

## **BAB IV**

### **RUMUSAN UJIAN KEFAHAMAN DAN IMPLIKASI**

#### **Pengenalan**

Bab ini mengandungi analisis ujian kefahaman tentang respon bertulis oleh setiap subjek kajian dalam menyelesaikan masalah yang dikemukakan. Rumusan dibuat berdasarkan data yang diperolehi daripada respon bertulis oleh subjek. Analisis ujian kefahaman terbahagi kepada dua bahagian. Bahagian pertama membabitkan soalan terbuka, pengkaji mengenal pasti kefahaman subjek tentang syarat-syarat pendaraban dua matriks.

Bahagian kedua pula membabitkan soalan tertutup yang dianalisis dalam tiga peringkat. Dalam peringkat pertama , bagi setiap item pengkaji mengenal pasti cara subjek menyelesaikan setiap item yang diberi. Pada peringkat kedua, pengkaji mengkategorikan cara yang digunakan oleh subjek untuk menyelesaikan setiap item berkenaan. Dalam peringkat ketiga, pengkaji menentukan peratus subjek untuk setiap kategori langkah penyelesaian bagi setiap item yang diberi.

Seterusnya, kajian ini juga mengenal pasti sama ada kategori langkah penyelesaian yang ditunjukkan oleh subjek selari dengan langkah penyelesaian oleh orang dewasa atau pun tidak.

Item 1 : Nyatakan syarat-syarat bagi mendarabkan dua matriks.

Cara subjek menghuraikan jawapan mereka bagi item 1 adalah seperti di dalam

Jadual 3.

Jadual 3

Peratus Subjek Mengikut Setiap Huraian Jawapan Bagi Item 1

Bilangan subjek (%)	Huraian Jawapan
9 (30%)	Contohnya : $3 \times 2$ $2 \times 1$
5 (16.67%)	Syarat pendaraban dua matriks ialah mesti mempunyai baris dan lajur.
7 (23.33%)	Mesti ada baris dan lajur.
2 (6.67%)	Baris pertama darab lajur kedua, baris kedua darab lajur pertama.
1 (3.33%)	Mesti mempunyai lajur dan mempunyai jumlah selain daripada 0.
1 (3.33%)	Peringkat sama dan bukan matriks songsang.
1 (3.33%)	Mestilah matriks songsang dan mempunyai kedua-dua belah pihak.
1 (3.33%)	Baris matriks A dan lajur matriks B tidak boleh sama.
3 (10%)	Tiada sebarang jawapan.

Item 2: Diberi  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Cari hasil darab matriks  $AB$ .

Terdapat sebelas kategori kaedah penyelesaian yang digunakan oleh subjek bagi menyelesaikan item ini, manakala dua orang subjek pula tidak menulis sebarang jawapan langsung. Peratus subjek mengikut setiap kategori penyelesaian bagi Item 2 ini adalah seperti di jadual 4.

Jadual 4

Peratus Subjek Mengikut Kategori Kaedah Penyelesaian Bagi Item 2

Kategori	Bilangan Subjek	Peratus (%)
1	4	13.33
2	8	26.67
3	4	13.33
4	1	3.33
5	1	3.33
6	3	10.00
7	1	3.33
8	2	6.67
9	1	3.33
10	2	6.67
11	1	3.33

Huraian kaedah penyelesaian bagi setiap kategori adalah seperti yang berikut:

#### Kategori 1

Kaedah yang digunakan bagi kategori 1 adalah selari dengan kaedah penyelesaian oleh orang dewasa. Kaedah ini menghasilkan matriks yang mempunyai peringkat yang betul tetapi dengan unsur  $(ab)_{23}$  dan unsur  $(ab)_{22}$  yang salah. Bagi kes

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 & 5-8 & -3-2 \\ -1+0 & 5/2+12 & -3/2+3 \\ -6+0 & 15-4 & -9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -1 & 17/2 & 0 \\ -6 & 11 & -10 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 2

Kaedah yang digunakan bagi kategori 2 menghasilkan matriks AB yang mempunyai peringkat  $3 \times 2$ . Hasil darab AB didapati dengan cara berikut:

$(ab)_{11}$  nya didapati dengan  $a_{11} \times b_{11}$ .  $(ab)_{12}$  nya didapati dengan  $a_{12} \times b_{21}$ .  $(ab)_{21}$  nya didapati dengan  $a_{21} \times b_{12}$ .  $(ab)_{22}$  nya didapati dengan  $a_{22} \times b_{22}$ .  $(ab)_{31}$  nya didapati dengan  $a_{31} \times b_{13}$ .  $(ab)_{32}$  nya didapati dengan  $a_{32} \times b_{23}$ . Bagi kes

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5/2 & 12 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 3

Kaedah yang digunakan bagi kategori 3 menghasilkan matriks AB dengan peringkat  $2 \times 2$  melalui cara yang berikut:

(ab)<sub>11</sub> nya didapati dengan menjalankan lajur pertama pada A X baris pertama pada B. (ab)<sub>12</sub> nya didapati dengan menjalankan lajur kedua pada A X baris pertama pada B. (ab)<sub>21</sub> nya didapati dengan menjalankan lajur pertama pada A X baris kedua pada B. (ab)<sub>22</sub> nya didapati dengan menjalankan lajur kedua pada A X baris kedua pada B. Kaedahnya itu ditunjukkan seperti berikut:

$$\begin{pmatrix} (1 \times -2) + (\frac{1}{2} \times 5) + (3 \times -3) & (-2 \times -2) + (3 \times 5) + (-1 \times -3) \\ (1 \times 0) + (\frac{1}{2} \times 4) + (3 \times 1) & (-2 \times 0) + (3 \times 4) + (-1 \times 1) \end{pmatrix}$$

#### Kategori 4

Kaedah hasil darab matriks yang ditunjukkan oleh subjek adalah betul tetapi unsur-unsur tidak ditambahkan. Jawapan mereka ditunjukkan seperti yang berikut:-

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & -8 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 5/2 & 12 & -3/2 & 3 \\ -6 & 0 & 15 & -4 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 5

Kaedah yang digunakan bagi kategori 5 menghasilkan matriks AB yang mempunyai peringkat 3X1.

(ab)<sub>11</sub> didapati dengan mendarabkan baris pertama pada matriks A dengan lajur pertama pada matriks B. (ab)<sub>21</sub> didapati dengan mendarabkan baris kedua pada matriks A dengan lajur kedua pada matriks B. (ab)<sub>31</sub> didapati dengan mendarabkan baris ketiga pada matriks A dengan lajur ketiga pada matriks B.

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 \\ 5/2+12 \\ -9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 29/2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 6

Kaedah yang digunakan bagi kategori 6 menunjukkan bahawa subjek ada ide tentang pendaraban dua matriks tetapi setiap unsur bagi hasil darab matriks AB dibuat secara berasingan seolah-olah terdapat sembilan matriks yang berasingan seperti yang berikut:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/2 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 7

Kaedah yang digunakan bagi kategori 7 menghasilkan matriks AB yang mempunyai peringkat  $2 \times 3$ . Caranya ialah dengan mendarabkan setiap unsur pada baris pertama matriks A dengan setiap unsur pada baris pertama matriks B, dan setiap unsur pada baris kedua matriks A dengan setiap unsur pada baris kedua matriks B seperti yang berikut:

(ab)<sub>11</sub> didapati dengan  $a_{11} \times b_{11}$ . (ab)<sub>12</sub> didapati dengan  $a_{12} \times b_{12}$ . (ab)<sub>13</sub> didapati dengan  $a_{13} \times b_{13}$  dan seterusnya.

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

### Kategori 8

Kaedah yang digunakan bagi kategori 8 menunjukkan bahawa subjek nampaknya cuba mendarabkan setiap unsur pada baris pertama matriks A dengan  $b_{11}$  kemudian setiap unsur pada baris kedua matriks A dengan  $b_{12}$  dan seterusnya setiap unsur pada baris ketiga matriks A dengan  $b_{13}$  tetapi jalan kerja tidak diselesaikan.

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ \frac{5}{2} & 15 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

### Kategori 9

Kaedah yang digunakan bagi kategori 9 menghasilkan matriks AB yang mempunyai peringkat  $3 \times 2$ . Kaedah yang digunakannya ialah  $(ab)_{11}$  didapati dengan  $a_{11} X b_{12} + a_{12} X b_{22}$ .  $(ab)_{12}$  didapati dengan  $a_{12} X b_{12} + a_{11} X b_{22}$ .  $(ab)_{21}$  didapati dengan  $a_{21} X b_{12} + a_{22} X b_{22}$ .

$(ab)_{22}$  didapati dengan  $a_{22} X b_{12} + a_{21} X b_{22}$ .  $(ab)_{31}$  didapati dengan  $a_{31} X b_{11} + a_{32} X b_{12}$ .  $(ab)_{32}$  didapati dengan  $a_{32} X b_{11} + a_{31} X b_{21}$ .

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+8 & -10+4 \\ \frac{5}{2}+12 & 15+2 \\ -6+(-5) & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 29/2 & 17 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$$

### Kategori 10

Kaedah yang digunakan bagi kategori 10 menunjukkan bahawa subjek ada sedikit ide tentang pendaraban dua matriks tetapi peringkat hasil darab matriks AB ditulis sebagai  $2 \times 2$ .

Kaedah yang digunakan ialah seperti yang berikut:

$(ab)_{11}$  didapati dengan mendarabkan baris pertama matriks A dengan lajur pertama matriks B.  $(ab)_{12}$  didapati dengan mendarabkan baris pertama matriks A dengan lajur kedua matriks B.  $(ab)_{21}$  didapati dengan mendarabkan baris kedua matriks A dengan lajur pertama matriks B.  $(ab)_{22}$  didapati dengan mendarabkan baris kedua matriks A dengan lajur kedua matriks B.

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+0 & 5-8 \\ -1+0 & 5/2+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 29/2 \end{pmatrix}$$

### Kategori 11

Kaedah penyelesaian nampaknya serupa dengan kategori 6 tetapi jawapan ditulis dalam bentuk yang berlainan kemudian dijumlahkan.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 21/2 & 12 \\ 15 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 \frac{1}{2} & 3 \\ -9 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 0 & 15 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Item 3 : Berdasarkan jawapan dalam soalan 2, nyatakan unsur bagi:

- i) baris pertama lajur kedua,
- ii) baris kedua lajur pertama.

Terdapat lapan kategori kaedah penyelesaian bagi item ini, manakala dua belas orang subjek tidak menulis sebarang jawapan bagi soalan ini. Peratus subjek bagi setiap kategori penyelesaian adalah seperti di jadual 5.

Jadual 5

Peratus Subjek Mengikut Kategori Kaedah Penyelesaian Bagi Item 3

Kategori	Bilangan Subjek	Peratus (%)
1	8	26.67
2	1	3.33
3	3	10.00
4	2	6.67
5	1	3.33
6	1	3.33
7	1	3.33
8	1	3.33

Huraian kaedah penyelesaian bagi setiap kategori adalah seperti yang berikut:

### Kategori 1

Kaedah yang digunakan bagi kategori 1 menghasilkan jawapan yang betul berdasarkan jawapannya dalam soalan 2.

### Kategori 2

Kaedah yang digunakan bagi kategori 2 menghasilkan jawapan seperti berikut:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 1/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Kategori 3

Kaedah yang digunakan bagi kategori 3 menghasilkan jawapan yang mana unsur bagi baris kedua lajur pertama sebagai baris pertama lajur keduanya, dan baris kedua lajur pertama sebagai baris pertama lajur keduanya.

### Kategori 4

Kaedah yang digunakan bagi kategori 4 menunjukkan bahawa subjek mengambil unsur-unsur bagi lajur sebagai baris dan baris sebagai lajur. Kaedah yang digunakan menghasilkan jawapan seperti yang berikut:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} (0 \ 4 \ 1) \quad (ii) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (-2 \ 5 \ -3)$$

### Kategori 5

Kaedah yang digunakan bagi kategori 5 menghasilkan jawapan seperti berikut:

$$(i) (1, -2) \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (5, -8)$$

$$(ii) (1/2, 3) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1, 0)$$

### Kategori 6

Kaedah yang digunakan bagi kategori 6 menunjukkan bahawa subjek mengambil unsur-unsur bagi (i) yang betul tetapi masing-masing bagi matriks A dan matriks B. Kemudian mengambil unsur-unsur bagi (ii) yang betul tetapi masing-masing bagi matriks A dan matriks B.

### Kategori 7

Kaedah yang digunakan bagi kategori 7 menghasilkan jawapan seperti yang berikut:

- (i) mempunyai nombor negatif yang telah ditukar angkanya.
- (ii) mempunyai angka yang tiada nilai negatif.

### Kategori 8

Kaedah yang digunakan bagi kategori 8 menunjukkan bahawa subjek menyalin jawapan dalam item 2nya.

Item 4 : Diberi  $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  dan  $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Tentukan sama ada pendaraban matriks  $PQ$  boleh dilakukan atau tidak. Jika boleh, cari hasil darab matriks  $PQ$  itu dan jika tidak boleh nyatakan sebabnya.

Terdapat tujuh kategori kaedah penyelesaian bagi item ini dan seramai empat orang subjek tidak menulis sebarang jawapan. Peratus subjek mengikut setiap kategori kaedah peyelesaian adalah seperti di jadual 6.

Jadual 6

Peratus Subjek Mengikut Kategori Kaedah Penyelesaian Bagi Item 4

Kategori	Bilangan Subjek	Peratus (%)
1	8	26.67
2	6	20.00
3	4	13.33
4	3	10.00
5	2	6.67
6	1	3.33
7	2	6.67

Huraian kaedah penyelesaian bagi setiap kategori adalah seperti yang berikut:

### Kategori 1

Kaedah yang digunakan adalah selari dengan kaedah penyelesaian oleh orang dewasa. Bagi kes  $(-2 \ 1 \ 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jawapan subjek adalah seperti yang berikut:  $1X(3 \ 3)X1 = 1X1$ . Boleh.  
 $(-2-3+6) = (1)$ .

### Kategori 2

Kaedah penyelesaian yang digunakan bagi kategori 2 menunjukkan setiap unsur bagi baris pada matriks P didarabkan dengan setiap unsur bagi lajur pada matriks Q dan menghasilkan unsur-unsur dalam satu baris tetapi tidak dijumlahkan iaitu  $(-2 \ -3 \ 6)$ .

### Kategori 3

Kaedah yang digunakan bagi kategori 3 menunjukkan setiap unsur bagi baris pada matriks P didarabkan dengan setiap unsur bagi lajur pada matriks Q dan menghasilkan tiga unsur dalam satu lajur yang tidak dijumlahkan seperti yang berikut:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

## Kategori 4

Kaedah yang digunakan bagi kategori 4 menunjukkan pendaraban telah dijalankan seperti yang berikut:

$$(-2) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ untuk menghasilkan } (pq)_{11} \quad (pq)_{21} \quad (pq)_{31}$$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ untuk menghasilkan } (pq)_{12} \quad (pq)_{22} \quad (pq)_{32}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ untuk menghasilkan } (pq)_{13} \quad (pq)_{23} \quad (pq)_{33}$$

Jawapan subjek ditulis sebagai  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

## Kategori 5

Kaedah yang digunakan bagi kategori 5 menghasilkan jawapan  $(-2 \quad -6 \quad 4)$

$(1 \quad -3 \quad 2) \quad (3 \quad -9 \quad 6)$ . Kaedah ini nampaknya seperti kategori 4 tetapi cuma jawapannya ditulis dalam format yang berbeza.

### Kategori 6

Kaedah yang digunakan bagi kategori 6 menghasilkan jawapan  $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$

iaitu dengan menjalankan pendaraban seperti yang berikut:

(-2)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  untuk menghasilkan  $(pq)_{11}$   $(pq)_{12}$   $(pq)_{13}$ .

(1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  untuk menghasilkan  $(pq)_{21}$   $(pq)_{22}$   $(pq)_{23}$ .

(3)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  untuk menghasilkan  $(pq)_{31}$   $(pq)_{32}$   $(pq)_{33}$ .

### Kategori 7

Subjek menyatakan pendaraban tidak boleh dijalankan. Seorang subjek memberi alasan mempunyai satu baris dan satu lajur, manakala seorang subjek lagi memberi alasan nombor-nombor tidak sama.

Item 5 : Diberi  $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  dan  $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cari hasil darab matriks  $MN$  itu.

Terdapat tujuh kategori kaedah penyelesaian untuk item ini dan enam orang subjek tidak menjawab soalan. Peratus subjek mengikut setiap kategori kaedah penyelesaian adalah seperti di jadual 7.

Jadual 7

Peratus Subjek Mengikut Kategori Kaedah Penyelesaian Bagi Item 5

Kategori	Bilangan Subjek	Peratus(%)
1	5	16.67
2	2	6.67
3	7	23.33
4	1	3.33
5	7	23.33
6	1	3.33
7	1	3.33

Huraian kaedah penyelesaian bagi setiap kategori adalah seperti yang berikut:

Kategori 1

Kaedah yang digunakan bagi kategori 1 adalah selari dengan kaedah penyelesaian oleh orang dewasa.

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{matrix} \right. = \begin{pmatrix} 6+5/3+0 \\ -4+0+0 \\ 8-2/3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/3 \\ -4 \\ 22/3 \end{pmatrix}$$

### Kategori 2

Kaedah yang digunakan bagi kategori 2 menunjukkan subjek menjalankan pendaraban matriks seperti berikut:-

$(3 \ 5 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$  iaitu dengan menjalankan: baris pertama bagi M X lajur bagi N.

$(-2 \ 0 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$  iaitu dengan menjalankan : baris kedua bagi M X lajur N.

$(4 \ -2 \ 1/2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$  iaitu dengan menjalankan : baris ketiga bagi M X lajur N.

Jawapan akhir subjek nampaknya tidak ditulis dalam bentuk matriks peringkat  $3 \times 1$  tetapi  $(23/3) \ (-4) \ (22/3)$ .

### Kategori 3

Kaedah yang digunakan bagi kategori 3 menghasilkan satu matriks yang mempunyai peringkat  $3 \times 3$ . Baris pertama bagi matriks MN didapati dengan cara mendarabkan setiap unsur bagi baris pertama pada M satu demi satu dengan setiap unsur bagi lajur pada N tetapi unsur-unsur yang didapati itu tidak dijumlahkan. Baris kedua bagi matriks MN didapati dengan cara mendarabkan setiap unsur bagi baris

kedua pada M satu demi satu dengan setiap unsur bagi lajur pada matriks N tetapi unsur-unsur yang didapati itu tidak dijumlahkan.

Baris ketiga bagi matriks MN didapati dengan cara mendarabkan setiap unsur bagi baris ketiga pada M satu demi satu dengan setiap unsur bagi lajur pada matriks N tetapi unsur-unsur yang didapati itu tidak dijumlahkan. Jawapan subjek ditulis seperti

yang berikut:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5/3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 8 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 4

Kaedah yang digunakan bagi kategori 4 menghasilkan matriks yang mempunyai peringkat  $3 \times 1$  tetapi salah kerana kaedah yang tidak betul digunakan.  $(mn)_{11}$  didapati dengan mendarabkan setiap unsur pada baris pertama matriks M dengan  $n_{11}$ .  $(mn)_{21}$  didapati dengan mendarabkan setiap unsur pada baris kedua matriks M dengan  $n_{21}$ .  $(mn)_{31}$  didapati dengan mendarabkan setiap unsur pada baris ketiga matriks M dengan  $n_{31}$ .

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+10+2 \\ -2/3+0+2/3 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 5

Kaedah penyelesaian yang digunakan bagi kategori 5 menghasilkan matriks dengan peringkat  $3 \times 3$  iaitu dengan cara berikut:

$(mn)_{11}$  didapati dengan cara  $m_{11} \times n_{11}$ .  $(mn)_{12}$  didapati dengan cara  $m_{12} \times n_{11}$ .  $(mn)_{13}$  didapati dengan cara  $m_{13} \times n_{11}$ .  $(mn)_{21}$  didapati dengan cara  $m_{21} \times n_{21}$ .  $(mn)_{22}$  didapati dengan cara  $m_{22} \times n_{21}$ .  $(mn)_{23}$  didapati dengan cara  $m_{23} \times n_{21}$ .  $(mn)_{31}$  didapati dengan cara  $m_{31} \times n_{31}$ .  $(mn)_{32}$  didapati dengan cara  $m_{32} \times n_{31}$ .  $(mn)_{33}$  didapati dengan cara  $m_{33} \times n_{31}$ .

$$\text{Bagi kes } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 2 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Kategori 6

Kaedah penyelesaian yang digunakan bagi kategori 6 menghasilkan matriks dengan peringkat  $3 \times 3$ . Kaedah yang digunakan ialah  $N \times M$  iaitu dengan cara

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ dan}$$

menjalankan

$(2)$   $(3 \ 5 \ 1)$  sahaja untuk mendapat baris pertama bagi NM dan

unsur-unsur lain diambil daripada matriks M untuk menghasilkan

$$\left( \begin{array}{ccc} 6 & 10 & 2 \\ \boxed{-2 & 0 & 2} \\ 4 & -2 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{daripada matriks M}}$$

## Kategori 7

Kaedah penyelesaian yang digunakan bagi kategori 7 menghasilkan matriks dengan peringkat  $3 \times 3$  yang didapati dengan cara lajur pertama bagi matriks M didarabkan satu demi satu dengan lajur pada N untuk menghasilkan lajur pertama bagi MN tetapi unsur-unsur lain diambil daripada matriks M untuk menghasilkan

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 1 \\ -2/3 & 2 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{daripada matriks M.}}$$

Item 6 : Diberi S ialah matriks yang mempunyai 3 baris dan 4 lajur dan T ialah matriks yang mempunyai 4 baris dan 2 lajur, andaikan U ialah hasil darab matriks ST,

- i) nyatakan peringkat bagi matriks U,  
ii) cuba gambarkan U secara umum dengan menggunakan sepasang tanda kurungan yang disediakan di bawah.

$$U = \left[ \begin{array}{c} \end{array} \right]$$

Terdapat lapan kategori kaedah penyelesaian bagi item ini, manakala seramai sepuluh orang subjek tidak menjawab soalan ini. Peratus subjek mengikut setiap kategori kaedah penyelesaian bagi Item 6 ini adalah seperti di jadual 8.

Jadual 8

## Peratus Subjek Mengikut Kategori Kaedah penyelesaian Bagi Item 6

Kategori	Bilangan Subjek	Peratus (%)
1	3	10.00
2	3	10.00
3	2	6.67
4	1	3.33
5	6	20.00
6	2	6.67
7	1	3.33
8	2	6.67

Huraian kaedah penyelesaian bagi setiap kategori adalah seperti yang berikut:

#### Kategori 1

Kaedah penyelesaian yang digunakan bagi kategori 1 adalah selari dengan kaedah penyelesaian oleh orang dewasa.

i)  $3 \times \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \times 2$

U ialah matriks peringkat  $3 \times 2$

ii) bagi soalan ini dua orang subjek menggunakan nombor untuk

menggambarkan unsur-unsur matriks tersebut, misalnya  $U = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

dan seorang lagi subjek menggunakan huruf abjad untuk menggambarkan unsur-unsur matriks tersebut, misalnya

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

### Kategori 2

Ketiga-tiga subjek nampaknya menggunakan kaedah yang betul untuk mendapatkan peringkat bagi matriks  $U$  iaitu  $3 \times 4 \times 2$  peringkat matriks  $U = 3 \times 2$ . Tetapi apabila menggambarkan  $U$ , dua orang subjek telah menggambarkan dengan  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ , nampaknya subjek ini telah terkeliru antara baris dengan lajur.

Seorang subjek lagi menggambarkan  $U = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  iaitu matriks peringkat  $4 \times 2$ .

### Kategori 3

Dua subjek memberikan peringkat matriks  $U = 3 \times 4$ . Seorang subjek menggambarkan  $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  dan seorang lagi subjek tidak menggambarkan  $U$ .

#### Kategori 4

Subjek telah mendarabkan baris S dengan baris T dan lajur S dengan lajur T untuk menghasilkan peringkat matriks  $U = 12 \times 8$ . Subjek ini telah menggambarkan  $U = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

#### Kategori 5

Enam orang subjek telah memberikan peringkat matrik U sebagai  $4 \times 4$ . Empat orang daripada subjek ini memberikan jawapan sahaja dan dua orang menggunakan cara seperti berikut

$$(S) \quad (T)$$

$$3 \times 4 \quad 4 \times 2$$

$$(4) = 4 \times 4$$

Dua orang daripada subjek ini menggambarkan unsur-unsur bagi matriks U dengan

menggunakan nombor-nombor misalnya  $U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ -5 & 6 & \frac{1}{2} & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Dua orang daripada subjek ini menggambarkan unsur-unsur bagi matriks U dengan

menggunakan \*, misalnya  $U = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$

Seorang daripada subjek ini menggambarkan unsur-unsur bagi matrik U dengan cara berikut

$$U = \begin{pmatrix} a^{10} & a^{20} & a^{30} & a^{40} \\ a^{11} & a^{21} & a^{31} & a^{41} \\ a^{12} & a^{22} & a^{32} & a^{42} \\ a^{13} & a^{23} & a^{33} & a^{43} \end{pmatrix}$$

manakala seorang subjek tidak menggambarkan U.

#### Kategori 6

Seorang subjek memberikan peringkat matrik  $U = 4 \times 3$  dan seorang lagi dengan peringkat matrik  $U = 1 \times 3$ . Kedua-dua orang subjek tidak memberi gambaran matriks U.

#### Kategori 7

Seorang subjek memberikan peringkat matriks  $U = 4$  tanpa memberi penjelasan apa-apa dan tidak memberi gambaran matriks U.

#### Kategori 8

Dua orang subjek menggambarkan matriks S dan T dengan betul tetapi tidak menyatakan peringkat matriks U dan tidak menggambarkan matriks U.

### **Kesimpulan**

Sebagai rumusan, lapan kaedah digunakan oleh tiga puluh orang subjek kajian ini untuk mengenal pasti syarat-syarat bagi pendaraban dua matriks. Cuma sembilan

orang subjek sahaja dapat mengenal pasti syarat-syarat bagi pendaraban dua matriks iaitu dengan menggunakan contoh peringkat matriks  $3 \times 2$    $\times 1$ . Bagi menyelesaikan masalah pendaraban dua matriks, terdapat lebih daripada tujuh kaedah atau strategi yang digunakan oleh subjek kajian.

Dalam operasi pendaraban dua matriks, untuk item 2 seramai empat orang (13.33%) subjek kajian sahaja menggunakan kaedah yang selari dengan kaedah penyelesaian oleh orang dewasa, manakala untuk item 4 pula seramai lapan orang subjek (26.67%), dan bagi item 5 seramai lima orang (16.67%).

Cara atau strategi bagi menyelesaikan setiap masalah pendaraban dua matriks di mana matriks-matriks yang diberi itu berbeza peringkatnya masing-masing (lihat item 2, 4 dan 5) yang digunakan oleh lapan belas orang (60%) subjek adalah tidak konsisten.

Bagi soalan mengenal pasti unsur-unsur dalam suatu matriks (lihat item 3), cuma lapan orang (26.67%) subjek kajian ini yang dapat mengenal pasti unsur-unsur yang dikehendaki dan selebihnya terkeliru disebabkan kesilapan mereka mengambil kira unsur bagi baris sebagai lajur dan unsur bagi lajur sebagai baris.

Bagi soalan menggambarkan matriks yang terhasil daripada hasil darab dua matriks didapati terdapat lapan cara atau kaedah digunakan oleh subjek itu untuk menggambarkannya. Manakala tiga orang (10%) subjek sahaja dapat menggambarkan matriks yang terhasil daripada hasil darab dua matriks..

### **Dapatan Lain**

1. Pengkaji melihat kekonsistenan terhadap kaedah yang digunakan oleh subjek untuk menjawab item 2, 4, 5 kerana ketiga-tiga item ini menguji kebolehan subjek menjalankan pendaraban dua matriks dan strategi yang digunakan oleh mereka untuk menyelesaikan pendaraban dua matriks.  
Nampaknya cuma 12 orang (40%) subjek sahaja yang konsisten dalam menyelesaikan setiap masalah mengenai pendaraban dua matriks. Selebihnya iaitu 18 orang (60%) subjek pula adalah tidak konsisten dalam menyelesaikan setiap masalah mengenai pendaraban dua matriks..
2. Kebanyakan subjek yang tidak boleh menyelesaikan masalah tentang pendaraban dua matriks adalah disebabkan terkeliru diantara baris dengan lajur bagi sesuatu matriks yang diberi. Subjek tersebut nampaknya mengambil kira baris sebagai lajur dan lajur sebagai baris.
3. Kebanyakan subjek yang tidak boleh menyelesaikan masalah tentang pendaraban dua matriks juga adalah disebabkan oleh kesilapan mereka menentukan peringkat bahagian hasil darab matriks yang terhasil.

## **Implikasi Kajian**

Beberapa implikasi boleh dibuat berdasarkan dapatan kajian ini. Bahagian ini dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu implikasi kepada pengajaran dan implikasi bagi kajian lanjut.

### **Implikasi Kepada Pengajaran**

Dalam bahagian ini, akan dibincangkan implikasi dapatan kajian kepada pengajaran. Dapatan kajian ini mempunyai beberapa implikasi kepada pengajaran matematik di sekolah. Dapatan kajian dari segi kaedah atau strategi yang digunakan oleh subjek dalam menyelesaikan masalah pendaraban dua matriks adalah terhad dan lebih tertumpu kepada format soalan yang dikemukakan. Lebih ramai pelajar boleh menyelesaikan masalah yang melibatkan pendaraban dua matriks sekiranya peringkat matriks yang diberi adalah lebih kecil (seperti Item 4). Apabila peringkat matriks yang diberi itu lebih kompleks (seperti Item 2 dan Item 5), didapati kurang pelajar yang boleh menyelesaikannya.

Sehubungan dengan itu, guru mesti menekankan juga kaedah yang harus diikuti dalam menjalankan pendaraban dua matriks bagi semua bentuk matriks dengan menggunakan pelbagai contoh matriks yang mempunyai peringkat yang berbeza-beza.

Guru seharusnya dapat mendedahkan pelajar kepada aktiviti yang membabitkan konsep dan operasi dalam mengenal pasti unsur-unsur bagi baris dan unsur-unsur bagi lajur bagi sesuatu matriks, syarat-syarat pendaraban dua matriks,

dan peringkat bagi matriks yang terhasil daripada hasil darab dua matriks yang tertentu.

Dalam aktiviti menggambarkan matriks yang terhasil daripada hasil darab dua matriks, guru harus menekankan kepada bentuk sesuatu matriks dengan cara mengenal pasti unsur-unsur bagi baris dan juga lajur bagi sesuatu matriks yang akan terhasil itu. Aktiviti seperti ini harus melibatkan bentuk-bentuk matriks yang pelbagai.

Penyediaan bantu mengajar yang sesuai dan perancangan pengajaran yang rapi dapat digunakan untuk membantu kefahaman pelajar tentang pendaraban dua matriks. Pengajaran topik matriks harus dilakukan secara berperingkat-peringkat iaitu bermula dari peringkat konkret dan semakin meningkat kesukarannya sehingga kepada peringkat yang lebih abstrak. Bagi peringkat konkret, bahan bantu mengajar yang sesuai harus digunakan supaya pelajar dapat membentuk kefahaman terhadap konsep matriks terlebih dahulu.

Guru juga disaran supaya semasa pengajarannya menjalankan penilaian yang berterusan untuk mengenal pasti tahap kefahaman pelajar. Teknik penilaian mesti menguji tahap kefahaman yang dipunyai oleh pelajar dan tidak sekadar menguji kemahiran pelajar dalam pendaraban dua matriks sahaja, dan penilaian yang dilakukan mesti berterusan. Penilaian yang dijalankan mestilah dapat menimbulkan masalah kepada pelajar pada peringkat pengkonsepan yang tertentu.

Teknik penyoalan yang diamalkan oleh guru semasa proses penilaian juga penting kerana secara tidak langsung, guru akan dapat membimbing pelajar yang bermasalah untuk menyelesaikan masalah yang dikemukakan. Pelajar digalakkan

untuk menggunakan kefahaman yang ada untuk meyelesaikan masalah tentang pendaraban dua matriks lantas dapat menilai tahap kefahaman pelajar dalam matriks secara keseluruhan, iaitu konsep dan kemahiran.

Tindakan susulan oleh guru dalam bentuk pemulihan dan diagnostik akan dapat dijalankan untuk mempertingkatkan lagi kefahaman pelajar. Kesemua langkah yang telah dicadangkan di atas diharap akan dapat menolong guru untuk mengenal pasti kefahaman dan memantapkan kefahaman pelajar tentang pendaraban dua matriks.

#### Implikasi Untuk Kajian Lanjut

Fokus utama kajian adalah untuk mengenal pasti kefahaman pelajar Tingkatan Empat tentang pendaraban dua matriks. Dalam kajian ini, beberapa aspek telah dikenal pasti, iaitu apakah yang dimaksudkan oleh subjek kajian ini tentang syarat-syarat bagi pendaraban dua matriks, cara atau kaedah yang digunakan oleh mereka dalam menyelesaikan masalah pendaraban dua matriks, dan kebolehan mereka untuk menggambarkan matriks yang terhasil daripada hasil darab dua matriks.

Kajian yang lebih lanjut adalah untuk mengkaji ‘Apakah skim yang dipunyai oleh pelajar Tingkatan Empat tentang Matriks?’ subjek bagi kajian ini adalah terdiri daripada pelajar Tingkatan Empat. Pemilihan subjek kajian dari Tingkatan Lima mungkin dapat memberikan dapatan yang berbeza. Di samping itu juga, metodologi kajian dengan menggunakan teknik temuduga klinikal dapat digunakan berbanding dengan hanya menggunakan ujian kefahaman untuk kajian ini. Pemberian makna

yang lebih luas mungkin diperoleh dengan menggunakan metodologi yang lebih pelbagai.