq menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2 sebagai tafsiran bagi ayat darab 4 x 2. Subjek juga melukis dua kumpulan yang bersaiz empat bagi mewakili ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2. Petikan TA644 yang berikut memaparkan tingkah laku Afiq semasa temu duga.

Petikan TA644

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 4 x 2) Boleh Afiq baca yang ini?

S: Empat darab dua.

P: Empat darab sama dengan?
S: Empat darab dua sama dengan lapan.
P: Boleh Afiq tulis ayat darab tadi dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$4 \times 2 = 8$$

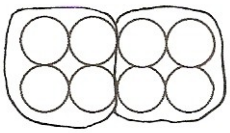
P: Boleh Afiq baca?
S: Empat darab dua sama dengan lapan.
P: Baik, sekarang boleh Afiq tulis ayat bahagi daripada ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$8 \div 4 = 2$$

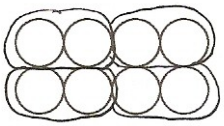
P: Cuba baca?
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Kenapa Afiq tulis lapan bahagi empat?
S: Sebab lapan tu empat darab dua.
P: Ada cara lain tak nak tulis ayat bahagi?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut).

$$8 \div 2 = 4$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ni bahagi lapan bahagi dua, yang ni (menunjukkan ayat bahagi $8 \div 4 = 2$) lapan bahagi empat.
P: Empat pada ayat empat darab dua tu sama dengan apa pada ayat bahagi?
S: Empat ni (menunjukkan nombor 4 pada $8 \div 4 = 2$) dan jawapan ni (menunjukkan nombor 4 pada $8 \div 2 = 4$).
P: Lapan?
S: Lapan ni (subjek menunjukkan nombor 8 pada kedua-dua ayat bahagi).
P: Apa kaitan ayat bahagi dengan ayat darab ni?
S: Bahagi kalau terbalik jadi darab.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Boleh Afiq tunjuk secara lukisan lapan bahagi empat?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Kenapa Afiq bentuk dua kumpulan?
S: Sebab jawapan dia dua.
P: Boleh tak kita wakilkan lukisan tadi untuk ayat ni (menunjukkan ayat 8 ÷ 2 = 4)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab yang ni (menunjukkan lukisan) untuk lapan bahagi empat.
P: Kalau macam tu boleh Afiq lukis untuk lapan bahagi dua?
S: Boleh (subjek melukis seperti berikut).



P: Yang ni berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Dua.
P: Yang mana empat dalam lukisan?
S: Ini (Subjek menunjukkan empat kumpulan).
P: Lukisan ni sama dengan yang tadi?
S: Tak sama. Kumpulan dengan bola dalam dia tak sama.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada
P: Cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 2 x 4)?
S: Dua darab empat.
P: Sama dengan?
S: Lapan.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$8 \div 2 = 4$$

P: Boleh baca?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Kenapa Afiq tulis lapan?
S: Sebab dua darab empat sama dengan lapan.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut).

$$8 \div 4 = 2$$

P: Ayat yang ini (menunjukkan 8 ÷ 4 = 2) sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat 8 ÷ 2 = 4)?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Sebab yang ni lapan bahagi empat (menunjukkan 8 ÷ 4 = 2) yang ni lapan bahagi dua (menunjukkan ayat 8 ÷ 2 = 4).
P: Baik. Empat ni (menunjukkan empat pada ayat 8 ÷ 4 = 2) sama dengan yang mana pada ayat darab?
S: Empat (subjek menunjukkan empat pada ayat 2 x 4).
P: Dua?
S: Dua ni (subjek menunjukkan dua pada ayat 2 x 4).
P: Lapan?
S: Tak ada. Tapi dua darab empat sama dengan lapan.
P: Ada tak cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA644, Afiq menulis ayat bahagi 8 ÷ 4 = 2 sebagai tafsiran bagi ayat darab 4 x 2. Afiq juga melengkapkan ayat yang diberi oleh pengkaji dengan menulis ayat 4 x 2 = 8. Selain itu, subjek juga menjelaskan empat yang terdapat pada ayat 4 x 2 adalah sama dengan empat yang terdapat pada pembahagi ayat 8 ÷ 4 = 2. Subjek juga menjelaskan bahawa angka dua yang terdapat pada 4 x 2 pula adalah sama dengan dua yang terdapat pada ayat 8 ÷ 4 = 2. Afiq juga menulis satu lagi ayat bahagi iaitu 8 ÷ 2 = 4 sebagai tafsiran bagi ayat 4 x 2.

Afiq juga mentafsir ayat 4 x 2 secara lukisan. Lukisan Afiq itu mempunyai dua kumpulan yang bersaiz empat. Subjek menjelaskan setiap kumpulan bersaiz empat kerana pembahaginya adalah empat. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa ayat 8 ÷ 2 = 4 tidak boleh mewakili lukisannya yang mempunyai dua kumpulan

bersaiz empat itu. Bagi ayat 8 ÷ 2 = 4 itu, Afiq mewakilkannya dengan melukis empat kumpulan yang bersaiz. Selain itu, subjek juga menjelaskan bahawa jawapan bagi lapan bahagi dua adalah empat kerana terdapat empat kumpulan dalam lukisan beliau.

Afiq mentafsirkan ayat 2 x 4 pula, dengan menulis ayat bahagi 8 ÷ 2 = 4. Subjek juga melengkapkan ayat 2 x 4 dengan menulis ayat 2 x 4 = 8. Selain itu, subjek juga menulis satu ayat bahagi lain iaitu, 8 ÷ 4 = 2 sebagai tafsiran kepada ayat 2 x 4. Afiq juga menjelaskan bahawa kedua-dua ayat bahagi yang ditulis sebagai tafsiran kepada ayat 2 x 4 adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Afiq juga berpendapat bahawa nombor lapan ditulis sebelum simbol bahagi kerana hasil darab dua dan empat akan menghasilkan lapan. Selain itu, Afiq juga berpendapat bahawa ayat bahagi merupakan songsangan kepada ayat darab.

Petikan TA645

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 6 x 4) cuba Afiq baca yang ini?

S: Enam darab empat.
P: Enam darab empat sama dengan berapa?
S: (Subjek menulis yang berikut dan menjawab) Dua puluh empat.

$$\begin{array}{r} 6 \\ \underline{\times 4} \\ \underline{24} \end{array}$$

P: Baik, sekarang boleh tulis ayat darab tu dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

6 x 4 = 24

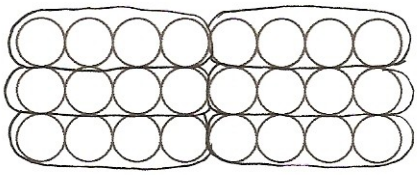
P: Boleh tak Afiq tulis ayat bahagi untuk ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 6 = 4$$

P: Cuba baca?
S: Dua puluh empat bahagi enam sama dengan empat.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Ada (subjek menulis seperti berikut)

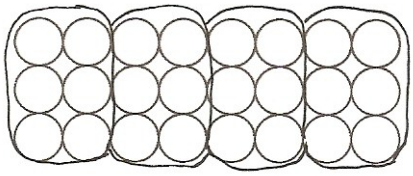
$$24 \div 4 = 6$$

P: Cuba baca yang ini?
S: Dua puluh empat bahagi empat sama dengan enam.
P: Sama tak kedua-dua ayat?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Yang ni enam (menunjukkan enam pada 24 ÷ 6 = 4) yang ni empat (menunjukkan empat pada 24 ÷ 4 = 6).
P: Lagi?
S: Yang ni empat (menunjukkan empat pada 24 ÷ 6 = 4) yang ni enam (menunjukkan enam pada 24 ÷ 4 = 6).
P: Baik, kenapa Afiq tulis dua puluh empat di sebelah kiri?
S: Sebab dua puluh empat tu enam darab empat. Jadi dua puluh empat bahagi enam dapat empat.
P: Boleh Afiq tunjuk macam mana dua puluh empat bahagi empat dapat enam?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Afiq lukis apa?
S: Guli.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Enam.
P: Kenapa buat enam kumpulan?
S: Sebab jawapan dia enam.
P: Jawapan sama dengan kumpulan ke?
S: Ya.
P: Yang ini (menunjukkan nombor empat pada ayat bahagi)?
S: Empat guli (menunjukkan satu kumpulan).

P: Lukisan ni boleh wakili ayat ini tak (menunjukkan ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4)?
S: Tak, lukisan dia macam ni (subjek melukis seperti berikut).



P: Berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Yang ni untuk ayat mana?
S: Ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 6 = 4).
P: Afiq ada cara lain untuk tunjuk ayat bahagi tadi?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA645, Afiq mentafsirkan ayat 6 x 4 dengan menulis ayat 24 ÷ 6 = 4. Subjek juga menulis satu lagi ayat bahagi sebagai tafsiran bagi ayat darab tersebut. Afiq melengkapkan ayat darab yang diberi oleh pengkaji dengan menulis 6 x 4 = 24. Selain itu, subjek juga melukis empat kumpulan bersaiz enam bagi mewakili ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4. Subjek juga berpendapat bahawa saiz satu kumpulan merujuk pembahagi pada ayat bahagi. Subjek juga menjelaskan bahawa ayat 24 ÷ 4 = 6 tidak boleh mewakili lukisan tersebut kerana pembahaginya tidak sama dengan saiz satu kumpulan.

Bagi mewakili ayat 24 ÷ 4 = 6, Afiq melukis enam kumpulan bersaiz empat. Afiq jugq berpendapat bahawa saiz kumpulan adalah sama dengan pembahagi pada ayat bahagi iaitu, empat.

Petikan TA646

P: Boleh Afiq baca yang ini? (menunjukkan kad yang tertulis ayat 9 x 0)
S: Sembilan darab kosong.
P: Sembilan darab kosong dapat berapa?
S: Kosong.
P: Kenapa kosong?
S: Sebab semua nombor darab dengan kosong sama dengan kosong.
P: Afiq boleh lengkapkan ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$9 \times 0 = 0$$

P: Boleh tulis ayat bahagi bagi ayat tu?
S: (Subjek menulis empat ayat bahagi seperti berikut).

$$0 \div 9 = 0$$

P: Boleh Afiq baca?
S: Kosong bahagi sembilan sama dengan kosong.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: …Tak ada.
P: Kenapa Afiq tulis kosong bahagi sembilan?
S: Sebab sembilan darab kosong dapat kosong, jadi kena tulis kosong bahagi sembilan.
P: Kenapa tak tulis sembilan di sebelah kiri?
S: Tak boleh sebab sembilan darab kosong sama dengan kosong.
P: Jadi, tulis kosong di sebelah kiri?
S: Ya.
P: Boleh tunjuk secara lukisan?
S: Tak boleh sebab ada kosong.
P: Kalau ada kosong tak boleh lukis?
S: Tak boleh.

Dalam Petikan TA646 Afiq mentafsir ayat darab 9 x 0 dengan menulis ayat bahagi $0 \div 9 = 0$. Afiq juga melengkapkan ayat darab yang diberi oleh pengkaji dengan menulis ayat $9 \times 0 = 0$. Selain itu, Afiq menjelaskan bahawa sebarang operasi bahagi membabitkan sifar akan menghasilkan jawapan sifar. Subjek juga

berpendapat bahawa pembahagian yang membabitkan sifar tidak dapat ditafsir melalui lukisan kerana sifar tidak dapat dilukis. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa untuk menulis ayat bahagi, sifar patut ditulis di sebelah kiri simbol bahagi kerana hasil darab sembilan dan sifar adalah sifar dan bukan sembilan.

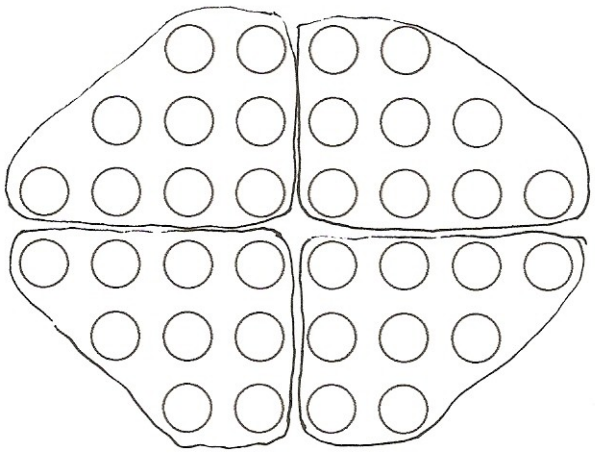
Penyelesaian Masalah

Bentuk Diskrit

Afiq menyelesaikan masalah 36 ÷ 4 dengan membulatkan sembilan guli bagi membentuk empat kumpulan. Beliau juga membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan kumpulan sebagai penyelesaian kepada masalah 36 ÷ 4. Petikan PM651 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Afiq.

Petikan PM651

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) gambar ni ada banyak guli. Boleh Afiq bahagi empat guli-guli ini? Afiq boleh lukis pada gambar tu.
S: (Subjek menghitung kesemua guli yang terdapat pada gambar rajah secara senyap dan melukis pada gambar tersebut seperti berikut).

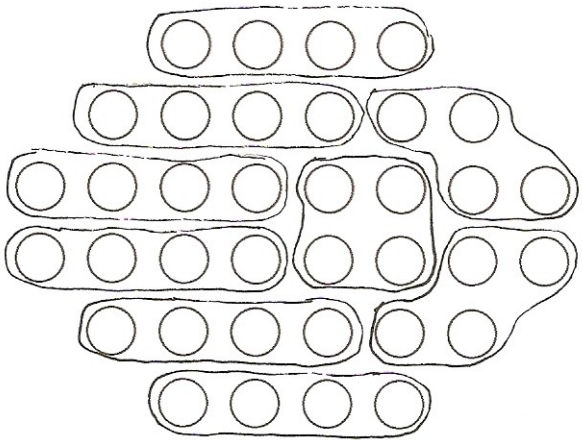


P: Afiq dah bahagi empat?

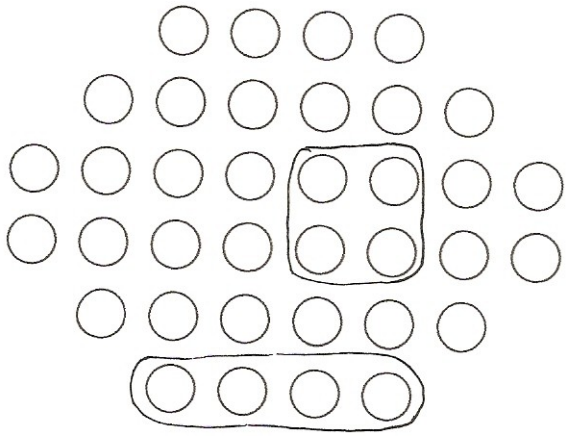
S: Dah.
P: Ada berapa guli kesemuanya?
S: Tiga puluh enam.
P: Jadi tiga puluh enam bahagi empat dapat berapa?
S: Sembilan.
P: Macam mana Afiq dapat sembilan?
S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan (subjek menulis yang berikut).

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4\,\overline{)\,36} \\ -\,\underline{36} \\ 0 \end{array}$$

P: Dalam gambar tu apa yang menunjukkan sembilan?
S: (Subjek menunjukkan satu kumpulan) Satu bulatan.
P: Kenapa Afiq membulatkan macam tu?
S: Sebab bahagi empat, ini bahagi empatlah (subjek menunjukkan kesemua guli yang telah dibahagi kepada empat bahagian).
P: Kenapa Afiq bahagikan gambar tu kepada empat bahagian?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kalau bahagi tiga macam mana?
S: Bahagi kepada tiga bahagian.
P: Kalau bahagi dua?
S: Bahagi kepada dua bahagian.
P: Balik kepada bahagi empat tadi, boleh Afiq tunjuk cara lain bagaimana guli-guli tu dibahagi empat?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ada cara lain tak untuk bahagi empat?
S: Ada.
P: Boleh tunjuk (memberikan kertas yang lain)?
S: (Subjek membulatkan gambar guli yang diberi seperti berikut).



P: Boleh beritahu cikgu apa yang Afiq buat?
S: Bahagi empat.
P: Dah bahagi empat apa jawapannya?
S: (Subjek menghitung semula semua guli-guli yang terdapat dalam gambar rajah). Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan sembilan.
P: Bagaimana Afiq tahu sembilan? Apa kaitan dengan gambar rajah?
S: (Subjek menghitung kumpulan yang dibulatkan dan menjawab). Kumpulan ada sembilan.
P: Apa kaitan jawapan bagi tiga puluh enam bahagi empat dengan kumpulan yang Afiq bulatkan tu?
S: Sama.
P: Sama macam mana?
S: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan kumpulan (subjek menunjukkan kumpulan yang telah beliau bentuk).
P: Macam mana pula dengan gambar tadi, jawapan bagi tiga puluh enam bahagi empat terletak di mana (menunjukkan gambar rajah yang telah subjek bulatkan sebelumnya)?
S: Jawapan dia dalam satu bulatan (subjek menunjukkan guli-guli yang terdapat dalam satu bulatan pada gambar rajah awal).
P: Sama tak kedua-duanya (menunjukkan kedua-dua gambar rajah)?
S: Tak.
P: Kenapa tidak?
S: Yang ni (menunjukkan gambar terbaru) ada sembilan kumpulan, yang ini (menunjukkan gambar sebelumnya) ada empat kumpulan.
P: Tapi kedua-duanya cikgu suruh bahagi empat, kan?
S: Dua-dua pun bahagi empat, tapi cara dia tak sama.
P: Ada tak apa-apa persamaan antara kedua-dua gambar tu?
S: ...Semua ada tiga puluh enam guli.
P: Lagi?
S: (Subjek mendiamkan diri sebentar dan menjawab). Tak ada.
P: Kalau tak ada. Kita tengok balik gambar ini (menunjukkan gambar bagi ‘bahagi empat’ yang terbaru). Di sini Afiq membulatkan secara empat segi, di sini berbentuk lurus. Adakah kedua-duanya sama (menunjukkan kumpulan yang berbentuk segi empat dan berbentuk lurus)?



S: (Subjek berfikir sebentar dan menjawab). Sama.
P: Kenapa sama?
S: Sebab semuanya ada empat guli.
P: Tapi bentuk bulatan tak sama.
S: Bentuk bulatan saja tak sama, dalam sama.
P: Baik. Boleh Afiq tulis ayat bahagi untuk gambar ni (menunjukkan gambar yang terbaru dan contoh beberapa ayat bahagi)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 4 = 9$$

P: Untuk gambar tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 9 = 4$$

P: Dah siap?
S: (Subjek memadamkan ayat tadi dan menulis seperti berikut).

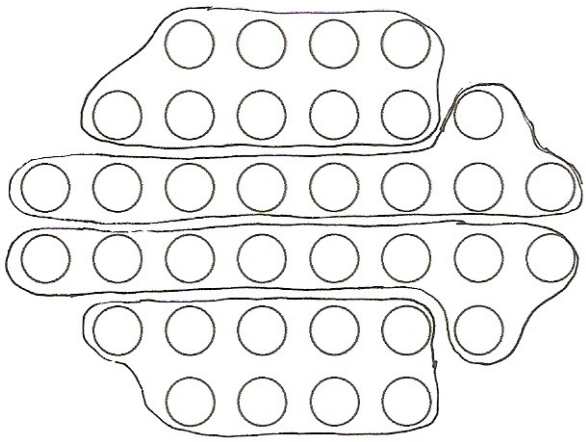
$$36 \div 4 = 9$$

P: Ayat ini sama tak dengan ayat yang Afiq tulis tadi?
S: Sama.
P: Ayat sama. Macam mana dengan kedua-dua gambar rajah. Adakah sama kedua-duanya?
S: Gambar tak sama.
P: Boleh Afiq tulis ayat lain bagi gambar ini (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan dalam sembilan kumpulan).
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 9 = 4$$

P: Ayat bahagi ini sama tak dengan ayat bahagi tadi?

S: Tak
P: Kenapa tak? Kedua-dua ayat untuk gambar yang sama, kan?
S: Yang ni (menunjukkan ayat yang baru ditulis) bahagi sembilan. Yang ni (menunjukkan ayat ditulis sebelumnya) bahagi sembilan.
P: Tadi, cikgu minta Afiq bahagi empat, kan?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Boleh Afiq tunjuk bagaimana tiga puluh enam bahagi sembilan?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



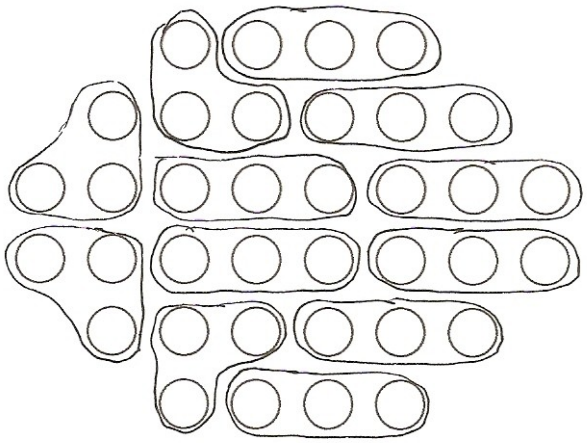
P: Gambar rajah ni sama dengan gambar rajah tadi. Ini bahagi empat atau bahagi sembilan?
S: Bahagi sembilan. Bahagi empat pun sama.
P: Boleh Afiq tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 9 = 4$$

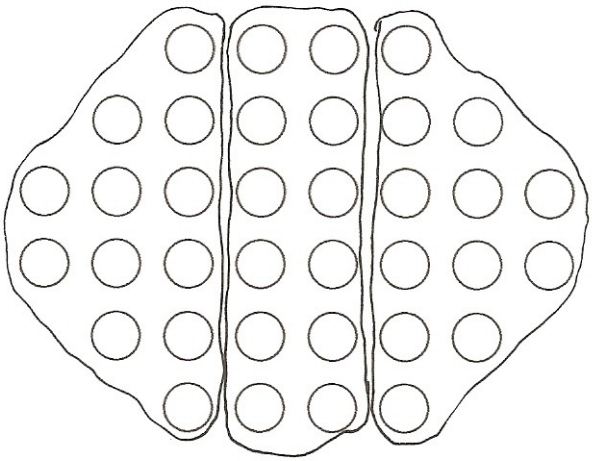
P: Boleh tulis ayat lain bagi gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang baru disiapkan oleh subjek).
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 4 = 9$$

P: Sama tak kedua-dua ayat ini?
S: Lain sikit.
P: Lain macam mana?
S: Ini sama (menunjukkan 36), empat dan sembilan (menunjukkan 4 dan 9 pada ayat tersebut), tak sama.
P: Sekarang boleh tak Afiq bahagi tiga?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada gambar rajah yang di beri).



P: Di sini Afiq bulatkan tiga. Kenapa Afiq bulatkan tiga?
S: Sebab nak bahagi tiga.
P: Ada cara lain untuk bahagi tiga?
S: (Subjek mengira agak lama dan melukis seperti berikut).



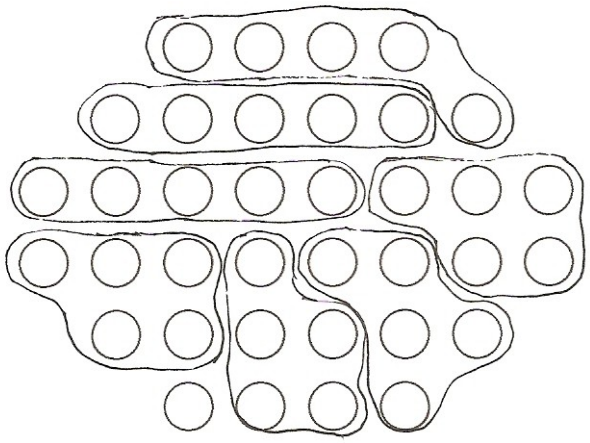
P: Dah siap?
S: Dah.
P: Gambar ini sama tak dengan gambar tadi?
S: Tak sama
P: Kenapa tak sama? Kedua-duanya bahagi tiga, kan?
S: Kumpulan tak sama. Yang ini (menunjukkan gambar rajah yang baru dilukis) ada tiga kumpulan. Yang ni ada dua belas (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai dua belas kumpulan).
P: Boleh Afiq tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 3 = 12$$

P: Ada tak ayat lain yang boleh Afiq tulis untuk gambar rajah tu?.
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 12 = 3$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama. Yang ni dua belas yang ni tiga (menunjukkan 12 dan 3 pada ayat yang baru ditulisnya). Yang ni tiga, yang ni dua belas (menunjukkan ayat yang ditulis sebelumnya).
P: Yang ni (menunjukkan angka 12 pada ayat yang baru ditulis oleh subjek) mewakili bahagian mana pada gambar rajah?
S: Bulatan ini (subjek menunjukkan kumpulan bersaiz tiga yang telah dibulatkannya).
P: Yang ni (menunjukkan angka 3 pada ayat yang terakhir ditulis oleh subjek)?
S: Tiga guli (subjek menunjukkan guli yang terdapat setiap bulatan).
P: Afiq ada cara lain bahagi tiga?
S: …Tak ada.
P: Sekarang boleh tak Afiq bahagi lima?
S: (Subjek membulatkan gambar rajah yang diberi seperti berikut)



P: Dah bahagi lima?
S: Dah.
P: Boleh bertahu cikgu, kenapa Afiq kumpulkan lima guli dalam satu kumpulan?
S: Sebab yang ini nak bahagi lima. Kena kumpul lima guli
P: Di sini ada satu guli yang Afiq tak bulatkan. Kenapa agaknya? (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan)?
S: Yang tu lebih. Baki.
P: Baki macam mana?

S: Semua guli bahagi lima ada baki satu.
P: Semua ada berapa?
S: Tiga puluh enam.
P: Tiga puluh enam boleh bahagi lima tak?
S: Boleh. (Subjek menulis seperti berikut).

$$\begin{array}{r} 7 \\ 5\,\overline{)\,36} \\ \underline{-\,35} \\ 1 \end{array}$$

P: Sekarang boleh tak Afiq tuliskan ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menuliskan seperti berikut).

$$36 \div 5 = 7 \text{ baki } 1$$

P: Macam mana tahu jawapannya tujuh baki satu?
S: Ada tujuh kumpulan dan satu guli lebih.
P: Boleh Afiq tulis ayat bahagi lain bagi gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang dibahagi lima).
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Ada tak ayat lain untuk gambar rajah tu?
S: Tak ada.
P: Afiq boleh tunjuk cara lain untuk bahagi lima?
S: (Subjek berfikir agak lama).
P: Ada tak cara lain untuk bahagi lima?
S: Tak ada.

Pada bahagian awal Petikan PW651, Afiq menyelesaikan 36 ÷ 4 dengan membentuk empat kumpulan bersaiz sembilan. Subjek juga menentukan hasil bahagi bagi 36 ÷ 4 dengan menghitung bilangan guli yang terdapat dalam satu kumpulan. Subjek juga menunjukkan hasil bahagi bagi tiga puluh enam bahagi empat secara pembahagian panjang. Afiq juga berpendapat bahawa bahagi empat boleh dilakukan dengan mengagihkan kesemua guli kepada empat bahagian. Bagi 36 ÷ 3 dan 36 ÷ 2 pula, Afiq berpendapat bahawa guli tersebut diagihkan kepada tiga dan dua bahagian masing-masing.

Selain itu, Afiq juga menunjukkan satu lagi cara untuk membahagi empat iaitu dengan membentuk sembilan kumpulan bersaiz empat. Subjek menentukan hasil bahagi dengan menghitung bilangan kumpulan bersaiz empat yang terbentuk. Selain itu, Afiq juga menulis ayat bahagi 36 ÷ 9 = 4 dan 36 ÷ 4 = 9 bagi mewakili gambar yang ditandanya bagi bahagi empat. Subjek juga berpendapat bahawa walaupun bentuk bagaimana guli tersebut dikumpulan berbeza namun bila bilangan guli di dalamnya adalah sama. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa ayat bahagi 36 ÷ 9 = 4 dan 36 ÷ 4 = 9 adalah berbeza kerana kedua-duanya mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang tidak sama.

Afiq juga menulis ayat bahagi 36 ÷ 3 = 12 bagi mewakili gambar rajah yang perlu dibahagi tiga. Subjek juga berpendapat bahawa ayat tersebut boleh mewakili gambar rajah yang perlu dibahagi dua belas. Selain itu, Afiq juga menulis ayat 36 ÷ 12 = 3, yang menurutnya boleh mewakili gambar rajah yang perlu dibahagi tiga ataupun dua belas.

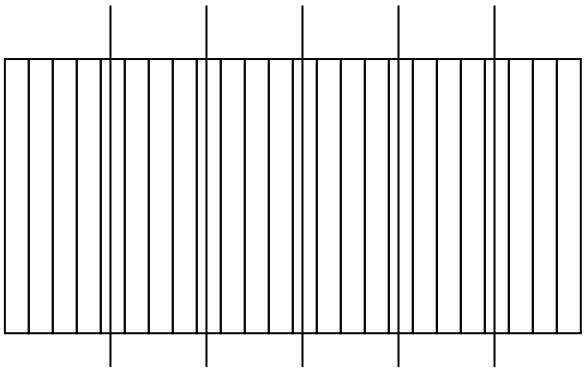
Bagi ayat bahagi lima pula, Afiq menunjukkan secara pembahagian panjang bagi menjelaskan bahawa pembahagian tersebut menghasilkan baki. Subjek juga menulis ayat 36 ÷ 5 = 7 baki 1 bagi mewakili gambar rajah yang perlu dibahagi lima. Subjek juga menanda tujuh kumpulan bersaiz lima bagi mewakili pembahagian tersebut. Dalam gambar rajah tersebut sebiji guli tidak dibulatkan dan subjek menamakannya sebagai baki.

Bentuk Selanjar

Afiq menyelesaikan masalah yang membabitkan gambar rajah berbentuk selanjar yang perlu dibahagi empat dengan menggariskan setiap empat jalur yang telah beliau hitung. Beliau juga menjelaskan bahawa jawapan bagi masalah 24 ÷ 4 dapat diperolehi dengan menghitung bilangan kumpulan yang dapat dibentuk. Petikan PM652 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek

Petikan PM652

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai 24 petak). Cuba lihat kad ini. Apa yang terdapat pada kad ini?
S: Garis.
P: Baik. Sekarang boleh Afiq bahagi empat garis-garis tu?
S: (Subjek menggariskan setiap empat jalur yang terdapat pada gambar rajah. Berikut adalah pembahagian yang dibuat oleh subjek).



P: Dah siap?
S: (Subjek mengangguk).
P: Apa Afiq buat pada gambar rajah?
S: Kumpulkan empat sebab bahagi empat.
P: Kumpulkan empat. Baik, semua ada berapa jalur?
S: Dua puluh empat.
P: Baik, dua puluh empat bahagi empat dapat berapa?
S: Enam.
P: Macam mana Afiq dapat enam?
S: Dua puluh empat bahagi empat sama dengan enam.

P: Dalam gambar rajah, yang mana menunjukkan jawapan kepada dua puluh empat bahagi empat?
S: Kumpulan.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Enam.
P: Boleh Afiq tuliskan ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 4 = 6$$

P: Boleh beritahu cikgu yang ini (menunjukkan angka 4 pada ayat bahagi) mewakili apa pada gambar rajah?
S: Empat mewakili empat garis dalam satu kumpulan (menunjukkan satu kumpulan yang beliau lukis).
P: Yang ini (menunjukkan angka 6 pada ayat bahagi)?
S: Enam ... kumpulan ada enam.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi untuk gambar rajah tadi?
S: (Subjek berfikir seketika dan menjawab). Tak ada.
P: Tak ada cara lain ke untuk menulis ayat bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Betul, tak ada?
S: Tak ada.
P: Baik. Ada tak cara lain untuk bahagi empat gambar rajah tadi?
S: (Subjek berfikir sebentar dan menjawab) tak ada.
P: Boleh Afiq buat cerita berkaitan dengan gambar rajah yang Afiq bulatkan tadi?
S: Ada dua puluh empat bola.....nak bagi enam orang. Semua orang dapat empat.
P: Seorang dapat berapa?
S: Empat.
P: Boleh Afiq tulis ayat bahagi untuk cerita Afiq tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

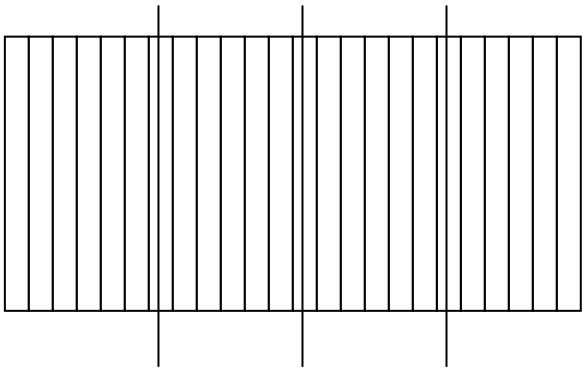
$$24 \div 4 = 6$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi untuk cerita Afiq tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 6 = 4$$

P: Kenapa Afiq tulis bahagi enam?
S: Sebab ada enam kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 4 pada ayat bahagi) mewakili apa?
S: Empat mewakili empat garis dalam kumpulan.
P: Kedua-dua ayat bahagi tu sama tak?

S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ini enam (menunjukkan 6 pada kedua-dua ayat) yang ni empat (menunjukkan angka 4 pada ayat bahagi).
P: Apa yang sama untuk kedua-dua ayat?
S: Dua puluh empat (menunjukkan nombor 24 pada ayat).
P: Apa lagi yang sama?
S: …Tak ada.
P: Sekarang boleh Afiq bahagi gambar rajah tadi kepada enam?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Dah siap ke?
S: Sudah.
P: Boleh beritahu cikgu apa yang Afiq buat?
S: Dua puluh empat bahagi enam sama dengan empat.
P: Kenapa Afiq kata ini bahagi enam?
S: Bahagi enam sebab dalam satu kumpulan ada enam.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

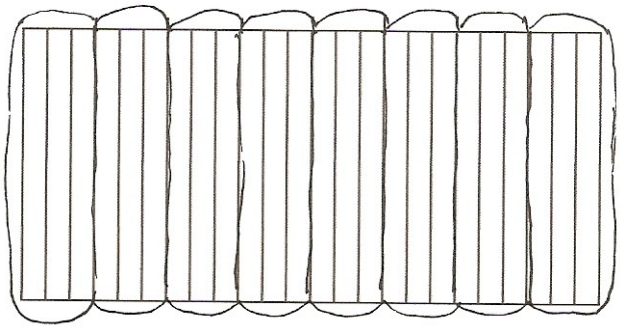
$$24 \div 6 = 4$$

P: Ada tak cara lain untuk bahagi enam?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 4 = 6$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama. Yang ni empat (menunjukkan angka 4 pada ayat bahagi) yang ni enam (menunjukkan angka 6 pada ayat bahagi).
P: Ada lagi perbezaan?

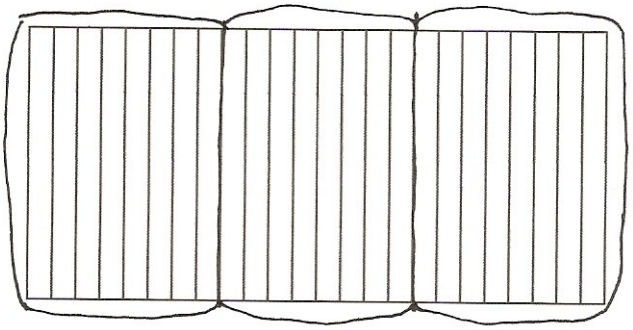
S: Tak ada.
P: Cuba bandingkan dengan gambar rajah tadi. Ada persamaan tak antara kedua-dua gambar rajah tadi?
S: Yang ini (menunjukkan gambar rajah yang baru dilukis) ada empat kumpulan. Yang ni (menunjukkan gambar rajah yang dilukis sebelumnya) ada enam kumpulan.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Tak ada lagi.
P: Sekarang boleh tunjuk bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Dah siap?
S: Dah
P: Boleh beritahu cikgu apa yang Afiq buat?
S: Bulatkan tiga sebab kena bahagi tiga.
P: Boleh Afiq bahagi tiga dengan cara lain?
S: (Subjek berfikir sebentar dan menjawab). Sama. Tak ada cara lain.
P: Baik, boleh tuliskan ayat untuk bahagi tiga?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 3 = 8$$

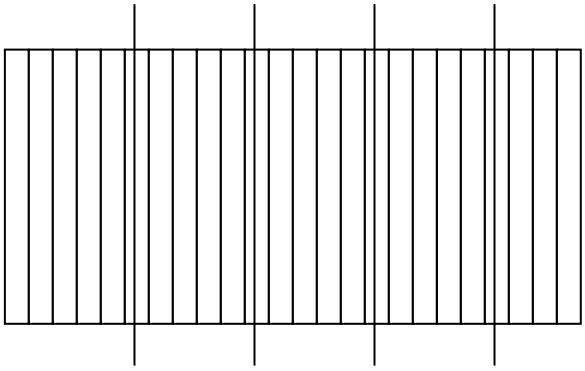
P: Ada cara lain untuk tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Macam mana Afiq dapat jawapannya?
S: Dua puluh empat bahagi tiga sama dengan lapan.
P: Dalam gambar rajah tu di mana jawapannya?
S: Kumpulan ada lapan.
P: Cuba tengok gambar rajah yang Afiq bulatkan tadi, ada tak cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Sama macam ini (subjek menunjukkan ayat yang telah ditulisnya).
P: Sekarang boleh Afiq bahagi lapan?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut).



P: Gambar rajah ini sama tak dengan gambar rajah tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni bahagi lapan (menunjukkan gambar rajah yang baru dulukis) yang ini bahagi tiga (menunjukkan gambar rajah yang elah dilukis sebelumnya).
P: Apa lagi yang beza?
S: Yang ni tiga kumpulan (menunjukkan gambar rajah dengan tiga kumpulan) yang ni ada lapan kumpulan (menunjukkan gambar rajah yang mempunyai lapan kumpulan).
P: Boleh Afiq tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis ayat bahagi seperti berikut).

$$24 \div 8 = 3$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: ....Tak ada.
P: Ayat ini sama tak dengan ayat yang Afiq tulis tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Yang ini (menunjukkan ayat $24 \div 3 = 8$) bahagi tiga, yang ini (menunjukkan ayat $24 \div 8 = 3$) bahagi lapan.
P: Boleh tak kita gunakan ayat ini (menunjukkan ayat $24 \div 3 = 8$) bagi gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan)?
S: Boleh juga.
P: Kenapa Afiq rasa boleh?
S: Sebab yang ini pun (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan dalam tiga kumpulan) bahagi tiga.
P: Jadi ada tak cara lain untuk untuk bahagi lapan gambar rajah tadi?
S: Ada. Sama macam yang ini (menunjukkan gambar rajah yang dikumpulkan kepada lapan bahagian).
P: Sekarang boleh Afiq bahagi lima?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Di sini ada yang Afiq tidak bulatkan (menunjukkan kumpulan yang tidak di tanda)?
S: Yang tu ada empat garis saja.
P: Sepatutnya ada berapa?
S: Lima, sebab nak bahagi lima.
P: Baik, bahagi lima apa jawapannya?
S: Empat baki empat.
P: Macam mana Afiq dapat empat baki empat?
S: Dua puluh empat bahagi lima sama dengan empat, baki empat.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 5 = 4 \text{ baki } 4$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Ada tak cara lain untuk bahagi lima gambar rajah tadi?
S: Tak ada.
P: Baik. Dalam gambar rajah ini, yang ini (menunjukkan empat jalur yang tidak dibulatkan) merujuk kepada apa pada ayat ni (menunjukkan ayat bahagi yang subjek tulis)?
S: Jawapan … baki empat.
P: Yang ini pula (menunjukkan 4 selepas ‘ = ’ pada ayat bahagi). mewakili apa pada gambar rajah?
S: Empat kumpulan yang ada lima garis
P: Yang ini (menunjukkan 5 pada ayat 24 ÷ 5 = 4 baki 4)?
S: Lima garis dalam satu kumpulan.
P: Ada tak cara lain untuk bahagi lima gambar rajah tadi?
S: Tak ada.
P: Afiq boleh tulis ayat lain bagi gambar rajah bahagi lima tadi.
S: Tak boleh. Sama macam ini (menunjukkan ayat yang telah beliau tulis) saja boleh.

Dalam Petikan PM642, Afiq menyelesaikan masalah bahagi empat dengan membahagikan gambar rajah yang diberi kepada kumpulan-kumpulan yang mempunyai empat jalur. Afiq juga menjelaskan bahawa empat jalur dikumpulkan dalam satu kumpulan kerana pembahaginya adalah bahagi empat. Selain itu, subjek menulis ayat $24 \div 4 = 6$ bagi mewakili gambar rajah yang ditandanya.

Afiq juga menjelaskan bahawa jawapan bagi dua puluh empat bahagi empat adalah jumlah kumpulan yang mempunyai empat jalur yang dapat dibentuk. Subjek juga menjelaskan bahawa jawapan bagi bahagi empat adalah enam iaitu nilai yang diperolehinya dengan menghitung kumpulan yang bersaiz empat yang dapat dibentuk.

Afiq juga membentuk cerita bagi menyelesaikan masalah bahagi empat. Dalam cerita Afiq, dua puluh empat biji bola dibahagi kepada enam orang kawan dan seorang memperoleh empat. Afiq juga menulis ayat bahagi $24 \div 6 = 4$ dan $24 \div 4 = 6$ bagi mewakili cerita tersebut. Selain itu, Afiq juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi tersebut adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang tidak sama.

Afiq menyelesaikan masalah bahagi enam dengan membentuk empat kumpulan yang mempunyai enam jalur. Subjek juga menjelaskan bahawa terdapat empat kumpulan dalam pembahagian itu dan setiap kumpulan mempunyai enam jalur.

Selain itu, Afiq juga menulis ayat bahagi $24 \div 6 = 4$ dan $24 \div 4 = 6$ bagi mewakili pembahagian tersebut. Selain itu,

Afiq juga berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah dan ayat bahagi bagi dua puluh empat bahagi empat dan dua puluh empat bahagi enam adalah berbeza. Menurut Afiq, perbezaan yang terdapat pada kedua-dua ayat bahagi adalah dari segi pembahagi dan hasil bahagi.

Bagi menyelesaikan bahagi tiga pula, Afiq mengumpulkan tiga jalur dalam satu kumpulan. Subjek juga menulis ayat 24 ÷ 3 = 8 dan 24 ÷ 8 = 3 bagi mewakili pembahagian itu. Bagi bahagi lapan pula, Afiq menggariskan setiap lapan jalur sebagai satu kumpulan. Subjek juga berpendapat bahawa terdapat tiga kumpulan yang mempunyai lapan jalur dalam pembahagian dua puluh empat bahagi lapan.

Selain itu, Afiq juga menulis ayat 24 ÷ 8 = 3 dan 24 ÷ 3 = 8 bagi mewakili pembahagian itu. Afiq berpendapat bahawa penyelesaian yang beliau tunjukkan bagi dua puluh empat bahagi tiga dan dua puluh empat bahagi lapan adalah berbeza. Menurut Afiq, perbezaan antara kedua-dua penyelesaian adalah disebabkan oleh nilai pembahagi dan hasil bahagi bagi kedua-dua ayat bahagi tersebut adalah tidak sama.

Bagi bahagi lima pula, Afiq menyelesaikannya dengan membentuk empat kumpulan yang mempunyai lima jalur di dalamnya. Dalam pembahagian tersebut, Afiq tidak membulatkan empat jalur kerana saiznya kurang daripada lima. Afiq juga menulis 24 ÷ 5 = 4 baki 4 sebagai ayat bahagi yang mewakili gambar rajah bahagi

lima itu. Selain itu, Afiq juga menjelaskan bahawa empat selepas tanda '=' pada ayat bahagi yang ditulisnya itu merujuk kepada kumpulan, manakala empat selepas perkataan 'baki' pula merujuk empat jalur yang kurang daripada lima.

Protokol 7: Nurul

Nurul berusia 9 tahun 9 bulan ketika temu duga dijalankan. Tingkah laku yang beliau tunjukkan semasa temu duga dihuraikan seperti yang berikut.

1. Dia menggambarkan perkataan 'bahagi' dengan menulis simbol ' ÷ ' dan ' $)\overline{}$ '.

2. Bagi ayat enam bahagi dua, dia menggambarkannya dengan menulis ayat 6 ÷ 2 dan $2\,)\overline{6}$.

3. Dia mewakilkan ayat a ÷ b dengan membentuk kumpulan-kumpulan bersaiz b. Menurutnya, pembahagi menentukan saiz kumpulan.

4. Bagi pembahagian yang mempunyai baki a ÷ b = c baki d, jawapannya ditulis sebagai c baki d .

5. Menurutnya, gambar rajah yang mempunyai c kumpulan bersaiz b tidak sama dengan gambar rajah yang mempunyai b kumpulan bersaiz c kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

6. Menurutnya, persamaan a ÷ b = c tidak sama dengan a ÷ c = b kerana pembahagi dan hasil bahagi berbeza.

7. Bagi persamaan a ÷ b = c, a merujuk semua yang hendak dibahagi, b merujuk saiz kumpulan, dan c merujuk bilangan kumpulan.

8. Susunan yang dibentuk bagi persamaan a ÷ b = c, adalah sama dengan susunan yang dibentuk bagi a yang ditolak secara berulang sebanyak c kali. Setiap penolakan perlu bersaiz b, dan nilai c dalam a ÷ b = c adalah sama dengan bilangan penolakan berulang yang dilakukan.

9. Menurutnya, jika a ÷ b = c, maka
   i. a0 ÷ b = c0
   ii. a00 ÷ b = c00
   iii. a ÷ a = 1
   iv. a0 ÷ a0 = 1
   v. a ÷ 1 = a
   vi. a0 ÷ 1 = a0

10. Bagi ayat 0 ÷ a, jawapannya adalah sifar kerana operasi membabitkan sifar adalah sifar.

11. Bagi ayat a ÷ 0, jawapannya adalah sifar kerana operasi membabitkan sifar adalah sifar.

12. Menurutnya, ayat darab adalah songsangan kepada ayat bahagi.

13. Persamaan darab bagi ayat a ÷ b adalah c x b = a, di mana c adalah hasil bahagi bagi a ÷ b.

Gambaran Mental

Perkataan Bahagi

Nurul mempunyai dua gambaran apabila perkataan 'bahagi' disebut, iaitu simbol ' ÷ ', dan simbol ') ¯¯ '. Petikan GM711 yang berikut memaparkan tingkah laku yang di tunjukkan oleh subjek.

Petikan GM711

P: Kalau cikgu sebut bahagi gambar apa ada dalam fikiran Nurul?
S: (Subjek tidak menjawab)
P: Ada gambar tak dalam kepala? Apa yang Nurul nampak? Bahagi.
S: (Subjek masih tidak menjawab)
P: Nurul boleh lukis tak?
S: (Subjek menulis seperti berikut):

' ÷ '

P: Boleh beritahu cikgu, apa yang Nurul tulis?
S: Ini bahagi.
P: Apa lagi yang Nurul nampak?
S: (Subjek menulis simbol seperti berikut pada kertas yang disediakan):.

') ¯¯

P: Apa Nurul tulis tu?
S: Ini pun bahagi.
P: Baik. Apa lagi yang Nurul nampak bila cikgu sebut bahagi?
S: (Subjek mendiamkan diri)
P: Ada gambar lain tak bila sebut bahagi?
S: Tak ada
P: Tak ada gambar lain. Cuba fikir lagi?
S: Tak ada.
P: Betul, tak ada gambar lain?
S: Tak ada.

Dalam petikan di atas, subjek menggambarkan perkataan bahagi dengan menulis simbol ‘ ÷ ’, dan simbol ‘) ‾‾ ’. Subjek tidak ada gambaran lain bagi perkataan bahagi.

Gambaran Mental Ayat Bahagi

Nurul mempunyai dua gambaran bagi ayat enam bahagi dua. Petikan GM712 berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan GM712

P: Kalau saya sebut enam bahagi dua, gambar apa ada dalam fikiran Nurul?

S: (Subjek mendiamkan diri).
P: Ada gambar tak? Enam bahagi dua.
S: (Subjek mengangguk dan menulis yang berikut pada kertas).

$$6 \div 2$$

P: Boleh beritahu cikgu apa yang Nurul tulis?
S: Enam bahagi dua (subjek menunjukkan ayat yang ditulisnya).
P: Ada gambar lain tak?
S: Ada. (Subjek menulis seperti berikut).

$$2\overline{)6}$$

P: Boleh beritahu cikgu apa yang Nurul tulis?
S: Enam bahagi dua.
P: Apa lagi Nurul nampak bila cikgu sebut enam bahagi dua?
S: (Subjek seolah-olah sedang berfikir).
P: Apa lagi yang Nurul nampak?

S: Tak ada yang lain.
P: Tak ada gambar lain ke?
S: Tak ada.
P: Kalau cikgu sebut lapan bahagi empat?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$8 \div 4$$

P: Apa yang Nurul tulis tu?
S: Lapan bahagi empat.
P: Ada gambar lain?
S: (Subjek menulis yang berikut).

$$4 \,)\, 8$$

P: Ada gambar lain?
S: Tak ada.
P: Betul, tak ada?
S: Tak ada.

Dalam petikan GM712, Nurul menggambarkan enam bahagi dua dengan menulis ayat bahagi dalam bentuk $6 \div 2$ dan ayat bahagi dalam bentuk $2 \,)\, 6$. Bagi ayat lapan bahagi empat pula, subjek menulis dua gambaran yang berbentuk sama seperti enam bahagi dua, iaitu $8 \div 4$ dan $4 \,)\, 8$.

Perwakilan

Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

Nurul mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Subjek juga mewakilkan ayat bahagi yang dikemukakan secara lukisan. Petikan PW721 yang berikut menggambarkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

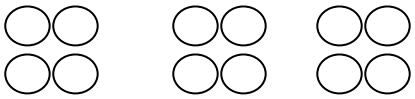
Petikan PW721

P: (Menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4) Boleh Nurul baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Dua belas bahagi empat.
P: Kenapa kata dua belas bahagi empat?
S: Ini dua belas, (menunjukkan angka 12), bahagi (menunjukkan simbol bahagi) empat (menunjukkan angka 4).
P: Baik. Sekarang, boleh Nurul tunjuk dengan butang-butang ni macam mana dua belas bahagi empat?
S: (Subjek mengeluarkan dua belas butang dari bekas yang disediakan dan kemudian menyusun butang-butang tersebut dalam tiga kumpulan).

P: Dah siap?
S: Dah.
P: Boleh beritahu cikgu, apa yang Nurul buat tadi
S: …Susun butang (subjek menjawab sambil menunjukkan penyusunan yang telah beliau lakukan).
P: Susunan butang tu menunjukkan apa? Boleh beritahu cikgu?
S: Susunan butang untuk dua belas bahagi empat.
P: Yang mana menunjukkan dua belas bahagi empat?

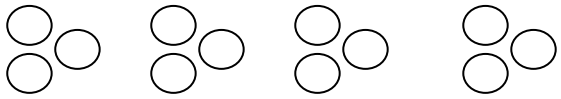
S: Dua belas butang (subjek menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan), dah bahagi empat.
P: Dua belas pada ayat tadi rujuk pada apa di sini (menunjukkan butang-butang yang telah disusun).

S: Dua belas butang (subjek menunjukkan kesemua butang).
P: Yang ini (menunjukkan empat pada ayat bahagi?
S: Empat butang (menunjukkan empat butang yang telah dikumpulkan).
P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tiga.
P: Tiga tu apa ?
S: Tiga kumpulan.
P: Tiga kumpulan tu rujuk pada apa di sini (menunjukkan ayat $12 \div 4$)?
S: …Jawapan dia.
P: Kenapa Nurul kata itu jawapan dia?
S: Sebab …dua belas bahagi empat sama dengan tiga.
P: Kenapa Nurul susun macam ni (menunjukkan susunan butang yang ditunjukkan oleh subjek)?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Nurul ada tak cara lain untuk menunjukkan dua belas bahagi empat?
S: (Subjek menyusun semula seperti berikut).

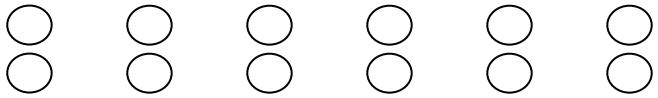


P: Dah siap?
S: Dah.
P: Ini pun dua belas bahagi empat ke?
S: (Subjek mengangguk).
P: Sama tak dengan tadi?
S: Lain sikit.
P: Lain macam mana?
S: Lain sebab yang ini empat butang macam ni (subjek menunjukkan susunan yang telah dibentuk).
P: Apa bezanya dengan empat butang yang tadi?
S: Tadi, empat butang tu panjang.
P: Baik. Butang yang dikumpulkan dalam satu kumpulan tu sama tak dengan yang tadi?
S: Sama …empat.
P: Kenapa Nurul kumpulkan empat butang sekali seperti ini (menunjukkan butang-butang yang telah dikumpulkan)?
S: Sebab dua belas bahagi empat.
P: Kalau dua belas bahagi tiga, macam mana?

S: Kena letak tiga butang (subjek menunjukkan susunan yang dibentuk untuk bahagi empat).
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang macam tadi?
S: (Subjek menyusun semula butang-butang tersebut seperti berikut).



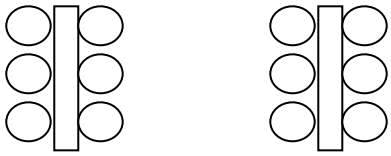
P: Kenapa Nurul kumpulkan tiga butang macam tu?
S: Sebab dua belas bahagi tiga.
P: Boleh tak kita wakilkan dua belas bahagi empat seperti ini?
S: Tak boleh.
P: Kenapa, tak boleh?
S: Sebab satu kumpulan ada tiga butang, kalau bahagi empat kena ada empat butang.
P: Kalau dua belas bahagi dua, berapa butang akan dikumpulkan?
S: Dua.
P: Kalau bahagi enam, berapa butang perlu dikumpulkan?
S: Enam.
P: Boleh Nurul tunjuk dengan butang-butang ni macam mana dua belas bahagi dua?
S: (Subjek menyusun semula butang-butang tersebut seperti berikut).



P: Di sini Nurul kumpulkan dua butang, kenapa dua butang?
S: Sebab kena bahagi dua.
P: Boleh tunjuk bahagi dua dengan cara lain?
S: (Subjek cuba menyusun semula dan kemudian menjawab). Tak boleh.
P: Boleh Nurul buat cerita untuk dua belas bahagi dua?
S: Cerita?
P: Ya. Cuba Nurul buat cerita untuk dua belas bahagi dua.
S: Saya ada dua belas … gula-gula.
P: Lagi? Apa Nurul buat dengan dua belas gula-gula itu?
S: Dua belas gula-gula tu nak bagi pada dua orang kawan.
P: Boleh Nurul tunjuk macam mana Nurul bahagi dua belas gula-gula tadi kepada dua orang kawan? Anggap penyedut minuman sebagai kawan Nurul dan butang-butang ni

sebagai gula-gula (memberi kotak yang mengandungi penyedut minuman dan butang).

S: (Subjek mengambil dua batang penyedut minuman dan menyusun semula butang-butang yang telah disusun sebelum ini seperti berikut).



P: Dah siap ke?

S: Dah siap.

P: Merujuk pada susunan ini, boleh ulang balik cerita Nurul tadi?

S: Boleh. ... Saya ada dua belas gula-gula, bahagi kepada dua orang kawan.

P: Susunan ni untuk dua belas bahagi berapa?

S: Dua.

P: Seorang kawan dapat berapa gula-gula?

S: Seorang dapat enam gula-gula.

P: Di sini (menunjukkan susunan butang yang subjek bentuk) ada berapa kumpulan?

S: Dua.

P: Satu kumpulan ada berapa butang?

S: Enam.

P: Yang ini dua belas bahagi berapa?

S: Dua.

P: Kalau dua belas bahagi enam, macam mana agaknya? Berapa butang perlu diletak dalam satu kumpulan?

S: (Subjek tidak menjawab).

P: Dua belas bahagi enam. Satu kumpulan berapa butang?

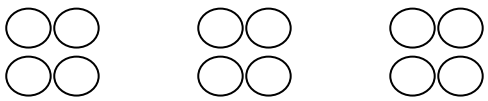
S: Enam.

P: Jadi, boleh tak kita namakan yang ini (menunjukkan susunan yang telah dibentuk oleh subjek) dua belas bahagi enam?

S: Boleh.

P: Baik, sekarang boleh Nurul tunjuk cara lain untuk yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 12 ÷ 4)? Cara lain dari yang tadi.

S: Boleh. (Subjek menyusun seperti berikut).



P: Dah siap?

S: Dah.
P: Yang ni satu cara, boleh Nurul tunjuk cara lain?
S: (Subjek menyusun semula seperti berikut).

P: Yang dua belas bahagi berapa?
S: Empat.
P: Ada cara lain lagi, tak?
S: Tak ada.

Pada awal Petikan PW721, subjek mewakilkan ayat 12 ÷ 4 dengan membentuk tiga kumpulan bersaiz empat. Subjek juga menyamakan saiz kumpulan yang dibentuk dengan pembahagi, manakala bilangan kumpulan yang terhasil sebagai jawapan kepada ayat 12 ÷ 4. Subjek membentuk empat kumpulan bersaiz tiga bagi mewakili dua belas bahagi tiga. Nurul berpendapat persamaan dua belas bahagi empat tidak sama dengan dua belas bahagi tiga kerana kedua-dua pembahagian tersebut mempunyai saiz butang yang berbeza dalam setiap kumpulan. Demikian juga dengan susunan yang dibina oleh subjek, beliau berpendapat saiz dan bilangan kumpulan yang dibentuk bagi kedua-dua persamaan 12 ÷ 4 = 3 dan 12 ÷ 3 = 4 adalah berbeza.

Pada bahagian pertengahan petikan PW721, subjek membentuk dua kumpulan bersaiz enam bagi mewkili 12 ÷ 6. Subjek berpendapat pembahagi merujuk bilangan kumpulan. Bagi ayat 12 ÷ 2 pula, subjek membentuk enam kumpulan bersaiz dua. Subjek juga

berpendapat kedua-dua susunan yang dilakukan bagi ayat 12 ÷ 6 dan ayat 12 ÷ 2 adalah berbeza kerana kedua-duanya mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza.

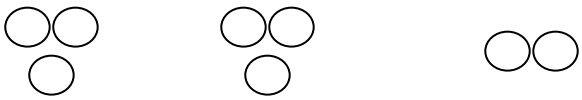
Pada bahagian akhir petikan di atas, subjek membentuk cerita bagi dua belas bahagi dua. Subjek juga mewakilkan cerita tersebut dengan menyusun butang yang di sediakan. Dalam penyusunan tersebut, subjek membentuk dua kumpulan bersaiz enam. Subjek juga berpendapat bahawa pembahagi boleh mewakili saiz kumpulan atau bilangan kumpulan. Subjek juga membentuk empat kumpulan bersaiz tiga dan tiga kumpulan bersaiz empat bagi mewakili ayat 12 ÷ 4.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Nurul mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki 8 ÷ 3 , dengan membentuk kumpulan yang bersaiz tiga. Subjek juga membentuk kumpulan bersaiz lima bagi ayat bahagi 8 ÷ 5. Petikan PW722 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW722

P: Boleh Nurul baca yang ini. (Menunjukkan kad yang tertulis ayat bahagi 8 ÷ 3).
S: Lapan bahagi tiga.
P: Boleh tunjuk dengan butang-butang ini (menunjukkan tiga puluh enam biji butang) bagi lapan bahagi tiga?
S: (Subjek mengira dan menyusun butang-butang tersebut seperti di bawah).



P: Nurul dah siap ke lapan bahagi tiga?
S: Ya, dah siap.
P: Kenapa yang ni ada dua yang lain ada tiga (menunjukkan dua butang yang diasingkan)?
S: Sebab ada lapan butang saja. Kalau ada satu lagi boleh letak tiga.
P: Kenapa Nurul nak kumpulkan tiga?
S: Sebab lapan bahagi tiga.
P: Macam mana kalau lapan bahagi lima?
S: Kena letak lima butang.
P: Boleh Nurul tunjuk dengan butang-butang ini bagaimana lapan bahagi lima (menunjukkan butang).
S: (Subjek menyusun butang yang di sediakan seperti berikut).

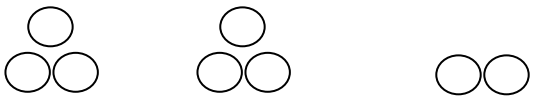
P: Dah siap ke?
S: Tak cukup lima.
P: Tak cukup lima?
S: Ya, yang ini tak cukup lima butang (menunjukkan kumpulan yang mempunyai tiga butang).
P: Kenapa perlu ada lima?
S: ... Sebab lapan nak bahagi lima.
P: Dalam susunan ni (menunjukkan butang-butang yang telah disusun oleh subjek) yang mana menunjukkan ini (menunjukkan lapan pada ayat bahagi 8 ÷ 5)?
S: Ini (menunjukkan semua butang yang telah disusun).
P: Yang ni (menunjukkan 5 pada ayat bahagi 8 ÷ 5)?
S: Lima (menunjukkan kumpulan yang mempunyai lima butang).
P: Bagaimana dengan yang ini (menunjukkan kumpulan yang mempunyai tiga butang)?
S: (Subjek senyap).
P: Apa jawapan bagi lapan bahagi lima?
S: (Subjek menulis seperti berikut pada kertas yang disediakan).

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5\,\overline{)\,8} \\ -\,5 \\ \hline 3 \end{array}$$

P: Apa jawapannya?
S: Satu baki tiga.
P: Boleh Nurul beritahu cikgu yang mana satu dan yang mana baki tiga pada butang ini (menunjukkan susunan yang subjek bentuk menggunakan butang)?
S: Ini baki tiga (menunjukkan kumpulan tiga butang), yang ini satu (menunjukkan kumpulan yang mempunyai lima butang).
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan kad 8 ÷ 3)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\,\overline{)\,8} \\ -\,6 \\ \hline 2 \end{array}$$

P: Apa jawapannya?
S: Dua baki dua.
P: Sekarang, boleh Nurul tunjuk pembahagian tadi dengan butang. Gunakan butang lain, ya.
S: (Subjek mengira semula untuk membentuk susunan baru seperti berikut).



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Yang ini lapan bahagi berapa?
S: Lapan bahagi tiga.
P: Apa jawapan bagi lapan bahagi tiga?
S: Dua baki dua.
P: Yang mana dua dan yang mana baki dua?
S: Yang ni dua (menunjukkan dua kumpulan bersaiz tiga), yang ni baki dua (menunjukkan kumpulan bersaiz dua).
P: Bagaimana pula jawapan untuk yang ini (menunjukkan susunan yang dibentuk bagi lapan bahagi lima)?
S: Satu baki tiga.
P: Kenapa satu baki tiga?
S: Sebab satu kumpulan (menunjukkan kumpulan bersaiz lima). dan baki tiga (menunjukkan kumpulan bersaiz tiga).
P: Di sini satu kumpulan ada berapa butang?
S: Satu kumpulan lima butang.

P: Kenapa lima?
S: Sebab lapan bahagi lima.
P: Boleh tak kira yang ini (menunjukkan kumpulan bersaiz tiga). sebagai satu kumpulan?
S: Itu baki.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab ada tiga butang sahaja.

Dalam petikan PW722, subjek mewakilkan ayat 8 ÷ 3 dengan membentuk dua kumpulan yang bersaiz tiga dan satu kumpulan bersaiz dua. Subjek juga berpendapat bahawa jawapan bagi ayat 8 ÷ 3 adalah dua baki dua Subjek juga berpendapat bahawa saiz kumpulan yang dibentuk perlu sama dengan pembahagi.

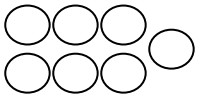
Selain itu, subjek membentuk satu kumpulan bersaiz lima dan satu kumpulan bersaiz tiga bagi mewakili ayat 8 ÷ 5. Subjek berpendapat kumpulan yang bersaiz kurang daripada pembahagi adalah baki.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

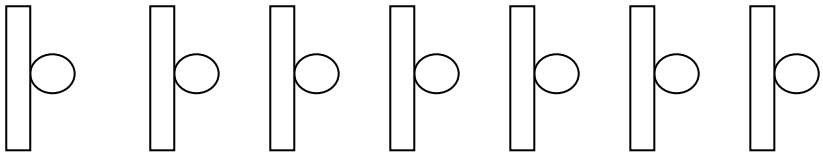
Nurul membentuk satu kumpulan yang bersaiz tujuh bagi mewakilkan ayat bahagi 7 ÷ 7. Subjek juga membentuk tujuh kumpulan bersaiz satu bagi mewakili ayat bahagi 7 ÷ 1. Petikan PW723 yang berikut menggambarkan cara subjek mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai penyebut dan pengangka yang sama.

Petkan PW723

P: Boleh Nurul baca apa yang ada pada kad ini (Menunjukkan kad yang tertulis 7 ÷ 7)?
S: Tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh Nurul tunjuk dengan butang-butang ini macam mana tujuh bahagi tujuh (menunjukkan satu kotak yang mengandungi butang)?
S: (Subjek mengambil tujuh butang dan menyusunnya seperti berikut)



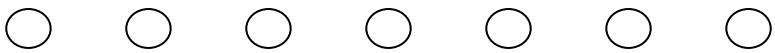
P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Kenapa kumpulkan dalam satu kumpulan?
S: Sebab tujuh bahagi tujuh. Satu kumpulan ada tujuh.
P: Boleh beritahu cikgu yang ini (menunjukkan tujuh sebelum simbol bahagi pada 7 ÷ 7) rujuk pada apa dalam susunan butang Nurul?
S: (Subjek menunjukkan butang yang telah disusunnya). Ini tujuh.
P: Yang ini (menunjukkan tujuh selepas simbol bahagi)?
S: Sama.
P: Kenapa Nurul kata sama?
S: Sebab tujuh bahagi tujuh.
P: Boleh Nurul tunjuk tujuh bahagi tujuh dengan cara lain?
S: (Subjek cuba menyusun beberapa cara dan menjawab) tak ada cara lain, sama macam tadi.
P: Tak ada cara lain?
S: Tak ada.
P: Boleh Nurul buat cerita untuk yang ini (menunjukkan ayat 7 ÷ 7)?
S: Boleh. Saya ada tujuh … biskut. Saya nak bahagi pada tujuh orang kawan.
P: Seorang kawan dapat berapa?
S: Seorang kawan dapat satu.
P: Baik, boleh Nurul tunjuk dengan butang dan penyedut minuman?
S: (Subjek mengambil tujuh penyedut minuman dan tujuh butang, dan susun seperti berikut).



P: Ada berapa kumpulan kesemuanya?
S: Tujuh.
P: Satu kumpulan ada berapa butang?
S: Satu.
P: Boleh Nurul ulang balik cerita tadi merujuk pada susunan ini (menunjukkan susunan yang dibentuk oleh subjek)?
S: Saya ada tujuh biji biskut, saya bahagi kapada tujuh orang kawan.
P: Baik, tujuh bahagi tujuh berapa jawapannya?
S: Satu.
P: Macam mana Nurul dapat jawapannya?
S: (Subjek menulis seperti berikut pada kertas yang disediakan).

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7\,\overline{)\,7} \\ \underline{-\,7} \\ 0 \end{array}$$

P: Dalam susunan ini (menunjukkan susunan yang dibentuk oleh subjek), yang mana jawapannya?
S: Yang ini (subjek menunjukkan salah satu butang yang terdapat pada susunannya).
P: Boleh tak kita gunakan yang ini (menunjukkan ayat bahagi $7 \div 1$) bagi mewakili susunan yang ini (menunjukkan susunan yang dibuat oleh subjek)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab yang ini (menunjukkan susunan yang dibentuk oleh subjek) untuk tujuk bahagi tujuh.
P: Baik, boleh Nurul wakilkan yang ini (menunjukkan ayat bahagi $7 \div 1$) dengan butang? Gunakan butang yang lain, ya.
S: (Subjek membentuk tujuh kumpulan seperti berikut).



P: Susunan ini untuk ayat yang mana? Yang ini (menunjukkan ayat bahagi $7 \div 1$) atau yang ini (menunjukkan ayat bahagi

7 ÷ 7)?
S: Yang ini (subjek menunjukkan ayat bahagi 7 ÷ 1).
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan ayat bahagi 7 ÷ 7)? Boleh tak kita wakilkan ayat ini untuk susunan tadi?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab ada satu butang saja, jadi tujuh bahagi satu.
P: Baik, susnan ini sama tak dengan susunan yang Nurul bentuk sambil bercerita tadi (menunjukkan susunan yang dibentuk menggunakan penyedut minuman dan butang)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Tadi tujuh bahagi tujuh, yang ini tujuh bahagi satu.
P: Macam mana dengan bilangan kumpulan? Ada berapa kumpulan untuk kedua-dua susunan?
S: ...Tujuh.
P: Ada berapa butang pada setiap kumpulan?
S: Satu.
P: Jadi sama tak kedua-dua susunan?
S: Susunan sama, soalan bahagi tak sama.
P: Nurul ada cara lain untuk mewakilkan yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 7 ÷ 1)?
S: …Tak ada.

Dalam petikan diatas, subjek mewakilkan ayat bahagi 7 ÷ 7 dengan membentuk satu kumpulan yang mempunyai tujuh butang di dalamnya. Subjek juga membentuk cerita dan mewakilkannya dengan membina tujuh kumpulan bersaiz satu. Bagi ayat 7 ÷ 1 pula, subjek membentuk tujuh kumpulan bersaiz satu. Subjek juga berpendapat bahawa tujuh di sebelah kiri simbol bahagi dalam ayat 7 ÷ 7 adalah sama dengan jumlah kesemua butang, manakala tujuh di sebelah kanan simbol bahagi adalah saiz kumpulan.

Gambar Rajah

Gambar Rajah Diskret

Nurul mewakilkan gambar rajah yang diberi dengan menulis ayat bahagi, 15 ÷ 3 = 5. Subjek juga mengaitkan gambar rajah yang diberi dengan persamaan yang ditulisnya. Petikan PW724 yang berikut, menggambarkan cara subjek mewakilkan gambar rajah yang diberi.

Petikan PW724

P: Cuba lihat gambar ni (menunjukkan gambar yang mempunyai lima belas biji bola)? Boleh Nurul tulis ayat bahagi tentang gambar ni?
S: (Subjek menghitung kesemua objek yang terdapat pada gambar rajah yang diberi dan menulis seperti berikut).

16 ÷ 3 = 5

P: Boleh baca apa yang Nurul tulis?
S: Lima belas bahagi tiga sama dengan lima.
P: Kenapa Nurul tulis seperti ini (menunjukkan ayat bahagi yang ditulis oleh subjek)?
S: Sebab ada lima belas bola, satu kumpulan ada tiga bola (menunjukkan gambar rajah yang disediakan).
P: Kenapa tulis bahagi tiga (menunjukkan tiga pada ayat bahagi 15 ÷ 3 = 5)?
S: Sebab satu kumpulan ada tiga bola.
P: Yang ini (menunjukkan angka 5 pada ayat bahagi 15 ÷ 3 = 5)?
S: (Subjek menghitung semula kumpulan yang terdapat dalam gambar rajah dan menjawab) ada lima kumpulan.
P: Nurul ada tak cara lain untuk menulis ayat bahagi bagi gambar rajah tadi?
S: (Subjek menulis ayat berikut).

$15 \div 5 = 3$

P: Boleh Nurul baca ayat yang Nurul tulis tu?
S: Lima belas bahagi lima sama dengan tiga.
P: Yang ini rujuk pada apa pada gambar rajah (menunjukkan angka 15 pada ayat bahagi)?
S: Semua ini (menunjukkan kesemua objek).
P: Yang ini (menunjukkan angka 5)?
S: Lima kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan angka 3 pada ayat bahagi $15 \div 5 = 3$)?
S: Tiga sebab satu kumpulan ada tiga bola (subjek menunjukkan bola dalam satu kumpulan).
P: Sama tak kedua-dua ayat yang Nurul tulis tu?
S: …Tak sama.
P: Kenapa Nurul rasa tak sama? Gambar rajah sama, kan?
S: Gambar rajah sama, tapi ayat tak sama.
P: Apa yang tak sama pada kedua-dua ayat tu?
S: Yang ni lima belas bahagi tiga sama dengan lima (subjek menunjukkan ayat $15 \div 3 = 5$), yang ni lima belas bahagi lima sama dengan tiga (subjek menunjukkan ayat bahagi $15 \div 5 = 3$).
P: Apa lagi yang tak sama dengan kedua-dua ayat tadi?
S: Tak ada.
P: Apa yang sama pada kedua-dua ayat tu?
S: Lima belas.
P: Lima belas?
S: Dua-dua ayat ada lima belas.
P: Apa lagi yang sama?
S: …Tak ada lagi.

Dalam petikan di atas, Nurul menulis ayat bahagi $15 \div 3 = 5$ bagi mewakili gambar rajah yang mempunyai lima belas bola yang dihimpun dalam lima kumpulan. Subjek juga menulis ayat $15 \div 5 = 3$ bagi mewakili gambar rajah yang sama.

Selain itu, subjek menyamakan lima belas pada ayat bahagi dengan kesemua objek, tiga pula merujuk saiz setiap kumpulan, dan lima pula merujuk bilangan kumpulan. Nurul juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat yang ditulisnya tidak sama. Subjek juga

berpendapat bahawa hanya lima belas merupakan nombor yang sama pada kedua-dua ayat bahagi 15 ÷ 3 = 5 dan 15 ÷ 5 = 3.

Petikan PW725

P: Cuba Nurul lihat gambar ni. (Menunjukkan gambar enam belas ekor kura-kura) Boleh Nurul tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

16 ÷ 4 = 4

P: Kenapa tulis yang ini (menunjukkan nombor enam belas pada ayat bahagi 16 ÷ 4 = 4)?
S: Sebab ada enam belas kura-kura.
P: Yang ini (menunjukkan angka empat selepas simbol bahagi)?
S: Empat kura-kura.
P: Yang ni (menunjukkan angka empat selepas simbol ‘ = ’)?
S: Empat kumpulan.
P: Boleh buat ayat lain?
S: (Subjek menulis seperti beikut).

16 ÷ 4 = 4

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Kenapa sama?
S: Sebab kura-kura ada empat, kumpulan pun ada empat.
P: Yang ni (menunjukkan nombor 16 pada ayat bahagi 16 ÷ 4 = 4) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: Semua kura-kura.
P: Yang ini (menunjukkan angka 4 selepas simbol bahagi).
S: Empat kura-kura … empat kumpulan pun boleh.
P: Yang ini (menunjukkan angka 4 selepas simbol ‘=’).
S: Empat kumpulan dan empat kura-kura.

Subjek mewakilkan gambar rajah yang dikemukakan dengan menulis ayat bahagi 16 ÷ 4 = 4. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua pembahagi dan hasil bahagi bagi persamaan tersebut adalah

sama kerana gambar rajah yang diberi mempunyai saiz dan bilangan kumpulan yang sama. Selain itu, Nurul berpendapat kedua-dua angka empat pada persamaan 16 ÷ 4 = 4 boleh merujuk sama ada saiz kumpulan atau bilangan kumpulan.

Gambar Rajah Selanjar

Nurul mewakilkan gambar rajah selanjar yang mempunyai dua puluh satu jalur, dengan menulis ayat bahagi 21 ÷ 7 = 3. Subjek juga menulis ayat 21 ÷ 3 = 7 bagi mewakili gambar rajah tersebut. Petikan PW726 yang berikut memamaparkan cara subjek mewakilkan gambar rajah selanjar.

Petikan PW726

P: Sekarang cuba tengok gambar ini. Sama macam tadi boleh tak buat ayat bahagi untuk gambar ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

21 ÷ 7 = 3

P: Cuba baca?
S: Dua puluh satu bahagi tujuh .
P: Macam mana dapat dua puluh satu?
S: Ada dua puluh satu kotak (subjek menunjukkan petak-petak pada gambar rajah).
P: Tujuh?
S: Ada tujuh kotak satu bahagian (Subjek menunjukkan petak-petak yang terdapat dalam ketiga-tiga bahagian).
P: Tiga?
S: Tiga tu bahagian (Subjek menunjukkan tiga bahagian dalam gambar rajah).

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$21 \div 3 = 7$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh satu bahagi tiga sama dengan tujuh.
P: Ayat-ayat tadi sama tak?
S: Sama.
P: Kenapa sama?
S: Boleh tulis dua cara. (Subjek menunjukkan kedua-dua persamaan).
P: Ada cara lain menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.

Nurul menulis ayat bahagi $21 \div 7 = 3$ bagi mewakili gambar rajah selanjar yang dikemukakan oleh pengkaji. Subjek juga menulis ayat bahagi $21 \div 3 = 7$ bagi mewakili gambar rajah tersebut. Selain itu, Nurul menyamakan jumlah jalur yang terdapat pada gambar rajah dengan nombor dua puluh satu yang terdapat pada ayat bahagi $21 \div 3 = 7$ dan $21 \div 7 = 3$. Tujuh jalur yang terdapat pada satu himpunan pula disamakan dengan angka tujuh yang terdapat pada kedua-dua ayat bahagi.

Penolakan Berulang

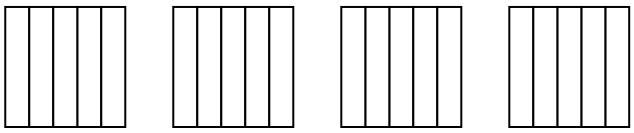
Ayat Bahagi Tanpa Baki

Nurul menunjukkan perkaitan antara penolakan $20 - 5$ secara berulang dengan pembahagian $20 \div 5$ dengan mengeluarkan sebanyak lima penyedut minuman daripada dua puluh sebanyak empat kali.

Nurul juga menunjukkan ayat bahagi 20 ÷ 5 dengan membentuk empat kumpulan yang bersaiz lima. Petikan PW727 yang berikut memaparkan cara subjek menggunakan cara penolakan berulang bagi mewakili ayat bahagi tanpa baki.

Petikan PW727

P: Boleh Nurul baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 ÷ 5)?
S: Dua puluh bahagi lima.
P: Dua puluh bahagi lima. Boleh tunjuk dengan ini (menunjukkan penyedut minuman)?
S: (Subjek menyusun seperti berikut).



P: Ada berapa penyedut minuman dalam satu kumpulan?
S: Lima.
P: Kenapa lima (menunjukkan penyedut minuman yang telah disusun)?
S: Sebab soalan dia dua puluh bahagi lima (subjek menunjukkan ayat bahagi 20 ÷ 5).
P: Macam mana kalau dua puluh bahagi empat, berapa penyedut minuman perlu ada dalam satu kumpulan?
S: Empat.
P: Ada berapa kumpulan di sini (menunjukkan susunan yang di bentuk oleh subjek)?
S: Empat.
P: Baik, apa jawapan bagi dua puluh bahagi lima?
S: Empat.
P: Kenapa empat?
S: Sebab dua puluh bahagi lima sama dengan empat. (Subjek menulis seperti berikut).

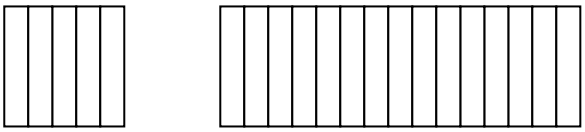
$$\begin{array}{r} 4 \\ 5\,\overline{)\,20} \\ -\,\underline{20} \\ 0 \end{array}$$

P: Sekarang cuba Nurul baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 20 – 5)?

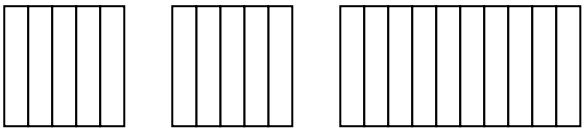
S: Dua puluh tolak lima.

P: Baik, sekarang boleh Nurul gunakan penyedut minuman dan tunjuk macam mana dua puluh tolak lima? Gunakan penyedut minuman yang lain. Jangan gunakan yang ini (menunjukkan susunan yang disusun oleh subjek).

S: (Subjek menyusun dua puluh penyedut minuman kemudian mengasingkan lima daripada dua puluh penyedut minuman seperti berikut).

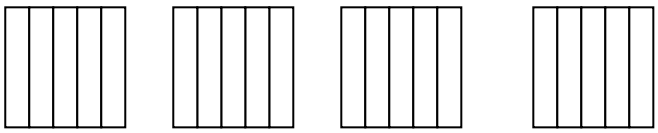


P: Dah siap?
S: Dah.
P: Kenapa asingkan yang ini (menunjukkan lima penyedut minuman yang diasingkan)?
S: Tolak.
P: Berapa penyedut minuman Nurul tolak?
S: Lima.
P: Berapa yang tinggal selepas ditolak?
S: Lima belas (subjek menghitung semula selepas menjawab).
P: Sekarang, boleh Nurul tolak lima lagi dari sini (menunjukkan kumpulan penyedut minuman yang tinggal)?
S: (Subjek mengasingkan lima lagi penyedut minuman seperti berikut).



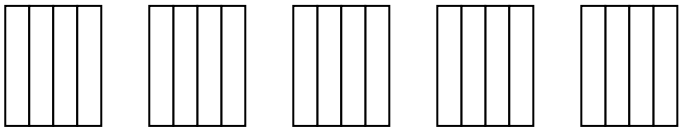
P: Berapa yang tinggal?

S: (Subjek menghitung penyedut minuman yang tinggal dan menjawab) Sepuluh.
P: Boleh tolak lagi lima?
S: (Subjek mengeluarkan lima seperti berikut).

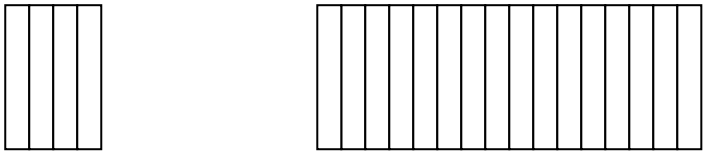


P: Setakat ini dah berapa kali Nurul tolak lima?
S: (Subjek menghitung semula kumpulan yang telah dikeluarkan dan menjawab). Tiga
P: Tolak lagi lima.
S: (Subjek menolak lima lagi penyedut minuman).
P: Dah berapa kali Nurul tolak lima?
S: Empat.
P: Ada berapa penyedut minuman dalam setiap kumpulan?
S: Lima.
P: Cuba bandingkan susunan yang Nurul buat untuk dua puluh bahagi lima, tadi dengan susunan yang Nurul dapat dengan menolak lima daripada dua puluh secara berlang-ulang. Apa yang sama dalam kedua-dua ayat? Kumpulan sama tak?
S: Sama.
P: Ada berapa?
S: Empat
P: Macam mana dengan bilangan penyedut minuman setiap kumpulan?
S: Sama.
P: Ada berapa?
S: Lima.
P: Jadi apa kaitan ayat bahagi dengan ayat bahagi tadi?
S: Sama
P: Sama macam mana?
S: Dua puluh bahagi lima sama dengan dua puluh tolak lima.
P: Dua puluh kena tolak lima berapa kali? Sekali saja ke?
S: Tak, empat kali.
P: Apa lagi yang sama antara ayat bahagi dan ayat tolak tadi?
S: ...Tak ada.
P: Perbezaan ada tak?
S: Tak ada.
P: Baik Nurul ada tak cara lain nak tunjuk dua puluh bahagi lima?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Nurul boleh gunakan penyedut minuman untuk mewakili dua puluh bahagi lima.

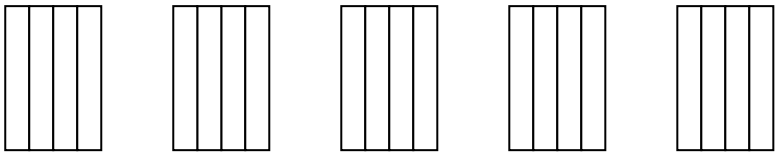
S: (Subjek menyususn semula seperti berikut).



P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Lima.
P: Kenapa lima kumpulan?
S: Sebab nak bahagi lima.
P: Satu kumpulan ada berapa?
S: Empat.
P: Susunan ini sama tak dengan susunan yang Nurul untuk dua puluh bahagi lima tadi?
S: Tak sama.
P: Tak sama macam mana?
S: Tadi, … empat kumpulan, yang ini lima kumpulan.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Tadi, satu kumpulan ada lima, ini ada empat (menunjukkan susunan yang baru dibentuk).
P: Baik, apa lagi yang beza?
S: …Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Tak ada.
P: Semua ada berapa penyedut minuman (menunjukkan susunan yang baru dibentuk oleh subjek)?
S: Dua puluh.
P: Tadi ada berapa?
S: Dua puluh juga.
P: Sama tak kedua-duanya?
S: Sama.
P: Ada lagi yang sama?
S: …Tak ada.
P: Baik, sekarang boleh Nurul tunjuk secara penolakan macam tadi? Dua puluh nak tolak berapa supaya sama dengan yang ini (menunjukkan susunan subjek bagi dua puluh bahagi lima).
S: Dua puluh tolak empat.
P: Boleh tunjuk?
S: (Subjek menyusun seperti berikut).



P: Baik, boleh beritahu cikgu apa yang Nurul baru buat?
S: Dua puluh tolak empat.
P: Nurul rasa yang ini perlu tolak empat berapa kali supaya sama dengan susunan ini (menunjukkan susunan bagi dua puluh bahagi lima)?
S: Empat kali.
P: Empat kali? Boleh tunjuk?
S: (Subjek mengeluarkan empat penyedut minuman secara berulang-ulang seperti berikut).



P: Ada berapa kumpulan empat penyedut yang telah ditolak?
S: Lima.
P: Susunan ini sama tak dengan yang tadi?
S: Sama.
P: Sama macam mana?
S: Kumpulan ada lima.
P: Lagi?
S: Dalam ni ada empat (menunjukkan satu kumpulan).
P: Ada lagi?
S: Ada dua puluh penyedut minuman.
P: Lagi?
S: Tak ada.
P: Apa kaitan ayat bahagi dengan ayat tolak?
S: Sama.
P: Sama macam mana? Ayat tolak tu, tolak sekali sahaja?
S: Tak, kena tolak lima kali.

Dalam Petikan PW727, subjek mewakilkan ayat bahagi 20 ÷ 5 dengan membentuk empat kumpulan bersaiz lima. Selain itu, subjek mengeluarkan lima penyedut minuman secara berulang daripada dua puluh penyedut minuman bagi membandingkan dengan

dua puluh tolak lima. Subjek juga berpendapat bahawa penolakan secara berulang adalah sama dengan pembahagian kerana memperoleh bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang sama.

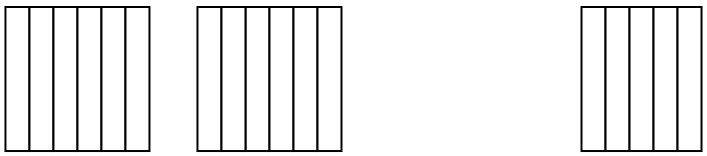
Subjek juga mewakilkan ayat bahagi 20 ÷ 5 dengan membentuk lima kumpulan bersaiz empat. Selain itu, subjek berpendapat bahawa ayat bahagi 20 ÷ 5 adalah sama dengan penolakan berulang sebanyak lima kali bagi ayat tolak 20 – 4.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Nurul mewakilkan ayat bahagi yang mempunyai baki, 17 ÷ 6 dengan membentuk dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima. Nurul juga mengeluarkan sebanyak enam penyedut minuman secara berulang sehingga baki yang tinggal kurang daripada enam. Petikan PW728 yang berikut memaparkan cara subjek mewakilkan penolakan berulang bagi ayat bahagi yang mempunyai baki.

Petikan PW728

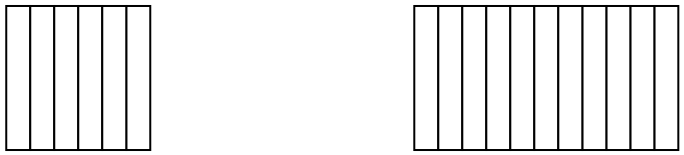
P: (Menunjukkan kad yang tertulis 17 ÷ 6). Boleh baca apa yang tertulis pada kad ini?
S: Tujuh belas bahagi enam.
P: Boleh Nurul tunjuk dengan penyedut minuman macam tadi?
S: (Subjek menyusun seperti berikut).



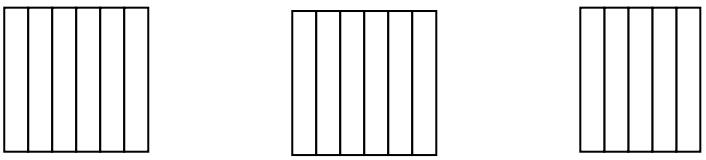
P: Dah siap?
S: Dah.
P: Kenapa asingkan yang ini (menunjukkan satu kumpulan yang mempunyai lima penyedut minuman).
S: Sebab bukan enam.
P: Jadi apa jawapannya?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan kumpulan yang kurang dari enam penyedut minuman)?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Jawapan bagi tujuh belas bahagi enam berapa?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Dua baki lima.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 6\ \overline{)\,17} \\ -\,\underline{12} \\ 5 \end{array}$$

P: Tengok pada susunan, yang mana jawapannya?
S: Dua (menunjukkan kumpulan bersaiz enam), baki lima (menunjukkan kumpulan bersaiz lima).
P: Baik, sekarang cuba Nurul tunjuk pembahagian secara penolakan macam tadi. Gunakan penyedut minuman yang lain (menunjukkan ayat 17 − 6).
S: Tujuh belas tolak enam. (Subjek mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang-ulang dan mengumpulkannya secara berasingan).

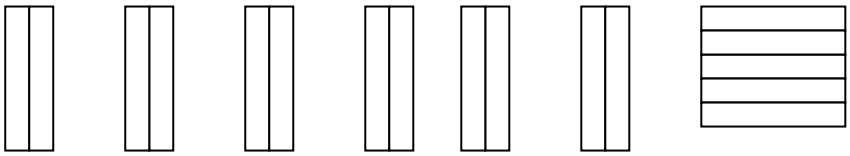


P: Dah siap?
S: (Subjek mengangguk).
P: Baik, boleh Nurul tolak enam lagi sampai dapat susunan macam tadi?
S: (Subjek mengeluarkan enam lagi seperti berikut).



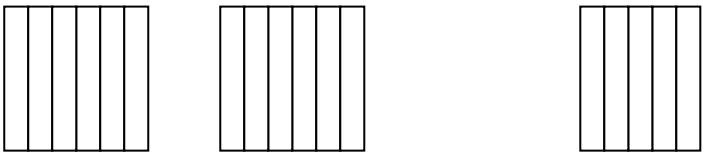
P: Berapa kali Nurul keluarkan enam?

S: Dua kali.
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan kumpulan bersaiz lima)?
S: Baki.
P: Bakinya ada berapa?
S: Lima.
P: Cuba bandingkan dengan susunan tadi (menunjukkan susunan untuk ayat bahagi), ada yang sama tak?
S: Ada. Dua kumpulan (menunjukkan kumpulan bersaiz enam) lima baki (menunjukkan kumpulan bersaiz lima).
P: Nurul boleh tunjuk tujuh belas bahagi enam dengan cara lain?
S: (Subjek menyusun penyedut minuman dan memegang lima lagi penyedut minuman).



P: Yang Nurul pegang tu apa?
S: Lebih.
P: Yang lebih tu rujuk pada apa, pada bahagian tadi?
S: Baki.
P: Apa jawapan bagi tujuh belas bahagi enam?
S: Dua baki lima.
P: Macam mana dapat dua baki lima?
S: Ini dua (menunjukkan saiz satu kumpulan) baki lima (menunjukkan lima penyedut minuman yang diasingkan).
P: Baik, sekarang boleh tunjuk cara penolakan macam tadi (menunjukkan kad yang tertulis 17 – 6)? Tunjuk dengan penyedut minuman.
S: (Subjek menyusun seperti berikut):

P: Dah siap ke?
S: Belum.
P: Siapkan.
S: (Subjek menyusun seperti berikut).



P: Nurul tolak berapa kali?
S: Dua.
P: Boleh tolak lagi?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab ini ada lima saja (menunjukkan lima penyedut minuman yang tinggal).
P: Jadi, apa jawapan kalau tujuh belas tolak enam dua kali?
S: Ada baki lima.
P: Yang ini (menunjukkan dua kumpulan bersaiz enam)??
S: Dua baki lima.
P: Jawapannya sama tak dengan jawapan untuk tujuh belas bahagi enam?
S: …Sama.
P: Apa yang sama?
S: Jawapan dia dua baki lima.
P: Susunan untuk penolakan ini sama tak dengan susunan yang Nurul buat untuk pembahagian tadi?
S: Tak.
P: Jadi apa yang sama bagi kedua-duanya?
S: Jawapan dia.
P: Apa lagi yang sama?
S: Tujuh belas.
P: Lagi?
S: Tak ada.
P: Nurul ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan ayat 17 ÷ 6)?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW728, Nurul membentuk dua kumpulan bersaiz enam bagi mewakili ayat bahagi 17 ÷ 6. Menurut Nurul, satu lagi kumpulan bersaiz lima yang diperoleh adalah baki kerana saiznya kurang daripada enam.

Selain itu, Nurul juga menunjukkan secara penolakan berulang, iaitu dengan mengeluarkan enam penyedut minuman secara berulang

daripada tujuh belas penyedut yang asal. Selepas penolakan, subjek menghasilkan dua kumpulan bersaiz enam dan satu kumpulan bersaiz lima. Subjek juga berpendapat bahawa susunan yang beliau bentuk bagi pembahagian ayat bahagi tujuh belas bahagi enam adalah sama dengan susunan yang terhasil apabila enam penyedut dikeluarkan secara berulang sebanyak dua kali. Nurul juga menunjukkan ayat bahagi 17 ÷ 6 secara pembahagian panjang dan jawapan yang diperoleh melalui pembahagian tersebut adalah sama dengan jawapan yang di dapati secara penyusunan penyedut minuman.

Selain itu, Nurul juga membentuk enam kumpulan bersaiz dua dan satu kumpulan bersaiz lima bagi mewakili ayat bahagi 17 ÷ 6. Subjek juga menunjukkan penolakan ayat tolak 17 – 6 dengan mengeluarkan enam penyedut minuman sebanyak dua kali daripada tujuh belas penyedut minuman dan membentuk satu kumpulan bersaiz lima. Nurul juga berpendapat bahawa jawapan yang diperoleh bagi ayat bahagi 17 ÷ 6 dan ayat tolak 17 – 6 adalah sama, walaupun susunan yang dibentuk bagi kedua-dua ayat tersebut adalah berbeza.

Masalah Berkotak

Menentukan Nama Kotak

Nurul berpendapat bahawa 'kotak ajaib' yang di sediakan dapat membahagi nombor-nombor yang dimasukkan ke dalamnya dan mengeluarkan jawapan. Nurul juga menunjukkan apa yang berlaku di dalam kotak ajaib secara pembahagian panjang. Petikan MK731 yang berikut memaparkan tingkah laku yang tunjukkan oleh Nurul.

Petikan MK731

P: (Menunjukkan satu kotak). Cuba lihat kotak ini. Kotak ini ada dua lubang A dan B. Bila kita masukkan dua nombor di sini (menunjukkan lubang A) satu nombor akan keluar melalui lubang ni (menunjukkan lubang B). Dua nombor akan masuk di sini (menunjukkan lubang A), kotak ni proses kemudian jawapannya akan keluar di sini. (menunjukkan lubang B) Sekarang kita masukkan dua nombor ya. Boleh Nurul beritahu ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 14)?

S: Empat belas.

P: Kita masukkan nombor tu di lubang ni (memasukkan kad tersebut di lubang A). Yang ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 2)?

S: Dua.

P: Baik. Nombor ni pun kita masukkan di sini (memasukkan nombor tersebut di lubang A). Boleh Nurul ingat kedua-dua nombor tadi?

S: (Subjek mengangguk).

P: Apa nombornya?

S: Empat belas dan dua.

P: Baik. Kita tengok nombor apa yang akan keluar dari sini. Ini nombor apa (mengeluarkan kad yang tertulis tujuh dari lubang B)?

S: Tujuh.

P: Apa kotak ini dah buat kepada empat belas dengan dua tadi, sehingga menghasilkan nombor ini. Empat belas dengan dua menghasilkan tujuh.
S: Bahagi.
P: Kenapa bahagi?
S: Sebab empat belas bahagi dua sama dengan tujuh (subjek menjawab sambil menulis pembahagian berikut pada kertas).

$$\begin{array}{r} 7 \\ 2\,\overline{)\,14} \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$

P: Baik, kita cuba satu lagi. (Menunjukkan kad yang tertulis 10). Ini nombor apa?
S: Sepuluh.
P: Kita masukkan nombor sepuluh di lubang ni. (Memasukkan kad tersebut di lubang A.) Yang ini nombor apa (menunjukkan kad yang tertulis 5)?
S: Lima.
P: Baik. Kita masukkan juga ke dalam lubang ni macam tadi (memasukkan kad tersebut ke dalam lubang A). Nombor apa yang keluar dari sini (menunjukkan kad bertanda 2 yang keluar dari lubang B).
S: Dua.
P: Nombor yang masuk tadi adalah sepuluh dan lima, nombor yang keluar adalah dua. Apa agaknya kotak ini dah buat kepada nombor-nombor tadi?
S: Bahagi.
P: Kenapa bahagi?
S: Sebab sepuluh bahagi lima sama dengan dua.
P: Jadi, kotak ni buat apa kepada sepuluh dan lima hingga dapat jawapan dua? Tadi empat belas dengan dua dapat jawapan tujuh?
S: Bahagi.
P: Nurul pasti ke bahagi?
S: Ya … bahagi.
P: Kita cuba satu lagi. Nombor apa ini (menunjukkan nombor empat)?
S: Empat.
P: Ini (menunjukkan nombor dua)?
S: Dua.
P: Nombor yang akan keluar?
S: Dua (subjek menjawab sebelum jawapan dikeluarkan dari lubang B).
P: Kenapa dua?
S: Empat bahagi dua sama dengan dua.

P: Baik, kita tengok batul tak (menunjukkan nombor dua yang keluar dari lubang B)!
S: Betul.
P: Apa kotak ni dah buat kepada empat dan dua hingga dapat jawapan dua?
S: Bahagi.
P: Betul bahagi? Bukan darab?
S: Bukan. Sebab kalau darab, jawapan dia lain.
P: Apa nombor yang akan keluar kalau darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Lapan.

$$4 \times 2 = 8$$

P: Baik. Sekarang, boleh Nurul tulis ayat bahagi bagi apa yang dilakukan oleh kotak tu?
S: (Subjek menulis ayat berikut) Macam ni.

$$4 \div 2 = 2$$

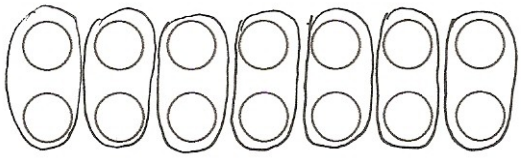
P: Baik, boleh Nurul jelaskan apa yang Nurul tulis?
S: Empat bahagi dua sama dengan dua.
P: Boleh Nurul tulis ayat bahagi untuk nombor ini (menunjukkan nombor 10) dan ini (menunjukkan nombor 5) yang masuk ke dalam kotak dan mengeluarkan ini (menunjukkan nombor 2)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$10 \div 5 = 2$$

P: Boleh beritahu cikgu apa yang Nurul tulis tu?
S: Sepuluh bahagi lima sama dengan dua.
P: Sekarang, boleh tulis ayat bahagi untuk set nombor yang mula-mula tadi? Nombor yang masuk adalah empat belas dan dua, nombor yang keluar ialah tujuh.
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$14 \div 2 = 7$$

P: Boleh jelaskan ayat tu?
S: Empat belas bahagi dua sama dengan tujuh.
P: Boleh Nurul tunjuk secara lukisan tentang apa yang berlaku dalam kotak tadi bagi nombor-nombor ini (menunjukkan ayat $14 \div 2 = 7$)?
S: (Subjek melukis empat belas bulatan dan membulatkan setiap dua bulatan tersebut, seperti berikut).



P: Boleh jelaskan apa yang Nurul lukis tu (menunjukkan lukisan subjek)?
S: Ini empat belas (menunjukkan kesemua bulatan) bahagi dua sama dengan tujuh.
P: Yang mana sama dengan tujuh?
S: Kumpulan (subjek menunjukkan kumpulan bersaiz dua yang terbentuk).
P: Yang ni merujuk pada bahagian mana pada gambar Nurul tu (menunjukkan angka 14)?
S: Semua ni (subjek menunjukkan kesemua bulatan yang dilukisnya).
P: Yang ini (menunjukkan 2)?
S: Dua (menunjukkan dua bulatan yang dikumpulkan).
P: Yang ini (menunjukkan 7)?
S: Tujuh, tujuh kumpulan (Subjek menunjukkan tujuh kumpulan yang terbentuk).
P: Nurul ada cara lain macam mana kotak ni boleh bahagi empat belas sehingga dapat jawapan tujuh?
S: Tak ada.

Dalam Petikan MK731, Nurul berpendapat bahawa operasi yang dilakukan oleh ‘kotak ajaib’ adalah operasi bahagi. Subjek juga dapat menentukan nombor yang akan keluar apabila nombor empat dan dua dimasukkan melalui lubang A, iaitu dua. Subjek menjelaskan bahawa operasi yang berlaku di dalam kotak adalah bahagi kerana menurut beliau, empat bahagis dua adalah sama dengan dua. Demikian juga bagi sepuluh bahagi lima dan empat belas bahagi dua. Beliau juga menjelaskan bahawa sekiranya operasi darab yang berlaku di dalam kotak apabila nombor empat dan dua dimasukkan di

dalamnya, jawapan yang harus di perolehi adalah lapan dan bukannya dua.

Subjek juga menulis ayat bahagi bagi ketiga-tiga set nombor yang melalui 'kotak ajaib' tersebut. Nurul menulis ayat bahagi 14 ÷ 2 = 7 bagi nombor empat belas dan dua yang masuk ke dalam kotak serta menghasilkan tujuh. Bagi set nombor sepuluh dan lima yang masuk mengeluarkan dua pula, subjek menulis 10 ÷ 5 = 2. Manakala, bagi set nombor empat dan dua yang masuk mengeluarkan dua pula, subjek menulis ayat darab 4 ÷ 2 = 2.

Selain itu, Nurul juga menjelaskan apa yang berlaku di dalam kotak bagi ayat darab 14 ÷ 2 secara lukisan. Subjek melukis tujuh kumpulan yang bersaiz dua. Subjek juga menjelaskan bahawa kesemua bulatan yang dilukisnya merujuk nombor empat belas yang masuk ke dalam kotak. Tujuh kumpulan yang terbentuk merujuk angka tujuh yang keluar melalui lubang B, manakala dua bulatan yang terdapat dalam satu kumpulan merujuk angka dua yang masuk ke dalam kotak bersama-sama nombor empat belas.

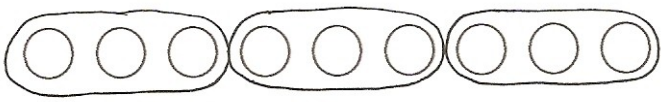
Menentukan hasil bahagi

Nurul menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B dengan menggunakan operasi bahagi. Subjek juga menjelaskan proses

yang berlaku di dalam kotak secara lukisan. Petikan MK732 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan MK732

P: Baik, tadi Nurul kata proses yang berlaku dalam kotak ini adalah bahagi. Jadi kita namakan kotak ni kotak bahagi. Sekarang cuba Nurul baca nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis 9). Nombor berapa ni?
S: Sembilan.
P: Baik, boleh Nurul masukkan ke dalam kotak ni (menunjukkan kotak dan memberikan subjek kad yang tertulis 9).
S: (Subjek memasukkan kad tersebut ke dalam kotak).
P: Berapa nombor ni (menunjukkan kad yang tertulis tiga)?
S: Tiga.
P: Nurul masukkan juga nombor ni.
S: (Subjek memasukkan kad tersebut).
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar dari kotak ni?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga?
S: Sebab bahagi.
P: Bahagi macam mana?
S: Sembilan bahagi tiga sama dengan tiga.
P: Boleh Nurul tunjuk macam tadi apa yang kotak tu buat kepada sembilan dan tiga hingga dapat jawapan?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Boleh Nurul jelaskan tentang lukisan Nurul ni?
S: Sembilan bahagi tiga sama dengan tiga (subjek menunjukkan lukisannya semasa menjawab).
P: Boleh tuliskan ayat bahagi bagi apa yang berlaku dalam kotak ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$9 \div 3 = 3$$

P: Yang ini (menunjukkan angka sembilan pada ayat bahagi) merujuk kepada bahagian mana dalam lukisan?
S: Semua (subjek menunjukkan lukisannya).

P: Yang ini (menunjukkan angka 3 selepas simbol bahagi)?
S: Tiga (subjek menunjukkan satu kumpulan bersaiz tiga pada lukisannya).
P: Yang ini (menunjukkan tiga selepas simbol '=').
S: Tiga kumpulan (subjek menunjukkan kumpulan yang telah dibulatkan).
P: Baik, sekarang kita cuba dengan nombor lain. Ini apa (menunjukkan kad yang tertulis nombor 2)?
S: Dua.
P: Yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 2)?
S: Dua.
P: Kalau kita masukkan kedua-dua nombor tu ke dalam kotak, nombor apa agaknya yang akan keluar dari lubang ini (menunjukkan lubang B)?
S: Satu.
P: Kenapa satu?
S: Sebab dua bahagi dua sama dengan satu.
P: Boleh Nurul tunjuk dengan cara lukisan macam tadi?
S: (Subjek melukis seperti berikut).

P: Boleh jelaskan lukisan Nurul ni?
S: Dua bahagi dua sama dengan satu.
P: Kenapa ada dua bulatan dalam satu kumpulan (menunjukkan lukisan subjek)?
S: Sebab dua bahagi dua.
P: Satu kumpulan ini?
S: Satu. Jawapan dia.
P: Nurul ada cara lain nak tunjuk dua bahagi dua?
S: …Tak ada.
P: Baik, boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$2 \div 2 = 1$$

P: Macam mana kalau nombor yang masuk melalui lubang A ialah yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 2) dan yang ini (menunjukkan kad tertulis 1). Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Sebab dua bahagi satu sama dengan dua.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$2 \div 1 = 2$$

P: Baik. Kalau dua yang masuk tadi kita gantikan dengan dua puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua puluh.
P: Kenapa dua puluh?
S: Sebab dua puluh bahagi satu sama dengan dua puluh.
P: Kalau kita ganti dengan dua ratus, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: Dua ratus juga.
P: Kenapa Nurul kata dua ratus?
S: Sebab dua ratus bahagi satu sama dengan dua ratus.
P: Baik, sekarang kita masukkan nombor ini (menunjukkan nombor 4)
S: Empat.
P: Dan nombor ini (menunjukkan nombor 2).
S: Dua.
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar dari lubang B?
S: Dua.
P: Kenapa dua?
S: Sebab empat bahagi dua sama dengan dua.
P: Boleh tunjuk cara lukisan?
S: (Subjek menjawab sambil melukis seperti berikut).

P: Boleh tuliskan ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$4 \div 2 = 2$$

P: Kalau kita gantikan empat dengan empat puluh, nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Nombor yang masuk empat puluh dan dua.
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Dua puluh.

$$\begin{array}{r} 20 \\ 2\,\overline{)\,40} \\ \underline{4} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

P: Kenapa dua puluh?

S: Sebab jawapan dia dua puluh.
P: Macam mana Nurul dapat dua puluh?
S: Sebab empat puluh bahagi dua sama dengan dua puluh.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis ayat bahagi seperti berikut).

$$40 \div 2 = 20$$

P: Baik, tadi empat diganti dengan empat puluh dapat dua puluh, kalau empat diganti dengan empat ratus, nombor apa agaknya yang akan keluar dari lubang B?
S: Dua ratus (subjek menjawab sambil menulis seperti berikut).

```
  200
2 ) 400
    4
     0
     0
       0
       0
```

P: Kenapa dua ratus?
S: Sebab empat ratus bahagi dua sama dengan dua ratus.
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menuliskan ayat bahagi seperti berikut).

$$400 \div 2 = 200$$

P: Baik sekarang kita masukkan nombor ini pula (menunjukkan kad yang tertulis nombor 8)?
S: Lapan.
P: Dan nombor ini (menunjukkan kad yamg tertulis nombor 3)?
S: Tiga.
P: Nombor apa agaknya yang akan keluar?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Nombor yang masuk lapan dan tiga, nombor apa yang akan keluar?
S: Tak ada nombor yang keluar.
P: Kenapa agaknya?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Tadi Nurul kata tak ada nombor yang akan keluar, kenapa Nurul rasa macam tu?
S: Sebab tak boleh bahagi.

Dalam Petikan MK732 Nurul menggunakan kaedah operasi bahagi bagi menentukan nombor yang bakal keluar melalui lubang B. Subjek juga berpendapat bahawa nombor yang akan keluar apabila nombor sembilan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak adalah tiga. Subjek juga menulis ayat bahagi 9 ÷ 3 = 3, bagi menjelaskan tentang apa yang berlaku di dalam kotak. Selain itu, subjek juga menunjukkan pembahagian tersebut secara lukisan. Dalam lukisan tersebut, Nurul membentuk tiga kumpulan bersaiz tiga.

Selain itu, Nurul berpendapat bahawa nombor yang bakal keluar melalui lubang B apabila nombor dua dan dua dimasukkan melalui lubang A adalah satu. Subjek juga melukiskan gambar rajah dua bulatan yang dilukiskan dalam satu kumpulan bagi mewakili pembahagian dua bahagi dua. Subjek juga menjelaskan bahawa satu kumpulan yang dilukis oleh beliau merujuk nombor yang bakal keluar melalui lubang B. Subjek juga menulis ayat 2 ÷ 2 = 1 bagi mewakili proses yang berlaku di dalam kotak.

Selain itu, Nurul berpendapat nombor yang akan keluar apabila nombor dua dan satu dimasukkan ke dalam kotak adalah dua. Subjek juga menulis ayat bahagi 2 ÷ 1 = 2 bagi mewakili proses yang berlaku apabila nombor dua dan satu dimasukkan ke dalam kotak.

Pada peringkat akhir petikan, subjek berpendapat bahawa sekiranya nombor dua pada ayat bahagi 2 ÷ 1 diganti dengan nombor dua puluh, nombor yang bakal keluar juga adalah dua puluh. Subjek juga menjelaskan jika sekiranya nombor dua diganti dengan

nombor dua ratus pula, nombor yang bakal keluar melalui lubang B adalah dua ratus. Subjek juga menulis ayat 20 ÷ 1 = 20 dan 200 ÷ 1 = 200 bagi mewakili kedua-dua proses tersebut. Bagi ayat bahagi 4 ÷ 2 pula, Nurul berpendapat apabila nombor empat diganti dengan empat puluh nombor yang akan keluar adalah dua puluh. Subjek juga menjelaskan apabila nombor empat diganti dengan empat ratus jawapannya adalah dua ratus. Subjek juga menunjukkan proses tersebut secara pembahagian panjang, di samping melukis gambar rajah bagi mewakili ayat tersebut.

Selain itu, subjek juga menulis ayat bahagi 40 ÷ 2 = 20 bagi mewakili empat puluh bahagi dua. Nurul juga menulis ayat 400 ÷ 2 = 200 bagi mewakili empat ratus bahagi dengan dua. Subjek juga melukis gambar rajah bagi menjelaskan lagi persamaan 4 ÷ 2 = 2. Lukisan tersebut menggambarkan dua kumpulan yang bersaiz dua.

Bagi nombor lapan dan tiga yang dimasukkan ke dalam kotak pula, Nurul berpendapat bahawa tidak ada sebarang nombor yang bakal keluar melalui lubang B. Menurut subjek, nombor lapan tidak boleh dibahagi dengan tiga maka tidak akan ada sebarang nombor yang keluar melalui lubang B.

Tafsiran Ayat Matematik

Ayat Bahagi

Ayat Bahagi Tanpa Baki

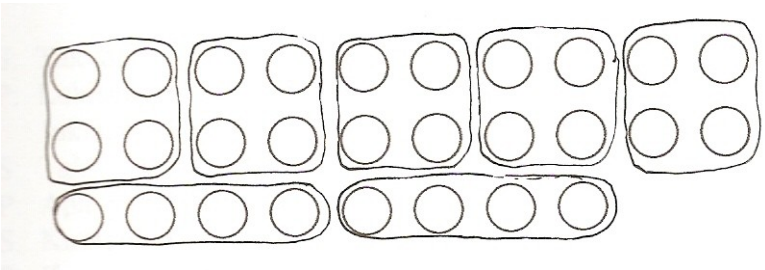
Nurul mentafsirkan ayat bahagi 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan yang bersaiz empat. Subjek juga mentafsir ayat 28 ÷ 4 = 7 dengan menulis ayat darab 4 x 7 = 28. Petikan TA741 memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Nurul.

Petikan TA741

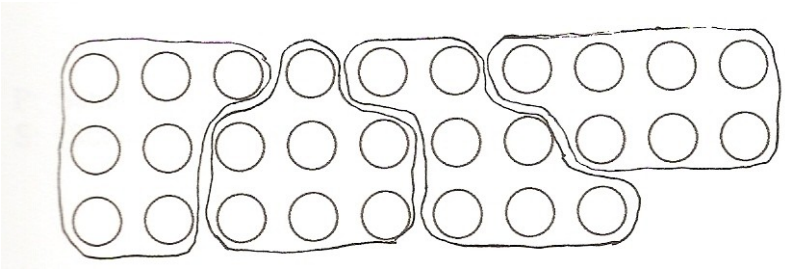
P: Nurul, tolong baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Dua puluh lapan bahagi empat.
P: Sekarang, boleh Nurul jelaskan macam mana dua puluh lapan bahagi empat ni?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan menjawab). Tujuh.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 4\,\overline{)\,28} \\ -\,\underline{28} \\ 0 \end{array}$$

P: Baik, boleh Nurul tunjuk secara lukisan macam mana dua puluh lapan bahagi empat?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada kertas).



P: Boleh jelaskan lukisan Nurul?
S: Bahagi empat.
P: Ini apa (menunjukkan lukisan subjek)? Bola ke, guli ke?
S: Guli.
P: Baik, ada berapa kumpulan?
S: (Subjek menghitung dan menjawab). Tujuh.
P: Apa kaitan tujuh dengan yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: Jawapan dia.
P: Kenapa Nurul kumpulkan empat guli dalam satu kumpulan?
S: Sebab … nak bahagi empat.
P: Ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 4)?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada kertas).



P: Yang ni ada berapa kumpulan?
S: (Subjek menghitung bilangan kumpulan dan menjawab). Empat.
P: Ada berapa guli dalam setiap kumpulan?
S: Tujuh.
P: Tujuh tu rujuk pada apa di sini (menunjukkan kad yang tertulis ayat 28 ÷ 4)?
S: Jawapan dia.
P: Yang ni (menunjukkan dua puluh lapan pada ayat 28 ÷ 4) merujuk apa pada lukisan Nurul?
S: Semua guli (subjek menunjukkan kesemua guli pada lukisannya).
P: Ada lagi tak cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Lukisan ini (menunjukkan lukisan terbaru subjek) dengan lukisan tadi sama tak?
S: Tak.
P: Apa yang tak sama?
S: Kumpulan.
P: Kumpulan tak sama macam mana?

S: Dalam ni ada empat (menunjukkan lukisan terbaru), dalam ni ada tujuh (menunjukkan lukisan sebelumnya).
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Guli dalam kumpulan.
P: Boleh jelaskan beza macam mana?
S: Dalam ni ada tujuh (menunjukkan lukisan terbaru), dalam ni ada empat (menunjukkan lukisan sebelumnya).
P: Ada cara lain nak tunjuk dua puluh lapan bahagi empat?
S: … Tak ada.
P: Sekarang, boleh Nurul tulis ayat darab pula daripada ayat bahagi ini (menunjukkan ayat 28 ÷ 4)?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Nurul boleh rujuk lukisan-lukisan Nurul tadi.
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$4 \times 7$$

P: Sama dengan apa?
S: (Subjek melengkapkan ayat darabnya seperti berikut).

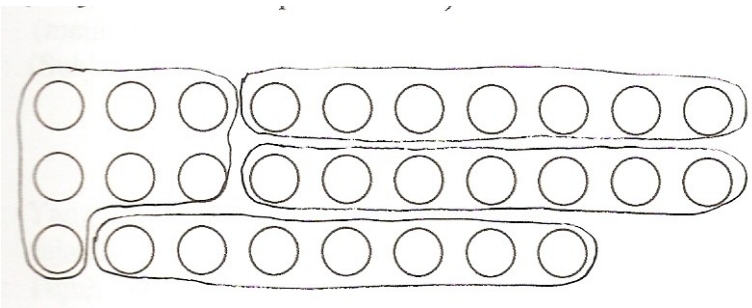
$$4 \times 7 = 28$$

P: Baik, boleh Nurul baca ayat yang Nurul tulis tu?
S: Empat kali tujuh sama dengan dua puluh lapan.
P: Sekarang, dengan menggunakan gambar rajah yang Nurul lukis tadi boleh Nurul jelaskan bagaimana Nurul dapat 4 x 7 = 28?
S: Empat (menunjukkan empat kumpulan pada lukisan) kali tujuh (menunjukkan tujuh guli dalam satu kumpulan) sama dengan dua puluh lapan (menunjukkan semua guli).
P: Baik, sekarang kita bandingkan dengan lukisan ini (menunjukkan lukisan awal subjek). Empat dalam 4 x 7 = 28 rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: (Subjek menunjukkan empat guli dalam satu kumpulan). Empat guli.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 7 pada ayat 4 x 7 = 28)
S: Tujuh kumpulan. (Subjek menunjukkan tujuh kumpulan yang terdapat pada gambar rajah).
P: Nurul ada cara lain nak tulis ayat darab untuk gambar rajah tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

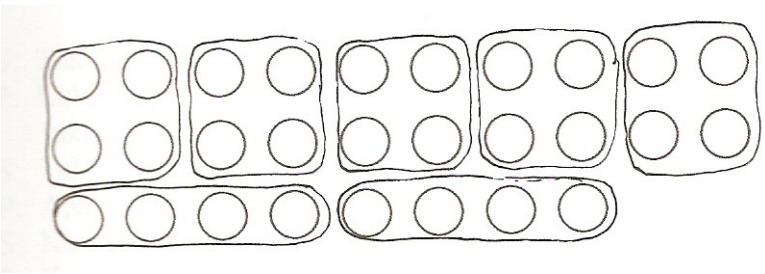
$$7 \times 4 = 28$$

P: Ayat ini sama tak dengan ayat darab yang Nurul tulis tadi?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?

S: Yang ini tujuh kali empat sama dengan dua puluh lapan, tadi empat kali tujuh sama dengan dua puluh lapan.
P: Ada yang sama tak pada kedua-dua ayat?
S: (Subjek mengangguk).
P: Apa yang sama?
S: Dua puluh lapan.
P: Ada lagi yang sama?
S: …Tak ada.
P: Baik, sekarang cuba Nurul baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: Dua puluh lapan bahagi tujuh.
P: Boleh Nurul tunjuk macam mana dua puluh lapan bahagi tujuh?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Satu kumpulan ada berapa guli?
S: Tujuh.
P: Lukisan ni sama tak dengan lukisan Nurul bagi yang ini (menunjukkan ayat 28 ÷ 4) tadi?
S: Sama dengan yang ini (menunjukkan lukisan kedua subjek bagi ayat 28 ÷ 4).
P: Jadi dua-dua ni (menunjukkan ayat 28 ÷ 4 dan ayat 28 ÷ 7) sama tak?
S: … Soalan tak sama tapi lukisan sama.
P: Apa lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Nurul ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 28 ÷ 7)?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Lukisan ni sama tak dengan lukisan Nurul bagi ayat ini (menunjukkan 28 ÷ 7)?
S: Ayat tak sama, gambar sama.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Empat.
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$28 \div 7 = 4$$

P: Baik, sekarang boleh tulis ayat darab pula bagi ayat bahagi ini (menunjukkan ayat bahagi yang ditulis oleh subjek)?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$7 \times 4 = 28$$

P: Yang ini (menunjukkan angka 7) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: Tujuh guli.
P: Yang ini (menunjukkan angka 4)?
S: Empat kumpulan.
P: Nurul boleh tulis ayat darab dengan cara yang lain?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$4 \times 7 = 28$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat darab yang Nurul tulis tadi (menunjukkan ayat 7 x 4 = 28)?
S: Tak sama.
P: Yang mana tak sama?
S: Yang ini (menunjukkan ayat yang baru ditulis) empat kali tujuh sama dengan dua puluh lapan, yang ini (menunjukkan ayat 7 x 4 = 28) tujuh kali empat sama dengan dua puluh lapan.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Tak ada.
P: Yang sama?
S: Dua puluh lapan.
P: Apa lagi yang sama?
S: Tak ada.

Dalam Petikan TA741, Nurul mentafsirkan ayat 28 ÷ 4 dengan melukis tujuh kumpulan guli bersaiz empat. Subjek juga

melukis empat kumpulan bersaiz tujuh. Nurul berpendapat bahawa kedua-dua gambar rajah yang dilukisnya adalah berbeza kerana mempunyai bilangan kumpulan san saiz kumpulan yang berbeza.

Nurul juga menulis ayat bahagi 28 ÷ 4 = 7 dan ayat bahagi 28 ÷ 7 = 4 bagi mewakili kedua-dua gambar rajah yang dilukisnya. Nurul juga menyamakan saiz kumpulan dengan pembahagi dan bilangan kumpulan sebagai hasil bahagi.

Selain itu, Nurul juga menulis ayat darab 4 x 7 = 28 merujuk ayat bahagi yang diberi oleh pengkaji. Subjek juga menulis ayat darab 7 x 4 = 28 merujuk gambar rajah yang dilukisnya. Nurul juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya adalah berbeza kerana pendarab pertama dan kedua bagi kedua-dua ayat adalah berbeza. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa walaupun kedua-dua ayat mempunyai pendarab pertama dan kedua yang berbeza jawapan yang diperoleh adalah sama.

Bagi ayat bahagi 28 ÷ 7 pula, Nurul melukis empat kumpulan bersaiz tujuh. Subjek juga berpendapat bahawa gambar rajah yang dilukis bagi mewakili ayat bahagi 28 ÷ 7 dan 28 ÷ 4 adalah sama walaupun kedua-duanya mempunyai ayat bahagi yang berbeza. Selain itu, Nurul juga menulis dua ayat darab, iaitu 7 x 4 = 28 dan 4 x 7 = 28 bagi mewakili ayat bahagi 28 ÷ 7. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab yang ditulisnya tidak sama kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai pendarab pertama dan kedua yang berbeza. Namun demikian, subjek

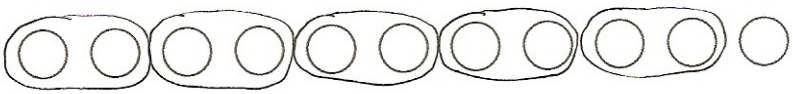
menjelaskan bahawa jawapan bagi ayat darab 4 x 7 dan 7 x 4 adalah sama, iaitu dua puluh lapan.

Ayat Bahagi Yang Mempunyai Baki

Nurul mentafsirkan ayat bahagi 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan yang bersaiz dua, dan satu kumpulan bersaiz satu. Subjek juga membentuk dua kumpulan bersaiz lima sebagai tafsiran bagi ayat bahagi 11 ÷ 2. Petikan TA742 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Nurul.

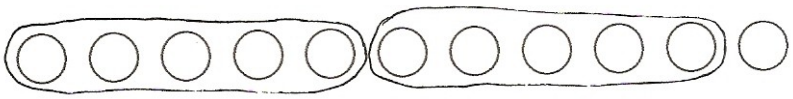
Petikan TA742

P: Nurul boleh baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat bahagi 11 ÷ 2)?.
S: Sebelas bahagi dua.
P: Baik, sekarang boleh jelaskan macam mana sebelas bahagi dua? Boleh lukis macam tadi.
S: (Subjek melukis seperti berikut pada kertas).



P: Nurul lukis apa?
S: Bola.
P: Baik, ada berapa kumpulan bola?
S: Lima.
P: Yang ini (menunjukkan satu bola yang tidak dibulatkan)?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Kenapa bola tu tak dibulatkan? Yang lain Nurul bulatkan.
S: Sebab dia satu saja.
P: Sepaptutnya ada berapa untuk dibulatkan?
S: Dua.
P: Kenapa nak bulatkan dua bola?
S: Sebab soalan dia sebelas bahagi dua.

P: Baik, sebelas bahagi dua dapat berapa?
S: Lima baki satu.
P: Lima tu merujuk apa pada lukisan Nurul?
S: Lima kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan dua pada ayat 11 ÷ 2)?
S: Dua bola (menunjukkan dua bola yang terdapat pada satu kumpulan).
P: Macam mana dengan satu bola yang tak dibulatkan ini (menunjukkan bola yang tak dibulatkan)?
S: Bola tu satu saja.
P: Jadi, macam mana kita nak tulis bagi mewakili bola tu?
S: Baki.
P: Jadi, jawapannya macam mana?
S: Baki satu.
P: Apa jawapan untuk yang ini (menunjukkan ayat 11 ÷ 2)?
S: Lima.
P: Lima tu merujuk apa? Pada lukisan?
S: Kumpulan.
P: Baik, Nurul boleh tunjuk ni (menunjukkan ayat 11 ÷ 2) dengan cara lain?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Satu kumpulan ada berapa bola?
S: Lima.
P: Yang ini (menunjukkan bola yang tidak dibulatkan)?
S: Satu bola saja.
P: Kenapa tak bulatkan?
S: Sebab yang tu lebih.
P: Lebih macam mana?
S: Sebelas bahagi dua ada lebih satu.
P: Jadi, apa jawapannya?
S: Lima.
P: Macam mana dapat lima?
S: Satu kumpulan ada lima bola (menunjukkan satu kumpulan bersaiz lima).
P: Ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan 11 ÷ 2)?
S: Tak ada.
P: Baik yang ini (menunjukkan lukisan dua kumpulan bersaiz lima) sama tak dengan yang ini (menunjukkan lukisan lima kumpulan bersaiz dua)?

S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ini (menunjukkan lukisan dua kumpulan bersaiz lima) dua kumpulan, yang ini (menunjukkan lukisan lima kumpulan bersaiz dua) lima kumpulan.
P: Lagi? Ada lagi yang tak sama?
S: Bola dalam kumpulan. Yang ni (menunjukkan lukisan bersaiz dua) ada dua, yang ini (menunjukkan lukisan dengan kumpulan bersaiz lima) ada lima.
P: Ada lagi yang tak sama?
S: Jawapan dia. Yang ini (menunjukkan lukisan bersaiz dua) jawapan dia lima sebab ada lima kumpulan, Yang ini (menunjukkan lukisan bersaiz lima) jawapan dia dua
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$11 \div 2 = 5 \text{ baki } 1$$

P: Yang ini (menunjukkan baki 1) merujuk apa pada lukisan Nurul?
S: Satu bola (menunjukkan bola yang tidak dibulatkan).
P: Ayat bahagi ni untuk lukisan yang mana?
S: Yang ini (menunjukkan lukisan bersaiz dua).
P: Macam mana dengan lukisan ini (menunjukkan lukisan bersaiz lima)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

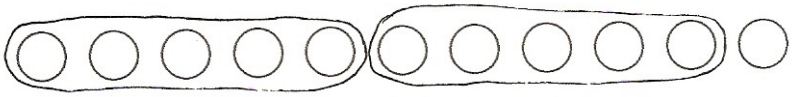
$$11 \div 5 = 2 \text{ baki } 1$$

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Tadi, Nurul kata kedua-dua lukisan untuk yang ini (menunjukkan 11 ÷ 2)? Kenapa ayat bahagi berlainan?
S: Dua-dua ayat pun boleh.
P: Dua-dua ayat boleh wakili lukisan yang mana?
S: Dua-dua lukisan.
P: Baik, sekarang boleh tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$5 \times 2 =$$

P: Sama dengan apa?
S: (Subjek memadam semula ayat darab yang ditulisnya)
P: Boleh tulis ayat darab untuk sebelas bahagi dua?
S: (Subjek menggelengkan kepala). Tak boleh.
P: Baik, Nurul ada cara lain nak tunjuk ni (menunjukkan ayat bahagi 11 ÷ 2)?
S: Tak ada.

P: Sekarang cuba Nurul baca apa yang tertulis di sini (menunjukkan kad yang tertulis 11 ÷ 5)?
S: Sebelas bahagi lima.
P: Boleh Nurul tunjuk macam mana sebelas bahagi lima? Nurul boleh lukis macam tadi.
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Nurul lukis apa?
S: Guli.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Dua.
P: Satu kumpulan ada berapa guli?
S: Lima.
P: Kenapa kumpulkan lima guli?
S: Sebab sebelas bahagi lima.
P: Kenapa bola ini tidak dibulatkan (menunjukkan satu bola yang tidak dibulatkan)?
S: Kurang lima.
P: Kalau lima baru boleh bulatkan?
S: (Subjek mengangguk).
P: Daripada lukisan ni berapa jawapan untuk ayat bahagi tadi?
S: Dua.
P: Macam mana dapat dua?
S: Dua kumpulan.
P: Yang ini (menunjukkan satu bola yang tidak dibulatkan).
S: Satu … bukan lima.
P: Kalau lima baru boleh bulatkan?
S: (Subjek mengangguk).
P: Jadi jawapan untuk sebelas bahagi lima berapa?
S: Dua.
P: Nurul ada cara lain nak tunjuk ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 11 ÷ 5)?
S: (Subjek cuba membuat beberapa lukisan kemudian menjawab). Sama macam tadi.
P: Tak ada cara lain?
S: Tak ada

Dalam Petikan TA742, Nurul mentafsir ayat 11 ÷ 2 dengan melukis lima kumpulan bersaiz dua. Subjek menjelaskan bahawa

lukisannya bersaiz dua kerana pembahagi bagi ayat 11 ÷ 2 adalah dua. Subjek juga berpendapat bahawa hanya bola yang bersaiz dua sahaja perlu dibulatkan. Sebiji bola tidak dibulatkan kerana saiznya bukan dua. Nurul juga menulis ayat 11 ÷ 2 = 5 baki 1, bagi mewakili lukisannya bagi ayat 11 ÷ 2.

Selain itu, subjek juga memberikan satu lagi tafsiran bagi ayat 11 ÷ 2 iaitu dengan melukis gambar rajah yang mempunyai dua kumpulan bersaiz lima. Dalam lukisan tersebut juga terdapat sebiji bola yang tidak dibulatkan. Subjek berpendapat, kedua-dua gambar rajah adalah berbeza kerana walaupun kedua-duanya merujuk ayat bahagi yang sama. Nurul juga menulis ayat 11 ÷ 5 = 2 baki 1 bagi mewakili gambar rajah kedua yang dilukisnya. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi 11 ÷ 2 = 5 baki 1 dan ayat 11 ÷ 5 = 2 baki 1, boleh digunakan bagi mewakili kedua-dua gambar rajah yang dilukis oleh subjek.

Bagi ayat bahagi 11 ÷ 5 pula, Nurul melukis dua kumpulan yang bersaiz lima dan sebiji guli yang tidak dibulatkan. Subjek menjelaskan bahawa jawapan bagi pembahagian tersebut adalah dua baki satu.

Ayat Bahagi Membabitkan Sifar, Satu, Dan Penyebut Dan Pengangka Yang Sama

Nurul berpendapat bahawa ayat bahagi 0 ÷ 3 dan ayat bahagi 3 ÷ 0 menghasilkan sifar. Subjek juga berpendapat 3 ÷ 3 adalah sama dengan satu. Petikan TA743 yang berikut memaparkan tingkah laku subjek.

Petikan TA743

P: Boleh Nurul baca apa yang tertulis pada kad ini (menunjukkan kad yang tertulis 0 ÷ 3)?
S: Kosong bahagi tiga
P: Boleh beritahu cikgu macam mana kosong bahagi tiga?
S: Kosong bahagi tiga sama dengan kosong.
P: Kenapa agaknya jawapannya kosong?
S: Sebab kosong tu tak ada nombor.
P: Jadi kalau bahagi tiga macam mana dapat kosong?
S: Kosong bahagi nombor apa pun kosong.
P: Boleh tunjuk cara lukisan?
S: (Subjek cuba melukis dan memadam semula kemudian menjawab), kosong tak boleh lukis.
P: Kalau tak boleh lukis, boleh tulis ayat bahagi untuk ayat ni (menunjukkan ayat 0 ÷ 3)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$0 \div 3 = 0$$

P: Baik, sekarang cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 3 ÷ 0)?
S: Tiga bahagi kosong.
P: Tiga bahagi kosong dapat berapa?
S: Kosong juga.
P: Kenapa dapat kosong?
S: Apa-apa nombor bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Yang ini boleh lukis tak?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Kosong, macam mana nak lukis?
P: Baik, boleh tulis ayat darab?

S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$0 \times 3 = 0$$

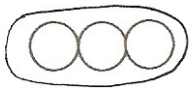
P: Boleh baca apa yang Nurul tulis?
S: Kosong kali tiga sama dengan kosong.
P: Yang ini (menunjukkan sifar selepas tanda '=') rujuk pada apa pada ayat bahagi?
S: Kosong (menunjukkan sifar sebelum simbol bahagi).
P: Kenapa bukan yang ini (menunjukkan sifar selepas simbol '=')?
S: Kosong tu pun boleh.
P: Kedua-dua kosong pun sama ke?
S: Sama.
P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: Tak ada.
P: Baik, boleh lengkapkan ayat bahagi ni (menunjukkan ayat $3 \div 0$)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$3 \div 0 = 0$$

P: Boleh bacakan apa yang Nurul tulis?
S: Tiga bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Sekarang, boleh tulis ayat darab bagi ayat bahagi ini (menunjukkan ayat $3 \div 0$)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$0 \times 3 = 0$$

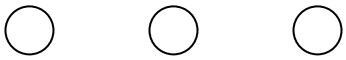
P: Boleh jelaskan apa yang Nurul tulis?
S: Kosong darab tiga sama dengan kosong.
P: Kenapa jawapannya kosong?
S: Sebab kalau darab dengan kosong, mesti kosong.
P: Ada cara lain tulis ayat darab?
S: Tak ada.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat darab tadi?
S: Sama.
P: Macam mana dengan ayat bahagi tadi (menunjukkan ayat bahagi $0 \div 3 = 0$ dan ayat bahagi $3 \div 0 = 0$) ?
S: Soalan tak sama, jawapan sama.
P: Baik, cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis $3 \div 3$)?
S: Tiga bahagi tiga.
P: Yang ini boleh lukis?
S: (Subjek mengangguk dan melukis yang berikut).



P: Nurul lukis apa?
S: Kuih.
P: Ada berapa kumpulan?
S: Satu.
P: Ada berapa kuih dalam satu kumpulan?
S: Tiga.
P: Kenapa tiga?
S: Sebab soalan tiga bahagi tiga.
P: Baik, tiga bahagi tiga sama dengan berapa?
S: Satu.
P: Kenapa satu?
S: Tiga bahagi tiga sama dengan satu.
P: Kalau dalam lukisan Nurul, yang mana jawapannya?
S: Satu kumpulan.
P: Boleh lengkapkan ayat bahagi tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$3 \div 3 = 1$$

P: Yang ini (menunjukkan tiga selepas simbol bahagi) rujuk pada apa dalam lukisan Nurul?
S: Tiga kuih.
P: Ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan ayat 3 ÷ 3)?
S: (Subjek melukis seperti berikut).

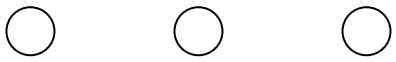


P: Ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Satu kumpulan ada berapa kuih?
S: Satu.
P: Lukisan ini sama tak dengan yang tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Kumpulan.
P: Lagi?
S: Kuih dalam satu kumpulan.
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Sekarang, cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis 3 ÷ 1).
S: Tiga bahagi satu.

P: Tiga bahagi satu dapat berapa?
S: Tiga.
P: Macam mana tiga bahagi satu dapat tiga?
S: (Subjek menulis ayat berikut dan menjawab). Satu.

$$\begin{array}{r} \underline{3} \\ 1\,\overline{)\,3} \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

P: Baik ada cara lain nak tunjuk ayat tadi?
S: Lukis. (Subjek melukis seperti berikut)



P: Ada berapa kumpulan di sini?
S: Tiga.
P: Tiga kumpulan tu merujuk apa di sini (menunjukkan pembahagian yang ditulis oleh subjek)?
S: (Subjek menunjukkan tiga pada hasil bahagi).
P: Yang ni (menunjukkan nombor satu pada ayat bahagi) merujuk apa dalam lukisan Nurul?
S: Satu kumpulan.
P: Ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan $3 \div 1$)?
S: Tak ada.
P: Boleh Nurul tulis ayat darab bagi Yang ini (menunjukkan ayat bahagi $3 \div 1$)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$3 \times 1 = 3$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat darab?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$1 \times 3 = 3$$

P: Sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama, tapi tadi tiga kali satu, yang ini satu kali tiga.

Dalam Petikan TA743, Nurul berpendapat bahawa pembahagian yang membabitkan sifar akan menghasilkan jawapan sifar. Menurut Nurul, jawapan bagi ayat bahagi $0 \div 3$ dan ayat bahagi $3 \div 0$

adalah sifar kerana menurut subjek sebarang pembahagian membabitkan sifar adalah sifar.

Selain itu, subjek juga mentafsir ayat bahagi 3 ÷ 0 dengan menulis ayat darab 3 x 0 = 0. Bagi ayat bahagi 0 ÷ 3 pula, subjek menulis ayat darab 0 x 3 = 0. Subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi boleh diwakili oleh ayat darab 0 x 3 = 0 dan ayat darab 0 x 3 = 0.

Bagi ayat bahagi 3 ÷ 3 pula, Nurul melukis tiga biji kuih yang dikumpulkan dalam satu bulatan. Subjek juga melukis tiga biji kuih yang dikumpulkan secara berasingan.

Bagi ayat bahagi 3 ÷ 1, Nurul mentafsirnya dengan melukis tiga biji kuih yang diletakkan dalam tiga kumpulan yang berasingan. Subjek juga mentafsir ayat bahagi 3 ÷ 1 dengan menulis ayat darab 3 x 1 = 3 dan ayat darab 1 x 3 = 3.

Ayat Darab

Nurul mentafsir ayat 4 x 2 dengan menulis ayat 8 ÷ 4 = 2. Subjek juga melukis dua kumpulan bersaiz empat dan empat kumpulan bersaiz dua bagi mentafsir ayat 4 x 2. Petikan TA744 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh subjek.

Petikan TA744

P: Cuba baca yang ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat darab 4 x 2) ?

S: Empat kali dua.
P: Boleh Nurul lengkapkan ayat darab tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$4 \times 2 = 8$$

P: Boleh Nurul baca apa yang Nurul tulis tu?
S: Empat kali dua sama dengan lapan.
P: Baik, boleh Nurul tulis ayat bahagi untuk ayat darab tu?
S: (Subjek mengambil masa yang lama dan menulis seperti berikut)

$$8 \div 2 = 4$$

P: Boleh baca?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi untuk ini (menunjukkan ayat bahagi 4 x 2)?
S: (Subjek menulis seperti berikut)

$$8 \div 4 = 2$$

P: Boleh Nurul baca?
S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.
P: Sama tak kedua-dua ayat bahagi tu?
S: Tak sama.
P: Tapi, kedua-duanya Nurul tulis ayat darab yang sama, kan?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Boleh Nurul tunjuk dengan lukisan yang ini (menunjukkan ayat darab 4 x 2)?
S: (Subjek melukis seperti berikut).

P: Boleh jelaskan lukisan Nurul?
S: Empat guli (menunjukkan satu kumpulan bersaiz empat), ada dua (menunjukkan dua kumpulan). Empat kali dua.
P: Empat kali dua sama dengan?
S: Lapan.
P: Semua ada berapa guli?
S: Lapan.
P: Baik, sekarang boleh terangkan tentang ayat ni (menunjukkan ayat bahagi 8 ÷ 2 = 4 yang ditulis oleh subjek) menggunakan

lukisan tadi?

S: Lapan (menunjukkan semua guli) bahagi dua (menunjukkan dua kumpulan), sama dengan empat (menunjukkan satu kumpulan).

P: Apa kaitan antara darab dengan bahagi?

S: … Bahagi terbalik pada darab.

P: Boleh beritahu cikgu, bahagi terbalik macam mana dengan darab? Boleh bagi contoh, nombor-nombor tadi pun boleh.

S: Kalau lapan bahagi dua dapat empat. Empat darab dua dapat lapan. Bahagi terbalik pada darab.

P: Nurul ada cara lain nak tunjuk yang ini (menunjukkan ayat darab 4 x 2)?

S: (Subjek melukis gambar rajah berikut).

P: Boleh Nurul jelaskan lukisan yang ini?

S: Empat (menunjukkan empat kumpulan) kali dua (menunjukkan satu kumpulan).

P: Jawapannya?

S: Lapan.

P: Dalam lukisan, yang mana jawapannya?

S: Semua (menunjukkan semua guli).

P: Sekarang boleh Nurul kaitkan ayat bahagi tadi dengan lukisan ini (menunjukkan lukisan yang baru dilukis oleh subjek).

S: Lapan (menunjukkan semua guli) bahagi dua (menunjukkan satu kumpulan) sama dengan empat (menunjukkan empat kumpulan).

P: Kalau ayat ini (menunjukkan ayat 8 ÷ 4 = 2)?

S: Lapan (menunjukkan semua guli) bahagi empat (menunjukkan empat kumpulan) sama dengan dua.

P: Cuba baca yang ini pula (menunjukkan kad yang tertulis ayat darab 2 x 4)?

S: Dua kali empat.

P: Jawapannya?

S: Lapan.

P: Boleh tulis ayat bahagi untuk ayat darab ni?

S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$8 \div 4 = 2$$

P: Boleh baca apa yang Nurul tulis?

S: Lapan bahagi empat sama dengan dua.

P: Kenapa Nurul tulis lapan?

S: Sebab … dua kali empat sama dengan lapan.

P: Boleh tulis ayat bahagi dengan cara yang lain?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$8 \div 2 = 4$$

P: Boleh baca?
S: Lapan bahagi dua sama dengan empat.
P: Ayat yang ini (menunjukkan ayat $8 \div 4 = 2$) sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat $8 \div 2 = 4$)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni empat (menunjukkan pembahagi ayat $8 \div 4 = 2$), yang ni dua (menunjukkan pembahagi ayat $8 \div 2 = 4$).
P: Ada lagi tak sama?
S: Yang ni dua (menunjukkan hasil bahagi ayat $8 \div 4 = 2$), yang ni empat (menunjukkan hasil bahagi ayat $8 \div 2 = 4$).
P: Ada lagi?
S: Tak ada.
P: Ayat yang ini (menunjukkan ayat $8 \div 4 = 2$) sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat $8 \div 4 = 2$ yang ditulis bagi 4 x 2)?
S: Sama.
P: Kenapa sama?
S: Sebab empat kali dua sama dengan dua kali empat.

Dalam Petikan TA744, Nurul menulis ayat bahagi $8 \div 4 = 2$ dan ayat bahagi $8 \div 2 = 4$ sebagai tafsiran kepada ayat darab 4 x 2. Subjek juga menjelaskan bahawa angka empat dan dua yang terdapat pada ayat 4 x 2 adalah sama dengan angka empat dan dua yang terdapat pada ayat bahagi $8 \div 4 = 2$. Selain itu, Nurul berpendapat bahawa ayat darab adalah songsangan bagi ayat bahagi.

Nurul juga melukis dua kumpulan guli yang bersaiz empat dan empat kumpulan guli yang bersaiz dua sebagai tafsiran bagi ayat darab 4 x 2 dan 2 x 4. Subjek juga mentafsirkan kedua-dua lukisannya dengan menggunakan ayat bahagi $8 \div 4 = 2$ dan ayat bahagi $8 \div 2 = 4$.

Petikan TA845

P: (Menunjukkan kad yang tertulis ayat 6 x 4). Cuba baca apa yang tertulis pada kad ini?

S: Enam kali empat.
P: Boleh Nurul tulis ayat darab tu dengan lengkap?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$6 \times 4 = 24$$

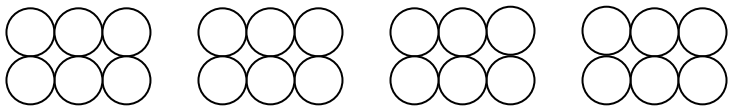
P: Sekarang, cuba tulis ayat bahagi daripada ayat tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 4 = 6$$

P: Boleh Nurul baca?
S: Dua puluh empat bahagi empat sama dengan enam.
P: Baik, dua puluh empat sama dengan apa pada ayat darab?
S: Jawapan enam kali empat.
P: Ada tak cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 6 = 4$$

P: Kedua-dua ayat bahagi tu sama tak?
S: Tak sama.
P: Kenapa?
S: Yang ni (menunjukkan empat pada ayat 24 ÷ 4 = 6) empat, yang ni (menunjukkan enam pada ayat 24 ÷ 6 = 4) enam.
P: Baik, apa kaitan antara ayat darab dan ayat bahagi?
S: Terbalik.
P: Boleh Nurul tunjuk secara lukisan untuk ayat ini (menunjukkan ayat 6 x 4)?
S: (Subjek melukis seperti berikut).



P: Baik, yang ini (menunjukkan satu kumpulan) merujuk apa pada ayat darab?
S: Enam.
P: Kumpulan ada berapa?
S: Empat.
P: Kenapa empat kumpulan?

S: Sebab enam darab empat.
P: Boleh jelaskan lukisan Nurul merujuk ayat ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 4 = 6)?
S: Dua puluh empat (menunjukkan keseluruhan lukisan) bahagi empat (menunjukkan empat kumpulan) sama dengan enam (menunjukkan satu kumpulan).
P: Untuk ayat ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 6 = 4) boleh jelaskan macam tadi?
S: Dua puluh empat (menunjukkan keseluruhan lukisan) bahagi enam (menunjukkan satu kumpulan) sama dengan empat (menunjukkan empat kumpulan).

Dalam Petikan TA745 Nurul mentafsir ayat darab 6 x 4 dengan menulis ayat bahagi 24 ÷ 4 = 6. Nurul juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 sebagai tafsiran bagi ayat darab 6 x 4. Subjek juga melukis enam kumpulan guli yang bersaiz empat bagi menunjukkan enam darab empat. Nurul mentafsir lukisannya berpandu kepada ayat 6 x 4. Selain itu, subjek juga mentafsir lukisannya merujuk ayat bahagi 24 ÷ 4 = 6 dan 24 ÷ 6 = 4. Nurul juga berpendapat bahawa bahagi adalah songsangan kepada darab.

Petikan TA746

P: Boleh Nurul baca ayat ini (menunjukkan kad yang tertulis ayat darab 9 x 0)?
S: Sembilan kali kosong.
P: Baik, apa jawapan bagi sembilan darab kosong?
S: Kosong.
P: Kenapa jawapannya kosong?
S: Sebab nombor darab dengan kosong mesti kosong.
P: Kenapa mesti kosong?
S: (Subjek tidak menjawab).
P: Kenapa kalau darab dengan kosong mesti kosong? Kosong tu berapa?
S: Kosong tu kan tak ada. Jadi darab dengan kosong, kosonglah!

P: Baik, boleh Nurul lengkapkan ayat ni (menunjukkan ayat darab 9 x 0)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$9 \times 0 = 0$$

P: Sekarang boleh tulis ayat bahagi pula bagi ayat tu?
S: (Subjek mengambil masa yang lama dan menulis seperti berikut).

$$0 \div 9 = 0$$

P: Boleh baca?
S: Sembilan bahagi kosong sama dengan kosong.
P: Ada ayat bahagi lain?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan memadamnya).

$$9 \div 0 = 0$$

P: Ada ayat lain?
S: Tak ada.
P: Boleh Nurul tunjuk secara lukisan?
S: (Subjek cuba melukis dan memadamnya).
P: Boleh lukis?
S: Kosong tak boleh lukis.
P: Boleh buat cerita?
S: Kosong tak boleh cerita.
P: Kosong tak boleh buat cerita?
S: (Subjek menggelengkan kepala).
P: Boleh tulis ayat darab lain untuk ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 0 ÷ 9 = 0)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$0 \times 9 = 0$$

P: Baik, untuk yang ini boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut dan memadamnya).

$$9 \div 0 = 0$$

P: Ayat bahagi lain ada tak?
S: (Subjek cuba menulis dan menjawab). Tak ada.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat bahagi tadi?
S: Sama.
P: Ayat darab ini (menunjukkan ayat darab 0 x 9 = 0)?
S: Tak sama. Ini kosong (menunjukkan sifar sebelum simbol darab pada ayat darab 0 x 9 = 0), yang ni sembilan

(menunjukkan sembilan pada ayat darab 9 x 0 = 0). Tapi, jawapan sama.

P: Ada lagi yang tak sama?

S: Kosong (menunjukkan sifar selepas simbol darab pada ayat darab 9 x 0 = 0), yang ni sembilan (menunjukkan sembilan pada ayat darab 0 x 9 = 0).

P: Ada lagi yang tak sama?

S: Tak ada.

Dalam Petikan TA746 Nurul mentafsir ayat darab 9 x 0 dengan menulis ayat bahagi 0 ÷ 9 = 0. Nurul juga melengkapkan ayat darab yang diberi sebagai 9 x 0 = 0. Selain itu, subjek menulis satu lagi ayat darab merujuk ayat bahagi 0 ÷ 9 = 0, iaitu 0 x 9 = 0. Subjek berpendapat bahawa kedua-dua ayat darab tersebut adalah berbeza kerana pendarab pertama dan kedua pada ayat darab 9 x 0 = 0 dan 0 x 9 = 0 adalah berbeza. Namun demikian, subjek berpendapat jawapan yang diperoleh daripada kedua-dua ayat darab tersebut adalah sama, iaitu sifar. Subjek juga pendapat bahawa ayat bahagi yang ditafsir bagi kedua-dua ayat darab 9 x 0 = 0 dan 0 x 9 = 0 adalah sama, iaitu 0 ÷ 9 = 0.

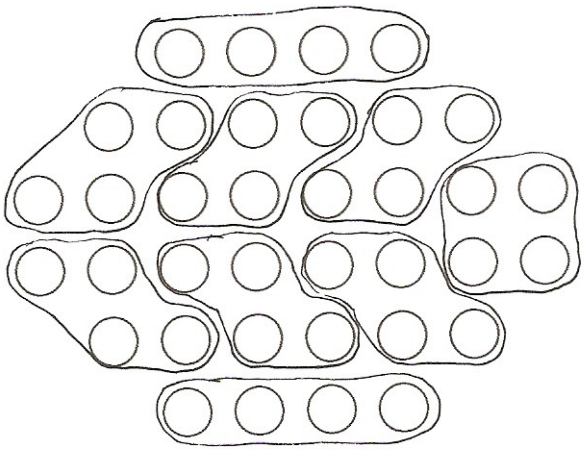
Penyelesaian Masalah

Bentuk Diskrit

Nurul menyelesaikan masalah 36 ÷ 4 dengan membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan kumpulan. Beliau juga membulatkan sembilan guli bagi membentuk empat kumpulan sebagai penyelesaian kepada masalah 36 ÷ 9. Petikan PM751 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Nurul.

Petikan PM751

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai gambar 36 guli) Di sini ada gambar guli. Cikgu nak Nurul bahagi empat guli-guli ini?
S: (Subjek menghitung guli-guli tersebut secara senyap agak lama.).
P: Bahagi empat …boleh lukis pada gambar tu.
S: (Subjek melukis pada gambar yang beri seperti berikut).

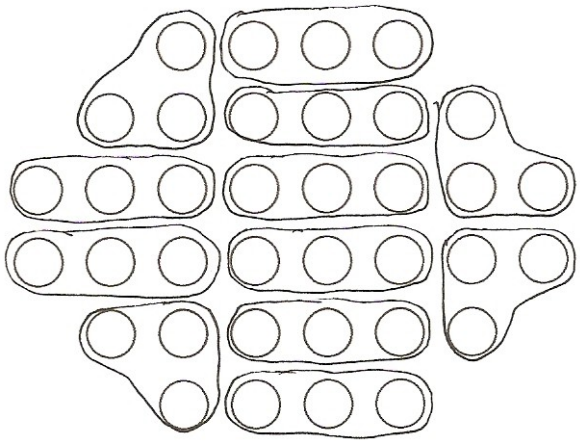


P: Dah siap?

S: (Subjek mengangguk).
P: Ada berapa guli semua sekali?
S: (Subjek menghitung dan menjawab). Tiga puluh enam.
P: Macam mana Nurul tahu ada tiga puluh enam?
S: Kira.
P: Tiga puluh enam bahagi empat dapat berapa?
S: (Subjek membuat pembahagian panjang dan menjawab). Sembilan.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 4\,\overline{)\,36} \\ -\,\underline{36} \\ 0 \end{array}$$

P: Kalau rujuk pada gambar rajah, mana jawapannya?
S: (Subjek menunjukkan bulatan-bulatan yang telah dilukisnya).
P: Ada berapa kesemuanya?
S: Sembilan.
P: Ada berapa guli dalam setiap bulatan?
S: Empat.
P: Kenapa Nurul kumpulkan empat guli?
S: Sebab bahagi empat.
P: Kalau bahagi tiga macam mana?
S: Nak lukis di mana?
P: Boleh beritahu cikgu tanpa lukis? Tadi, Nurul bulatkan macam ni (menunjukkan gambar rajah) untuk bahagi empat. Kalau bahagi tiga kena buat macam mana?
S: Boleh lukis?
P: (Memberikan kertas lain) Baik, lukis di sini.
S: (Subjek membulatkan seperti berikut).



P: Apa yang Nurul buat tadi?
S: Bulatkan tiga guli.
P: Kenapa bulatkan tiga?

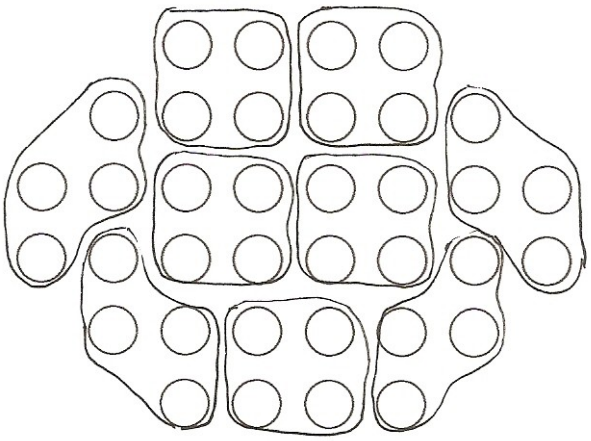
S: Sebab nak bahagi tiga.
P: Sebab bahagi tiga, bulatkan tiga?
S: (Subjek mengangguk).
P: Kalau bahagi dua kena buat macam mana agaknya?
S: Bulatkan dua.
P: Ada tak cara lain untuk bahagi dua selain daripada bulatkan dua guli?
S: Tak ada.
P: Kita tengok semula gambar rajah ni (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi empat). Di sini ada yang berbentuk memanjang, ada yang berbentuk segi empat, sama tak kedua-duanya?
S: Sama.
P: Kenapa sama? Bentuk macam tak sama.
S: Bentuk tak sama, guli ada empat … sama.
P: Boleh Nurul tulis ayat bahagi untuk gambar tu?
S: Ayat bahagi?
P: Seperti ini (menunjukkan beberapa ayat bahagi yang tertulis kad). Kesemuanya ada berapa guli?
S: Tiga puluh enam.
P: Nurul bahagi apa tadi?
S: Bahagi empat. (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 4$$

P: Tiga puluh enam bahagi empat sama dengan apa?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 4 = 9$$

P: Ada cara lain tak nak tunjuk bahagi empat?
S: (Subjek melukis seperti berikut).

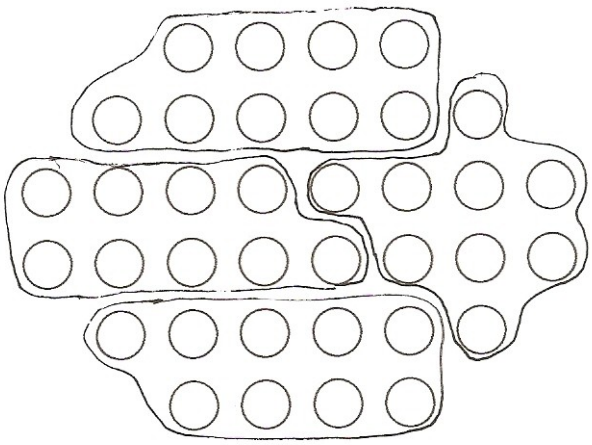


P: Ada berapa kumpulan kesemuanya?

S: Sembilan.
P: Ini sama tak dengan yang Nurul buat tadi (menunjukkan gambar rajah yang dilukis pada awalnya)?
S: Lain sikit.
P: Apa yang lain?
S: Bulatan.
P: Bilangan guli setiap bulatan sama tak?
S: Sama.
P: Ada berapa guli?
S: Empat.
P: Boleh Nurul tulis ayat bahagi untuk gambar ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 4 = 9$$

P: Ayat bahagi ini sama tak dengan yang tadi?
S: Sama.
P: Ada tak cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain nak tunjuk bahagi empat?
S: … Tak ada.
P: Baik untuk gambar rajah ini boleh tak kita tulis ayat bahagi ini (menunjukkan ayat 36 ÷ 9 = 4)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa tak boleh?
S: Sebab itu tiga puluh enam bahagi sembilan, yang ni bahagi empat.
P: Tak sama ke?
S: Tak.
P: Boleh tak Nurul tunjuk macam mana tiga puluh enam bahagi sembilan?
S: (Subjek melukis seperti berikut).

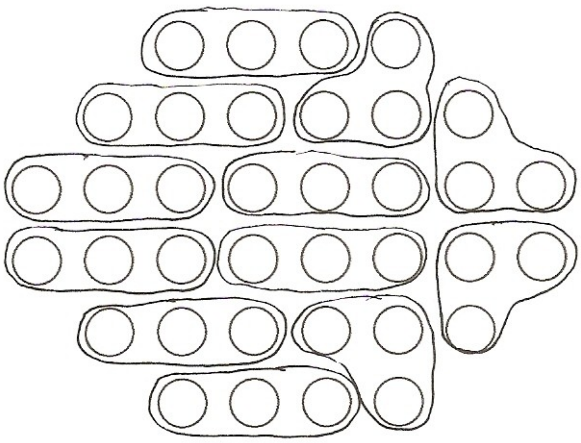


P: Ada berapa kumpulan di sini?

S: Empat.
P: Ada berapa guli setiap kumpulan?
S: Sembilan.
P: Gambar rajah ni sama tak dengan gambar rajah tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama pada gambar- gambar tadi?
S: Kumpulan tak sama.
P: Lagi apa yang tak sama?
S: Guli dalam bulatan.
P: Lagi?
S: Bentuk dia (subjek menunjukkan bentuk kumpulan pada kedua-dua gambar rajah).
P: Lagi?
S: …Tak ada.
P: Apa yang sama pada kedua-dua gambar rajah ini?
S: …Tak ada.
P: Tak ada yang sama?
S: Tak ada.
P: Bagaimana dengan ayat bahagi? Boleh Nurul tulis ayat bahagi gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi sembilan).
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 9 = 4$$

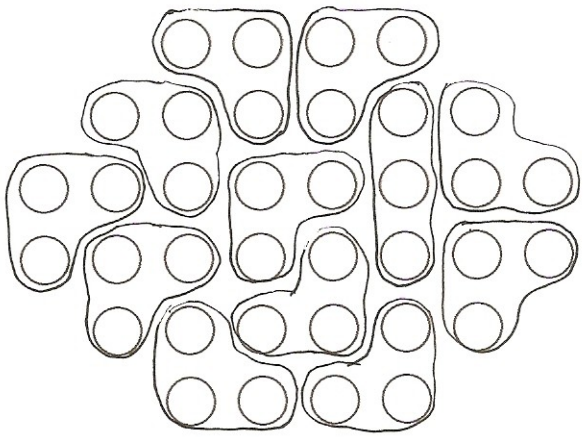
P: Cuba tengok ayat-ayat bahagi tu, sama tak kedua-dua ayat tu?
S: Tak sama. Ini bahagi empat (menunjukkan ayat bahagi $36 \div 4 = 9$) ini bahagi sembilan (menunjukkan ayat bahagi $36 \div 9 = 4$).
P: Sekarang boleh Nurul bahagi tiga?
S: (Subjek melukiskan seperti berikut pada gambar rajah yang di beri).



P: Baik, ada berapa guli dalam satu kumpulan?
S: Tiga.
P: Kenapa kumpulkan tiga?
S: Sebab bahagi tiga.
P: Apa jawapan untuk bahagi tiga tu?
S: Dua belas (subjek menghitung kumpulan-kumpulan yang telah dibulatkan dan menjawab).
P: Kenapa dua belas?
S: Ada dua belas kumpulan.
P: Baik, yang ini (menunjukkan gambar rajah yang subjek lukis bagi mewakili 36 ÷ 4), sama tak dengan yang ni (menunjukkan gambar rajah yang subjek lukis bagi 36 ÷ 3)?
S: Tak sama.
P: Kenapa tak sama?
S: Sebab yang ni empat (menunjukkan gambar rajah yang dilukisnya bagi ayat 36 ÷ 4) , yang ni tiga (menunjukkan gambar rajah yang dilukisnya bagi ayat 36 ÷ 3).
P: Macam mana dengan yang ini (menunjukkan gambar rajah yang subjek lukis untuk ayat 36 ÷ 9).
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni (menunjukkan gambar rajah bagi 36 ÷ 9) sembilan, yang ini (menunjukkan gambar rajah bagi 36 ÷ 3) tiga.
P: Boleh Nurul tulis ayat bahagi untuk gambar rajah ini?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 3 = 12$$

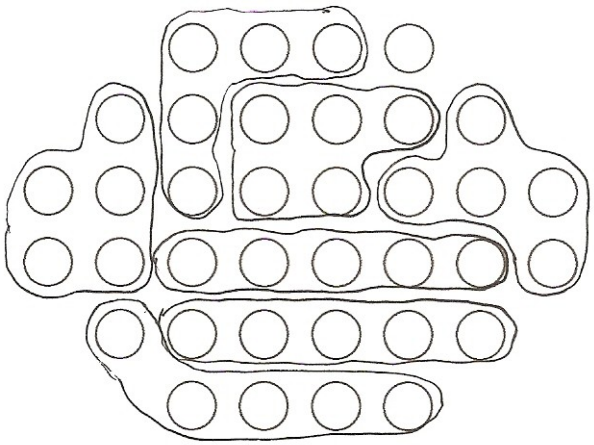
P: Boleh tunjuk cara lain untuk bahagi tiga?
S: (Subjek menunjukkan seperti berikut).



P: Ada berapa guli satu kumpulan?
S: Tiga.
P: Yang ini sama tak dengan yang tadi?
S: Guli sama, bentuk dia tak sama.
P: Apa lagi yang sama dengan tadi?
S: Kumpulan.
P: Lagi?
S: …Tak ada.
P: Boleh Nurul tulis ayat bahagi untuk ini (menunjukkan gambar rajah terbaru bagi ayat 36 ÷ 3)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 3 = 12$$

P: Cuba baca.
S: Tiga puluh enam bahagi tiga sama dengan dua belas.
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Sama.
P: Apa yang sama?
S: Tadi pun, tiga puluh enam bahagi tiga sama dengan dua belas. Dua-dua ayat sama.
P: Baik, yang ni (menunjukkan 3 pada ayat 36 ÷ 3 = 12) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Tiga (menunjukkan guli dalam satu bulatan).
P: Yang ni (menunjukkan dua belas pada ayat 36 ÷ 3 = 12)?
S: Kumpulan ada dua belas (subjek menunjukkan kesemua kumpulan).
P: Yang ni (menunjukkan tiga puluh enam pada 36 ÷ 3 = 12)?
S: Semua.
P: Baik, Nurul ada cara lain untuk bahagi tiga?
S: Tak ada.
P: Baik, sekarang cuba bahagi lima?
S: (Subjek membulatkan seperti berikut).

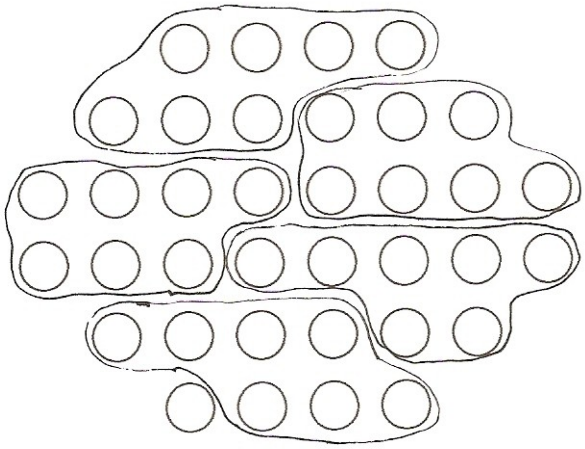


P: Ada berapa guli dalam satu kumpulan?
S: Lima.
P: Ada berapa kumpulan?
S: (Subjek menghitung dan menjawab). Lima.
P: Di sini ada satu guli yang tak dibulatkan (menunjukkan satu guli yang tidak dikumpulkan)?
S: Lebih … baki.
P: Baki? Macam mana Nurul tahu ada baki?
S: Sebab yang ini lebih satu (menunjukkan satu guli yang tidak dibulatkan). Baki lah.
P: Boleh Nurul tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 5 = 7 \text{ baki } 1$$

P: Yang ini (menunjukkan nombor 5 pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Lima guli (menunjukkan satu kumpulan).
P: Yang ini (menunjukkan nombor tujuh pada ayat bahagi).
S: Tujuh kumpulan.
P: Yang ni berbentuk macam ni (menunjukkan yang berbentuk memanjang) dengan yang ini berbentuk macam ini (menunjukkan yang berbentuk ‘Z’). Sama tak kedua-duanya?
S: Sama.
P: Kenapa sama, bentuk lain, kan!
S: Bentuk lain, tapi guli dalam satu kumpulan sama.
P: Ada berapa guli dalam satu kumpulan?
S: Lima.
P: Yang ini (menunjukkan 36 pada ayat bahagi) merujuk yang mana pada gambar rajah?
S: Semua guli.
P: Dalam gambar tadi, tiga puluh enam tu yang mana satu?

S: Semua.
P: Nurul ada tak cara lain nak tunjuk bahagi lima?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh bahagi tujuh?
S: (Subjek membulatkan seperti berikut).



P: Ada berapa guli dalam satu kumpulan?
S: Tujuh.
P: Kenapa tujuh?
S: Sebab nak bahagi tujuh.
P: Yang ini (menunjukkan satu guli yang tidak dikumpulkan)?
S: Baki.
P: Macam mana Nurul tau yang tu baki?
S: Sebab yang tu lebih.
P: Boleh tulis ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$36 \div 7 = 5 \text{ baki } 1$$

P: Yang ini (menunjukkan nombor 5 pada ayat bahagi) rujuk pada apa dalam gambar rajah?
S: Lima kumpulan (menunjukkan kesemua kumpulan).
P: Macam mana Nurul dapat lima?
S: Kira.
P: Yang ini (menunjukkan nombor tujuh pada ayat bahagi).
S: Tujuh.
P: Tujuh tu merujuk apa pada gambar rajah?
S: Guli (subjek menunjukkan satu kumpulan).
P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat bahagi $36 \div 5 = 7$ baki 1)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?

S: Yang ni (menunjukkan 5 pada ayat 36 ÷ 5 = 7 baki 1) lima, yang ni (menunjukkan 7 pada ayat 36 ÷ 7 = 5 baki 1) tujuh.
P: Ada cara lain untuk bahagi tujuh?
S: Tak ada.

Dalam Petikan PW751, Nurul menyelesaikan masalah 36 ÷ 4 dengan membulatkan empat guli bagi membentuk sembilan bulatan. Nurul juga berpendapat bahawa pembahagi pada suatu ayat bahagi yang menentukan saiz suatu kumpulan. Bagi ayat bahagi 36 ÷ 3 pula, Nurul membentuk dua belas kumpulan bersaiz tiga.

Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa ayat 36 ÷ 9 = 4 tidak boleh mewakili gambar rajah yang diagihkan kepada empat kumpulan. Menurut beliau, ayat tersebut hanya boleh ditulis bagi gambar rajah yang dibahagi kepada sembilan kumpulan. Selain itu, Nurul berpendapat bahawa ayat bahagi 36 ÷ 4 = 9 tidak sama dengan ayat bahagi 36 ÷ 9 = 4. Subjek juga menjelaskan bahawa ayat bahagi 36 ÷ 9 = 4 dan 36 ÷ 4 = 9 tidak sama kerana kedua-duanya mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Subjek juga menunjukkan bagaimana tiga puluh enam bahagi sembilan, dengan membentuk empat kumpulan bersaiz sembilan. Beliau berpendapat saiz sesuatu kumpulan bergantung kepada pembahagi.

Bagi 36 ÷ 5 pula, subjek membentuk tujuh kumpulan bersaiz lima dan sebiji guli tidak dibulatkan. Subjek menjelaskan bahawa guli yang tidak dibulatkan adalah baki bagi pembahagian

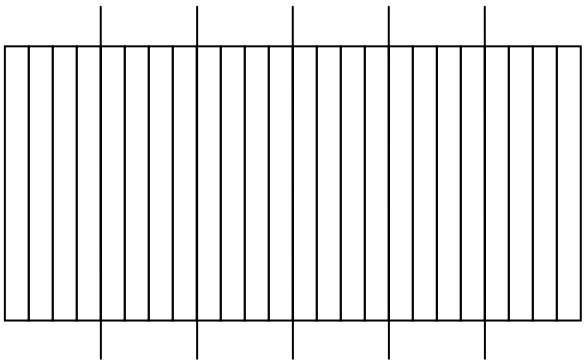
tersebut. Bagi 36 ÷ 7 pula, subjek membentuk lima kumpulan bersaiz tujuh dan sebiji guli tidak dibulatkan. Selain itu subjek juga berpendapat bahawa ayat 36 ÷ 7 = 5 baki 1 tidak sama dengan ayat 36 ÷ 7 = 5 baki 1, kerana kedua-dua ayat tersebut mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbexa.

Bentuk Selanjar

Nurul menyelesaikan masalah membabitkan gambar rajah berbentuk selanjar yang perlu dibahagi empat dengan mengumpul dan menggariskan setiap empat jalur yang telah beliau hitung. Menurut beliau, jawapan bagi masalah 24 ÷ 4 dapat diperolehi dengan menghitung bilangan kumpulan yang dapat dibentuk. Petikan PM752 yang berikut memaparkan tingkah laku yang ditunjukkan oleh Nurul.

Petikan PM752

P: (Menunjukkan kad yang mempunyai dua puluh empat jalur). Cuba lihat kad ini. Apa yang terdapat pada kad ini?
S: Garis.
P: Baik. Sekarang cikgu nak Nurul bahagi empat garis-garis ni?
S: (Subjek menggariskan setiap empat jalur yang terdapat pada gambar rajah tanpa menentukan jumlah petak yang terdapat pada gambar rajah. Berikut adalah pembahagian yang dibuat oleh subjek).

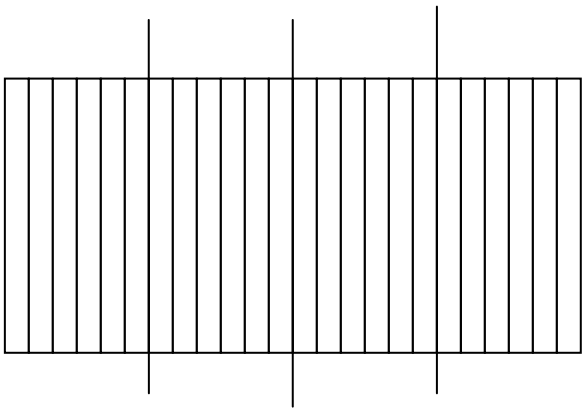


P: Dah siap ke?
S: Dah.
P: Boleh beritahu cikgu apa yang Nurul buat pada garis-garis tadi?
S: Bahagi empat.
P: Bahagi empat, dapat berapa kumpulan?
S: (Subjek mengira kumpulan secara senyap dan menjawab) Enam.
P: Macam mana Nurul dapat enam?
S: Kira semua kumpulan.
P: Baik, satu kumpulan ada berapa garis?
S: Empat.
P: Kenapa Nurul kumpulkan empat garis?
S: Sebab nak bahagi empat.
P: Kalau bahagi tiga, satu kumpulan perlu ada berapa garis?
S: Tiga garis.
P: Kalau bahagi dua?
S: Dua garis
P: Baik, dalam gambar ni ada berapa garis semuanya?
S: (Subjek menghitung bilangan jalur yang terdapat pada gambar rajah dan menjawab) dua puluh empat.
P: Macam mana Nurul tahu dua puluh empat?
S: Kira.
P: Sekarang boleh tak Nurul tuliskan ayat bahagi untuk gambar rajah ini (menunjukkan gambar rajah yang dilukis oleh subjek)?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 4 = 6$$

P: Boleh beritahu cikgu kenapa Nurul tulis ayat seperti ni? Kenapa tak tulis enam di sini (menunjukkan kedudukan angka '4' pada ayat yang ditulis oleh subjek)?
S: Kalau tulis enam di situ (menunjukkan '4') bukannya bahagi empat. Dia bahagi enam.
P: Jadi, tak boleh tulis nombor enam di situ?
S: Tak boleh. Kalau bahagi enam baru boleh.

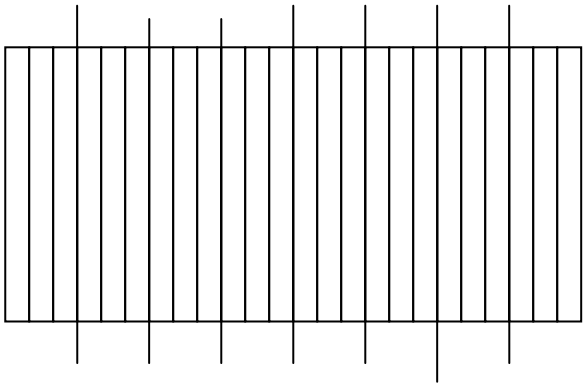
P: Oh, kalau bahagi enam baru tulis enam di situ.
S: (Subjek mengangguk).
P: Nurul ada tak cara lain nak tulis ayat bahagi untuk gambar tadi?
S: Tak ada, satu cara aje.
P: Tak ada?
S: Tak ada.
P: Baik. Yang ini (menunjukkan 24 pada ayat bahagi) sama dengan apa pada gambar rajah?
S: Semua garis.
P: Yang ini (menunjukkan 4 pada ayat bahagi) rujuk pada apa pada gambar rajah?
S: (Subjek menunjukkan kumpulan empat petak yang telah ditandanya). Empat.
P: Yang ini (menunjukkan nombor 6 pada ayat bahagi) rujuk pada apa?
S: Enam (subjek menunjukkan semua kumpulan).
P: Nurul ada cara lain nak tunjuk bahagi empat?
S: Tak ada.
P: Sekarang boleh Nurul bahagi enam gambar rajah tadi?
S: (Subjek menandakan seperti berikut).



P: Dah siap ke?
S: Dah.
P: Boleh beritahu cikgu apa yang Nurul buat?
S: Bahagi enam.
P: Boleh beritahu macam mana bahagi enam?
S: Yang ini enam (subjek menunjukkan satu kumpulan yang dibulatkan).
P: Kenapa kumpulkan enam?
S: Sebab kena bahagi enam.
P: Boleh tulis ayat bahagi untuk gambar rajah tu?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 6 = 4$$

P: Kenapa Nurul tulis macam ini (menunjukkan empat pada ayat 24 ÷ 6 = 4)?
S: Sebab ada empat kumpulan.
P: Nurul ada cara lain nak bahagi enam?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain untuk menulis ayat bahagi?
S: Tak ada.
P: Nurul rasa ayat bahagi ni sama tak dengan ayat tadi (menunjukkan ayat 24 ÷ 4 = 6)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni (menunjukkan enam pada ayat 24 ÷ 6 = 4) enam, yang ni (menunjukkan empat pada ayat 24 ÷ 4 = 6) empat.
P: Lagi?
S: Yang ni (menunjukkan empat pada ayat 24 ÷ 6 = 4) empat, yang ni (menunjukkan enam pada ayat 24 ÷ 4 = 6) enam.
P: Lagi?
S: Tak ada.
P: Macam mana dengan gambar rajah (menunjukkan gambar rajah untuk bahagi empat dan bahagi enam), sama tak?
S: Yang ini (menunjukkan satu kumpulan bagi ayat bahagi 24 ÷ 4 = 6) empat, yang ni (menunjukkan satu kumpulan bagi ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4) enam.
P: Lagi?
S: Yang ini (menunjukkan semua kumpulan bagi ayat bahagi 24 ÷ 4 = 6) enam, yang ni (menunjukkan semua kumpulan bagi ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4) empat.
P: Lagi?
S: Tak ada.
P: Yang sama ada tak?
S: Semua (menunjukkan semua jalur).
P: Sekarang boleh tunjuk bahagi tiga?
S: (Subjek melukis seperti berikut).

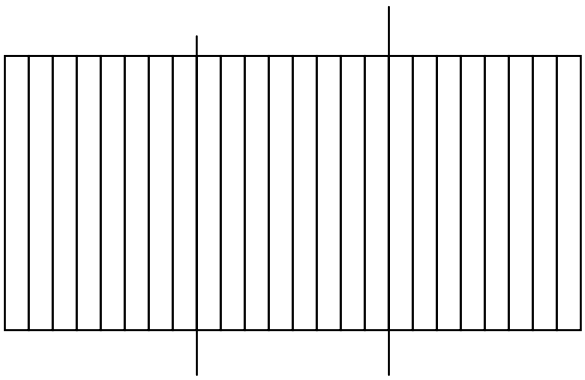


P: Dah siap ke?
S: Dah.

P: Boleh Nurul jelaskan apa yang Nurul buat?
S: Bahagi tiga.
P: Berapa jawapannya?
S: Lapan.
P: Mana tahu lapan?
S: Kira.
P: Boleh tuliskan ayat bahagi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 3 = 8$$

P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi?
S: … Tak ada.
P: Sekarang boleh Nurul bahagi lapan pula?
S: (Subjek menandakan seperti berikut).

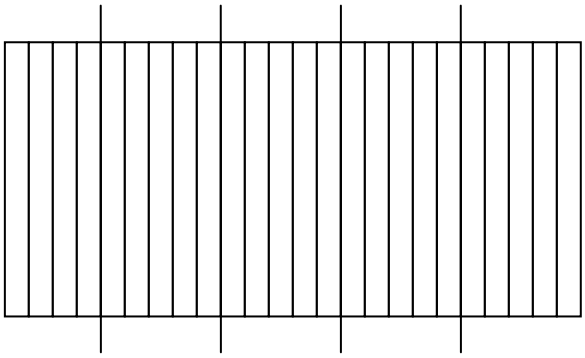


P: Ada berapa kumpulan?
S: Tiga.
P: Gambar rajah ni sama tak dengan yang tadi (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga)?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ni (menunjukkan satu kumpulan bagi bahagi tiga) tiga, yang ini (menunjukkan satu kumpulan bagi bahagi lapan) lapan.
P: Ada lagi?
S: Yang ni (menunjukkan semua kumpulan bagi bahagi tiga) lapan, yang ini (menunjukkan semua kumpulan bagi bahagi lapan) tiga.
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 8 = 3$$

P: Cuba baca.
S: Dua puluh empat bahagi lapan sama dengan tiga.

P: Ayat ni sama tak dengan ayat tadi?
S: Tak sama.
P: Apa yang tak sama?
S: Yang ini (menunjukkan tiga pada ayat bahagi 24 ÷ 3 = 8) tiga, yang ni (menunjukkan lapan pada ayat bahagi 24 ÷ 8 = 3) lapan.
P: Boleh tak kita wakilkan ayat ini (menunjukkan ayat bahagi 24 ÷ 8 = 3) untuk gambar rajah ni (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi tiga)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa, boleh Nurul jelaskan?
S: Sebab ayat ini untuk dua puluh empat bahagi lapan. Gambar tu dua puluh empat bahagi tiga. Tak sama.
P: Ayat ini (menunjukkan ayat 24 ÷ 3 = 8) boleh tak kita gunakan untuk gambar rajah ni (menunjukkan gambar rajah bagi bahagi lapan)?
S: Tak boleh.
P: Kenapa?
S: Sebab ayat ini untuk dua puluh empat bahagi tiga bukan bahagi lapan. Gambar tu dua puluh empat bahagi lapan.
P: Baik, sekarang boleh bahagi lima?
S: (Subjek melukis pada gambar rajah seperti berikut).



P: Dah siap?
S: Dah.
P: Kenapa tak bulatkan yang ini (menunjukkan empat jalur yang tidak dibulatkan).
S: Bukan lima.
P: Kenapa mesti ada lima?
S: Sebab nak bahagi lima.
P: Jadi, macam mana dengan yang ini (menunjukkan empat jalur tersebut)?
S: Lebih … baki.
P: Jawapannya macam mana?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5\,\overline{)\,24} \\ -\,\underline{20} \\ 4 \end{array}$$

P: Apa jawapannya?
S: Empat baki empat.
P: Dalam gambar rajah, mana jawapannya?
S: Empat kumpulan (menunjukkan kumpulan) baki empat (menunjukkan empat jalur yang tidak dibulatkan).
P: Boleh tulis ayat bahagi macam tadi?
S: (Subjek menulis seperti berikut).

$$24 \div 5 = 4 \text{ baki } 4$$

P: Boleh baca?
S: Dua puluh empat bahagi lima sama dengan empat baki satu.
P: Ada cara lain nak tulis ayat bahagi untuk gambar tadi?
S: Tak ada.
P: Ada cara lain nak bahagi lima?
S: Tak ada.
P: Yang ini (menunjukkan 4 selepas simbol '=' bagi ayat bahagi 24 ÷ 5 = 4 baki 4) merujuk apa dalam gambar rajah?
S: Empat kumpulan.
P: Bukan ini ke (menunjukkan empat jalur yang tidak dibulatkan)?
S: Bukan.
P: Yang ini (menunjukkan jalur yang tidak dibulatkan) merujuk apa pada ayat bahagi?
S: Baki empat.

Dalam Petikan PM752, Nurul menyelesaikan masalah 24 ÷ 4 dengan membentuk enam kumpulan bersaiz empat. Menurut Nurul, empat jalur dikumpulkan dalam satu kumpulan kerana pembahaginya adalah empat. Subjek juga berpendapat bahawa jawapan bagi dua puluh empat bahagi empat adalah bilangan kumpulan yang bersaiz empat yang dapat dibentuk. Selain itu, subjek menulis ayat bahagi 24 ÷ 4 = 6 bagi mewakili dua puluh empat bahagi empat.

Bagi dua puluh empat bahagi enam pula, Nurul membentuk empat kumpulan bersaiz enam. Subjek juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 bagi mewakili pembahagian tersebut. Selain itu, subjek juga berpendapat bahawa kedua-dua ayat bahagi yang ditulis untuk bahagi enam dan bahagi empat, iaitu ayat bahagi 24 ÷ 6 = 4 dan 24 ÷ 4 = 6 adalah berbeza. Subjek menjelaskan kedua-dua ayat tersebut berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza.

Selain itu, Nurul menyelesaikan masalah 24 ÷ 3 pula, dengan membentuk lapan kumpulan bersaiz tiga. Subjek juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 3 = 8 bagi mewakili pembahagian tersebut. Selain itu, subjek juga membentuk tiga kumpulan bersaiz lapan bagi menyelesaikan ayat bahagi 24 ÷ 3. Nurul juga menulis ayat 24 ÷ 3 = 8 bagi mewakili pembahagian tersebut. Selain itu, subjek berpendapat bahawa penyelesaian yang beliau tunjukkan bagi ayat bahagi 24 ÷ 3 dan ayat bahagi 24 ÷ 8 adalah berbeza. Menurut Nurul, kedua-dua penyelesaian adalah berbeza kerana mempunyai pembahagi dan hasil bahagi yang berbeza. Bagi perbandingan antara gambar rajah bagi ayat bahagi 24 ÷ 8 dan ayat bahagi 24 ÷ 3, subjek berpendapat bahawa kedua-duanya mempunyai bilangan kumpulan dan saiz kumpulan yang berbeza.

Bagi menyelesaikan masalah 24 ÷ 5 pula, Nurul membentuk empat kumpulan bersaiz empat. Dalam pembahagian tersebut, empat jalur tidak dibulatkan kerana saiznya kurang daripada lima. Selain itu,

subjek juga menulis ayat bahagi 24 ÷ 5 = 4 baki 4 bagi mewakili gambar rajah yang ditanda untuk dua puluh empat bahagi lima.