

BAB LIMA

RUMUSAN DAN PERBINCANGAN

Pengenalan

Kajian ini mempunyai dua tujuan utama, pertama untuk mengenal pasti corak pemikiran peserta kajian tentang pecahan wajar, pecahan tak wajar, dan makna bahagi berasaskan bahasa dan tingkah laku lisan dan bukan lisan mereka semasa temu duga klinikal dijalankan. Kedua, untuk mengenal pasti pemahaman pembahagian pecahan yang merujuk corak pemikiran murid Tingkatan Satu secara umum dengan membina cara atau kaedah khusus bagi menyelesaikan masalah bahagi yang membabitkan nombor bulat, pecahan, atau gabungan kedua-duanya menggunakan pengetahuan pecahan wajar, pecahan tak wajar, dan makna operasi bahagi.

Enam jenis tugas yang membabitkan bahan berbentuk selang dan diskret tunggal dan komposit digunakan dalam temu duga klinikal. Analisis dan interpretasi tingkah laku murid dilakukan daripada rakaman video pada setiap temu duga. Setiap rakaman video dianalisis selepas temu duga selesai dijalankan.

Selepas dua temu duga berlangsung, salah seorang daripada murid menarik diri kerana masalah keluarga. Beliau dikeluarkan daripada analisis dalam kajian ini. Baki lima orang yang berjaya melengkapkan sesi temu duga dianalisis konsepsi dan bentuk pemikiran mereka seperti yang ditunjukkan dalam Bab Empat.

Bab Lima merumuskan corak pemikiran murid dengan mensintesis bentuk pemikiran merentasi kelima-lima kes kajian. Rumusan corak pemikiran peserta kajian membekalkan asas untuk analisis konseptual dan seterusnya membincangkan cara atau kaedah khusus yang dimiliki oleh peserta kajian bagi menyelesaikan masalah membabitkan aplikasi pengetahuan pecahan wajar, pecahan tak wajar, dan makna operasi bahagi.

Rumusan Dapatan Kajian

Bahagian ini merumuskan corak pemikiran peserta kajian tentang konsep pecahan, makna bahagi, dan penyelesaian masalah yang membabitkan pembahagian pecahan.

Perwakilan

Peserta kajian mewakili pecahan wajar dan tak wajar dengan menggunakan tujuh jenis perwakilan, iaitu makanan, alat mainan, alat elektrik, manusia, alat bilik darjah, bekas, dan bentuk umum. Perwakilan digambarkan dalam empat bentuk 2D seperti bulatan, segi empat, bentuk objek, dan astrik seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 31.

Jadual 31

Perwakilan Pecahan Wajar dan Pecahan Tak Wajar

	Iqwan	Ida	Rina	Amin	Izan
Selanjar	<i>Makanan</i> Kek & Piza (bulatan)	<i>Makanan</i> Kek (bulatan) <i>Alat sekolah</i> Buku (segi empat) <i>Manusia</i> Kumpulan murid (bulatan) <i>Alat mainan</i> Bola (bulatan)	<i>Makanan</i> Kek (bulatan) Piza (segi empat) <i>Alat elektrik</i> Lampu (segi empat)	<i>Makanan</i> Kek & piza (bulatan)	<i>Geometri</i> Bentuk umum (bulatan) <i>Bekas</i> Kotak (segi empat)
Diskret	<i>Makanan</i> Ais krim (astrik) <i>Alat mainan</i> Bola (bulatan) <i>Alat elektrik</i> Kipas (Lisan)	<i>Makanan</i> Sos cili (botol) <i>Alat mainan</i> Bola (bulatan) <i>Manusia</i> Kumpulan murid (orang)	<i>Manusia</i> Pasukan hoki (bulatan) <i>Alat bilik darjah</i> Meja (segi empat) Pintu (segi empat)	<i>Alat elektrik</i> Kipas (bentuk kipas)	Tiada

Jadual 31 menunjukkan empat daripada lima orang murid menggunakan makanan bagi menggambarkan pecahan wajar dan pecahan tak wajar. Selain itu, tiga daripada lima orang peserta kajian menggunakan alat elektrik bagi menggambarkan pecahan wajar. Bentuk paling dominan yang dimiliki oleh peserta kajian untuk menggambarkan pecahan ialah bulatan berbentuk selanjat, manakala bentuk kedua dominan pula ialah segi empat. Berbeza dengan dapatan kajian yang diperolehi Nik Azis (1987), beliau

mendapati bentuk paling dominan mengikut urutan yang dimiliki oleh peserta kajiannya untuk menggambarkan pecahan ialah segi empat, segi tiga, dan bulatan. Perbezaan ini mungkin disebabkan oleh kurikulum matematik KBSM, khususnya dalam topik pecahan memberi penekanan pada bentuk geometri yang berbeza berbanding kurikulum matematik di luar negara.

Konsep Pecahan Wajar

Lima corak pemikiran tentang pecahan wajar dikenal pasti dalam kajian kes, iaitu pemetakan tunggal, pengumpulan tunggal, pemisahan tunggal, pemecahan rajah selanjar dan meringkaskan pecahan. Jadual 32 merumuskan corak pemikiran peserta kajian tersebut.

Jadual 32

Corak Pemikiran Peserta Kajian tentang Pecahan Wajar

Konsepsi	Sub Konsepsi	Peserta Kajian
Pemetakan Tunggal	Penolakan pecahan dan meringkas hasilnya	Iqwan
	Pemetakan BS secara berpasangan	Iqwan, Ida, Rina, Amin, Izan
	Pemetakan BS secara bertiga	Iqwan, Ida, Rina
	Meringkaskan pecahan	Rina, Amin
Pengumpulan tunggal	Penolakan pecahan dan meringkas hasil pecahan	Iqwan
	Pengumpulan BD secara berpasangan	Iqwan, Ida, Rina, Amin, Izan
	Pengumpulan BD secara bertiga	Ida, Rina
	Pemetakan tunggal BD	Ida
Pemisahan tunggal	Meringkaskan pecahan	Ida
	Melorek petak dalam gandaan dua menyebut pecahan	Iqwan, Ida, Rina, Amin, Izan
	Melorek petak dalam gandaan tiga menyebut pecahan	Amin
Pemecahan rajah selanjar	Melorek objek dalam gandaan dua bagi menyebut pecahan	Ida, Rina, Amin, Izan
	Melorek objek dalam gandaan tiga bagi menyebut pecahan	
Meringkaskan pecahan	-	Ida
	-	Izan

BS: Bahan selanjar BD: Bahan diskret

Pemetakan tunggal. Bagi kes bahan berbentuk selanjar, Iqwan, Ida, Rina, Amin, dan Izan menggunakan idea pemetakan tunggal bagi menjelaskan konsep pecahan wajar.

Bagi bahan selangar kosong, mereka memetakkan satu bulatan kepada tiga bahagian bagi mewakili $\frac{1}{3}$ seperti ditunjukkan dalam Petikan 1.

Petikan 1: Sedutan Petikan 1GP2

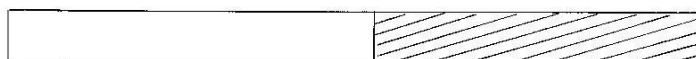
- P:** Kalau saya sebut “satu pertiga”, apakah yang dapat anda gambarkan?
M: Sebuah kek, dibelah kepada tiga. Apabila saya makan satu, cikgu makan satu, tinggal “satu pertiga” lagi (murid melukis sebuah bulatan dan melorek dua bahagian).



Dalam Petikan 2 pula, Ida juga menunjukkan corak pemikiran yang sama apabila mewakili satu perdua dengan memetakkan jalur kertas kosong kepada dua bahagian sama besar saiznya.

Petikan 2: Sedutan Petikan 2WPW1(1)

- P:** Sekiranya seorang kawan minta pertolongan anda untuk menjelaskan “satu perdua” dengan menggunakan bahan ini, bagaimanakah anda melakukannya?
M: Macam suatu benda yang ada dua bahagian (murid melukis satu garisan pada jalur kertas).



Bagi bilangan petak komposit seperti dalam Petikan 3, Rina mewakili satu pertiga dengan melorek dua daripada enam petak. Ini bermaksud beliau membentuk tiga petak tunggal secara menggabungkan pasangan petak bersebelahan.

Petikan 3: Sedutan Petikan 3WPW1(3)

- P:** Bagaimanakah anda menjelaskan dua pertiga kepada kawan anda?
M: Kita kena lorekkan empat petak (murid melorek dua petak).



Corak pemikiran yang sama juga ditunjukkan oleh Amin dan Izan dalam menjelaskan konsep pecahan. Corak pemikiran ini menunjukkan bahawa semua peserta kajian melakukan pemetakan bahan selangar sama ada secara berpasangan atau bertiga supaya bilangan petak dibentuk adalah sama nilai dengan penyebut pecahan berkenaan.

Selain itu, Iqwan pula memiliki corak pemikiran penolakan pecahan dan meringkas hasilnya semasa menjelaskan konsep pecahan wajar dengan bahan selangar komposit. Beliau menolak satu keseluruhan dengan suatu pecahan bagi menghasilkan

pecahan lain. Iqwan menganggap satu objek lengkap sebagai satu keseluruhan, yang mana ditolakkan bahagian tertentu yang dilorek menghasilkan bahagian yang tidak dilorek seperti yang ditunjukkan dalam Petikan 1. Berbeza pula dengan Rina dan Amin, mereka membahagikan bilangan bahagian yang dilorek dengan jumlah bilangan bahagian dan meringkasnya bagi memastikan bilangan bahagian yang dilorek adalah seperti yang dikira secara aritmetik.

Pengumpulan tunggal. Bagi kes bahan berbentuk diskret, Iqwan, Ida, Rina, Amin, dan Izan mengaplikasikan idea pengumpulan tunggal bagi menjelaskan konsep pecahan wajar. Dalam Petikan 4, Amin mewakili satu pertiga dengan menganggap tiga cip kertas sebagai tiga unit bahan sama bentuk dan saiz yang berasingan.

Petikan 4: Sedutan Petikan 4WPW1(4)

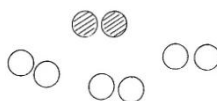
- P:** (Enam cip kertas diberikan kepada murid) Jika kawan itu minta pertolongan anda untuk jelaskan satu pertiga dengan bahan ini, bagaimanakah anda melakukannya?
M: Semua ada tiga, ambil satu jadi satu pertiga.



Bagi kes membabitkan bahan diskret komposit seperti dalam Petikan 5 pula, Rina mengumpulkan setiap dua cip kertas bersama dan menganggapnya sebagai satu kumpulan yang berasingan. Lapan cip kertas dianggapkan oleh Rina sebagai empat kumpulan pasangan cip kertas. Satu daripada empat kumpulan cip kertas dianggapkan sebagai $\frac{1}{4}$.

Petikan 5: Sedutan Petikan 3WPW2(2)

- P:** Cuba jelaskan $\frac{1}{4}$ dengan menggunakan bahan yang dibekalkan.
M: Kita perlu susun lapan cip kertas ini secara berpasangan. Pilih dua biji, untuk jadikan satu perempat.



Dalam Petikan 4 dan Petikan 5, peserta kajian menjelaskan konsep pecahan wajar dengan menggunakan bahan diskret secara membina bilangan kumpulan berdasarkan nilai penyebut pecahan berkenaan. Sekiranya bilangan bahan diskret sama dengan nilai

penyebut pecahan, mereka menganggap setiap unit bahan itu adalah kumpulan berasingan. Jika bilangan bahan diskret ialah dua kali ganda daripada nilai penyebut pecahan, mereka menggabungkan dua unit bahan bersama bagi membentuk bilangan kumpulan yang sama dengan nilai penyebut pecahan wajar yang diwakili. Begitulah halnya dengan bahan yang bilangannya ialah tiga kali ganda penyebut pecahan. Mereka menggabungkan tiga unit bahan bersama bagi memastikan bilangan kumpulan bahan yang dibentuk bersamaan dengan nilai penyebut pecahan wajar berkenaan.

Pemisahan tunggal. Setelah objek berbentuk selanjar dipetakkan atau objek berbentuk diskret dikumpulkan bagi membentuk bilangan yang sama dengan penyebut pecahan, peserta kajian melakukan pemisahan tunggal bagi menjelaskan konsep pecahan wajar. Dalam Petikan 1 misalnya, Iqwan memisahkan satu daripada dua bahagian bulatan dengan melorekannya sebagai $1/2$. Bagi kes bilangan petak komposit seperti dalam Petikan 3 pula, Rina memisahkan dua daripada lapan petak dengan melorekannya sebagai $1/4$. Beliau menyemak bilangan yang dipisahkan dengan meringkaskan $2/8$ menghasilkan $1/4$.

Pemecahan rajah selanjar. Hanya satu daripada lima orang peserta kajian didapati mentafsir pecahan daripada rajah berbentuk selanjar dengan membahagikan bilangan petak berwarna tanpa mengambil kira keseragaman saiznya.

Petikan 6: Sedutan Petikan 2TRP1

M	K
	H
	H
	B B B

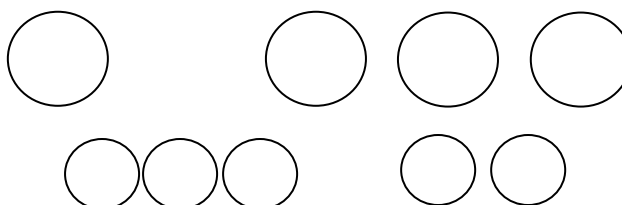
P: Cuba Ida nyatakan apakah nilai pecahan bagi kawasan merah daripada seluruh rajah itu.
M: (Diam seketika). Satu pertujuh.

Dalam Petikan 6, Ida menyatakan bahawa pecahan bagi petak berwarna merah daripada seluruh rajah berkenaan ialah $1/7$. Ini menunjukkan beliau tahu bahawa pecahan ialah pembahagian di antara bilangan petak berwarna merah dengan bilangan

seluruh petak dalam seluruh rajah tersebut. Dalam hal ini, kesamaan saiz di antara petak tidak diambil kira semasa mentafsirkan nilai pecahan. Ini mungkin kerana petak tersebut berada dalam satu segi empat tertutup yang sama dan sebahagian daripada sisi segi empat bersentuhan dengan segi empat lain menyebabkan beliau tidak memberikan perhatian pada saiz segi empat berkenaan.

Petikan 7: Sedutan Petikan 2BP1

- P:** (Berikan Kad 1 dan Kad 2 kepada murid) Jika seorang kawan minta bantuan anda untuk membandingkan saiz piza yang yang tercatat pada Kad 1 ($\frac{3}{4}$) dan Kad 2 ($\frac{4}{5}$). Cuba guna cara yang anda anggap paling sesuai untuk menjelaskan perbandingan itu.
- M:** Ini tiga perempat (murid mengambil empat cip kertas sama saiz).



Dalam Petikan 7, Ida menggunakan idea yang sama semasa beliau mentafsir masalah membabitkan rajah selanjar, yang mana beliau membandingkan pecahan $\frac{3}{4}$ dan $\frac{3}{5}$ dengan memecahkan objek diskret tanpa mengambil kira persamaan saiz bulatan. Dalam penjelasannya, Ida menganggap saiz bulatan berbeza boleh dibuat perbandingan dengan alasan bilangan bulatan kecil yang banyak bilangannya memberikan jumlah saiz yang besar berbanding bilangan bulatan lebih besar yang sedikit bilangannya.

Petikan 6 dan 7 menunjukkan pemikiran Ida mungkin dibina daripada lanjutan konsepsi nombor bulat yang diinferenskan dalam konteks objek selanjar dan diskret tersebut. Dapatan kajian ini selari dengan pandangan Mark (2002) yang menyatakan bahawa peserta kajiannya tahu memetakan bahan selanjar, tetapi mereka menjelaskan konsep pecahan dengan membilang petak bukannya dari aspek hubungan bahagian-keseluruhan. Nik Azis (1987) menamakan fenomena ini sebagai pemecahan (*fragmentation*), yang mana murid membilang petak yang mewakili pecahan tanpa mengambil kira keseragaman saiznya.

Konsep Pecahan Tak Wajar

Tiga corak pemikiran tentang pecahan tak wajar dikenal pasti dalam kajian kes, iaitu nombor bercampur, penyebut pecahan wajar sebagai rujukan, dan satu keseluruhan. Hanya Ida seorang menggunakan corak pemikiran “penyebut pecahan tak wajar sebagai rujukan” bagi menjelaskan konsep pecahan tak wajar. Iqwan dan Rina pula menggunakan corak pemikiran “nombor bercampur” dalam menjelaskan konsep pecahan tak wajar. Manakala Amin dan Izan menggunakan corak pemikiran “nombor bercampur dan satu keseluruhan” dalam menjelaskan konsep pecahan tak wajar. Jadual 33 merumuskan corak pemikiran peserta kajian berkenaan.

Jadual 33

Corak Pemikiran Subjek Kajian Tentang Pecahan Tak Wajar

Konsepsi	Sub Konsepsi	Peserta Kajian	Sub-sub Konsepsi	Peserta Kajian
Nombor bercampur	Pemetakan tunggal BS	Iqwan, Rina, Izan, Amin	Menyusun BD secara langsung	Rina
	Pemisahan tunggal BS Menyusun BD secara langsung	Iqwan		
Penyebut pecahan tak wajar sebagai rujukan	Iterasi bahagian BS	Ida		
	Pemetakan tunggal BS	Ida		
	Pemisahan tunggal BS	Ida		
Satu keseluruhan	Pemetakan tunggal BS	Amin		
	Pengumpulan tunggal BD	Amin, Izan		
	Pemisahan tunggal BS dan BD	Amin, Izan		

BS: Bahan selanjat

BD: Bahan diskret

Dalam Petikan 8, Izan memetakan tiga segi empat kepada tiga bahagian sama besar saiznya dan melorek tiga bahagian masing-masing pada segi empat pertama dan kedua, serta satu bahagian pada segi empat ketiga bagi mewakili $7/3$.

Petikan 8: Sedutan Petikan 5GP3

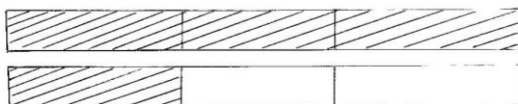
M: Kita kena lorekkan tujuh bahagian sebab tiga, enam, jadi satu bahagian lagi menjadi tujuh (murid melorek tujuh petak).



Dalam Petikan 8 pula, Amin memetakkan dua jalur kertas kepada tiga bahagian masing-masing dan melorek tiga bahagian pada jalur kertas pertama dan satu daripada tiga bahagian pada jalur kertas kedua bagi mewakili $\frac{4}{3}$.

Petikan 9: Sedutan Petikan 4WTW1

M: Kita lorek tiga bahagian, dan satu lagi (murid membahagikan dua jalur kertas kepada tiga bahagian sama besar).



Corak pemikiran Izan dan Amin menunjukkan bahawa mereka menukar pecahan tak wajar kepada nombor bercampur sebelum mewakilnya dengan menggunakan bahan selangar dan diskret. Seluruh bahan yang dilorek bermaksud satu keseluruhan yang diwakili, manakala bahagian yang dilorek pula bermaksud bahagian daripada keseluruhan suatu pecahan wajar yang diwakili. Gabungan kedua-duanya dianggap sebagai nombor bercampur yang bersamaan dengan pecahan tak wajar yang diwakili. Dapatan kajian ini adalah selaras dengan pandangan Hackenberg (2007) bahawa ramai murid mewakilkan pecahan tak wajar dengan merujuk nombor bercampur, bukannya hubungan bahagian-keseluruhan.

Berlainan pula bagi Amin, beliau menghadapi kesukaran untuk menjelaskan pecahan $\frac{4}{3}$ dengan menggunakan satu jalur kertas pada awal protokol seperti yang ditunjukkan dalam Petikan 10.

Petikan 10: Sedutan Petikan 2WTW1

P: (Kad 1 dan beberapa jalur kertas diberikan kepada murid). Cuba sebut nombor yang tercatat pada Kad 1. Jika seorang kawan minta pertolongan anda untuk menjelaskan pecahan yang tercatat pada Kad 1 dengan menggunakan jalur kertas berikut, bagaimanakah anda melakukannya?

M: (Diam seketika). Kena ada sembilan petak (murid melukis sembilan petak pada satu jalur kertas).



Dalam Petikan 10, Amin menghadapi kesukaran untuk menjelaskan pecahan $\frac{4}{3}$ kerana beliau membina sembilan petak pada jalur kertas. Empat daripada sembilan petak yang dilorek menyukarkan beliau untuk menjelaskan $\frac{4}{3}$. Walau bagaimanapun, beliau mengubah pemikirannya dengan menggunakan satu keseluruhan sebagai rujukan untuk menjelaskan konsep pecahan.

Pengulangan. Ida mewakili pecahan $\frac{4}{3}$ sehingga $\frac{3}{3}$ dengan menggunakan bahan berbentuk selang berasaskan nombor bercampur. Bagi kes yang membabitkan bahan berbentuk diskret, Ida berjaya menjelaskan $\frac{4}{3}$ sehingga $\frac{3}{3}$, namun mereka tidak berjaya meneruskan penjelasan tentang $\frac{4}{3}$ dan $\frac{7}{3}$. Ini mungkin kerana nombor bulat dan pecahan wajar pada nombor bercampur memberi kesukaran pada Ida menyusun cip kertas bagi menjelaskan konsep pecahan tak wajar berkenaan.

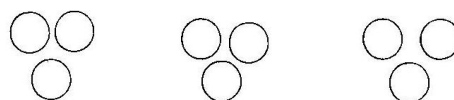
Berlainan pula dengan Amin dan Izan, mereka menghadapi kesukaran untuk menjelaskan pecahan $\frac{4}{3}$ dan $\frac{7}{3}$ pada permulaan protokol temu duga, namun begitu, kemudiannya mereka dapat menjelaskan $\frac{4}{3}$ dan $\frac{7}{3}$ setelah membuat pengulangan tiga cip kertas beberapa kali. Dalam Petikan 9, Amin membentuk tiga cip kertas sebanyak dua kali dan menganggap empat daripadanya sebagai $\frac{4}{3}$. Bagi pecahan $\frac{7}{3}$ pula, mereka membentuk tiga cip kertas sebanyak tiga kali dan menganggap tujuh daripadanya sebagai $\frac{7}{3}$.

Bagi Izan pula, beliau juga membentuk tiga cip kertas sebanyak dua kali. Kemudiannya, beliau melorek empat daripadanya sebagai pecahan $\frac{4}{3}$. Corak pemikiran Amin dan Izan ini menunjukkan mereka menyedari $\frac{4}{3}$ membabitkan empat cip kertas yang membabitkan dua unit satu keseluruhan yang terdiri daripada tiga cip kertas masing-masing.

Petikan 11: Sedutan Petikan 4WTW2

P: (Berikan Kad 2 dan beberapa cip kertas kepada murid) Bagaimanakah pula jika anda nak menjelaskan pecahan yang tercatat pada Kad 2 dengan menggunakan cip kertas berikut?

M: Satu, dua, tiga (diam seketika) perlu ambil tiga, kumpulan ini juga kena ambil semua, tapi kumpulan akhir ambil satu sahaja untuk dapatkan tujuh cip kertas (murid menyusun sembilan cip kertas dalam tiga kumpulan).



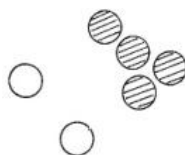
Petikan 12: Petikan 5WTW2

P: Cuba ceritakan apakah yang anda sedang fikirkan?

M: Tak cukup (diam seketika) kena ambil sebiji lagi (murid melorek satu cip kertas).

P: Mengapakah begitu?

M: Sebab tiga pertiga tak cukup satu pertiga lagi. Nak jadi empat pertiga, kena tambah satu lagi.



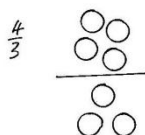
Dalam Petikan 11, Amin mengulangi bilangan bahan diskret yang dibina sebanyak tiga kali. Bilangan bahan yang dibina adalah berdasarkan nilai penyebut pecahan tak wajar berkenaan. Langkah yang sama diulangi beberapa kali sehinggalah beliau mendapati bilangan bahan yang mencukupi diperlukan untuk mewakili pengangka pecahan tak wajar berkenaan. Izan juga menunjukkan corak pemikiran yang sama dengan Amin.

Dalam Petikan 12 misalnya, beliau mewakili $\frac{4}{3}$ dengan membentuk sekumpulan tiga cip kertas berdasarkan penyebut pecahan tak wajar yang diwakili, dan kemudiannya diikuti dengan sekumpulan tiga cip kertas yang kedua. Setelah beliau mendapati bilangan cip kertas mencukupi bagi mewakili pengangka pecahan tak wajar, Izan melorek empat daripadanya untuk diwakili sebagai $\frac{4}{3}$. Hackenberg (2007) menyatakan bahawa murid yang dapat melakukan pengulangan bagi menjelaskan pecahan tak wajar adalah murid yang memahami hubungan tiga peringkat unit, iaitu unit dalam unit dalam unit, iaitu tujuh berada dalam tiga unit satu keseluruhan yang mana setiap satu keseluruhan terdiri daripada tiga unit bahan seperti yang dijelaskan oleh Amin dan Izan.

Menyusun secara langsung. Rina dan Iqwan menjelaskan $\frac{4}{3}$ dari perspektif nombor bercampur. Dalam penjelasannya, Rina menyusun secara langsung bahan diskret berasaskan nombor bercampur, manakala Iqwan pula menyusun secara langsung berasaskan pecahan tak wajar. Petikan 13 dan Petikan 14 menunjukkan tingkah laku mereka.

Petikan 13: Sedutan Petikan 1WTW2

- P:** (Berikan beberapa cip kertas diberikan kepada murid). Jika seorang kawan minta pertolongan anda untuk jelaskan pecahan pada Kad 1 dengan menggunakan cip kertas ini, bagaimanakah anda lakukan?
- M:** Kita tukar empat pertiga jadi satu satu pertiga macam tadi. Letakkan cip kertas macam ini (murid menulis $\frac{4}{3}$ dan menyusun empat cip berdekatan angka 4 dan tiga cip berdekatan angka 3). Kita pindah cip kertas tadi ke satu pertiga.



Petikan 14: Sedutan Petikan 3GP4

- P:** Apakah yang tergambar dalam fikiran anda bila saya sebut empat pertiga?
- M:** Suatu nombor sebelah atas lebih besar daripada bawah (diam seketika) kita dapat $1 \frac{1}{3}$ (murid tunjuk pengiraan secara pembahagian).

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 4} \\ \underline{3} \\ 1 \end{array} = 1 \frac{1}{3}$$

- P:** Cuba jelaskan dengan lebih lanjut lagi pecahan empat pertiga?



- M:** Ada empat buah meja, di atas meja pertama dan kedua ada buku. Meja yang lain tiada buku.

Dalam Petikan 13, Iqwan menjelaskan pecahan tak wajar dengan menyusun cip kertas secara langsung. Beliau menyusun empat cip kertas di sebelah atas satu garisan mendatar dan tiga cip kertas di sebelah bawah garisan berkenaan sebagai pecahan $\frac{4}{3}$. Dalam Petikan 14, Rina kelihatan menyusun satu meja sebagai nombor satu, satu daripada tiga meja sebagai $\frac{1}{3}$, dan gabungan kedua-duanya dianggap sebagai $1 \frac{1}{3}$. Corak pemikiran itu menunjukkan mereka menjelaskan pecahan tak wajar

menggunakan bahan berbentuk diskret dengan menyusun secara langsung dengan merujuk pada nombor bulat, bukannya hubungan di antara bahagian-keseluruhan.

Satu keseluruhan. Amin dan Izan menjelaskan konsep pecahan tak wajar dengan membentuk satu keseluruhan pecahan berkenaan. Misalnya, menggambarkan $\frac{4}{3}$ dengan melukis sebuah bulatan yang dibahagikan kepada tiga bahagian sama besar saiznya. Beliau melorek ketiga-tiga bahagian berkenaan sebagai $\frac{3}{3}$. Amin mengulangi langkah tersebut sekali lagi dengan membentuk tiga bahagian bagi mewakili $\frac{3}{3}$. Beliau melorek satu daripada tiga bahagian berkenaan dan menganggapnya sebagai $\frac{1}{3}$, yang mana gabungan $\frac{3}{3}$ dan $\frac{1}{3}$ dianggap sebagai $\frac{4}{3}$. Izan menghadapi kesukaran untuk menjelaskan $\frac{4}{3}$ pada awal sesi temu duga. Walau bagaimanapun, sejurus kemudian beliau mengubah suai pemikirannya dengan menjelaskan $\frac{7}{3}$ secara melukis sebuah segi empat yang dibahagikan kepada tiga bahagian sama besar saiznya sebagai $\frac{3}{3}$. Beliau mengulangi langkah tersebut sebanyak dua lagi dan menganggap tiga objek $\frac{3}{3}$ dibentuk. Beliau melorek satu daripada tiga bahagian pada objek ketiga dan menganggap gabungan $\frac{3}{3}$ daripada objek pertama dan kedua, serta satu daripada tiga bahagian pada objek ketiga sebagai $\frac{7}{3}$.

Makna Bahagi

Enam corak pemikiran tentang makna bahagi dikenal pasti daripada peserta kajian, iaitu pemetakan yang menghasilkan benda keseluruhan, pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu benda keseluruhan, pemetakan yang menghasilkan benda keseluruhan dan bahagian tertentu benda keseluruhan, pengukuran yang menghasilkan beberapa benda keseluruhan, pengukuran yang menghasilkan beberapa bahagian keseluruhan, dan pengukuran yang menghasilkan beberapa benda keseluruhan dan pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu benda keseluruhan. Jadual 34 merumuskan corak pemikiran peserta kajian tentang makna bahagi.

Jadual 34

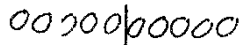
Corak Pemikiran Peserta Kajian Tentang Makna Bahagi

Makna bahagi	No. Bulat	No. Bulat	Pecahan	Pecahan
	\div No. Bulat	\div Pecahan	\div No. Bulat	\div Pecahan
Pemetakan yang menghasilkan benda keseluruhan.	Iqwan, Rina Amin, Izan	Rina		
Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu benda keseluruhan.		Iqwan Ida	Iqwan, Izan Rina, Amin, Ida	Ida Rina
Pemetakan yang menghasilkan benda keseluruhan dan bahagian tertentu benda keseluruhan.	Iqwan, Rina Amin, Izan			
Pengukuran yang menghasilkan beberapa benda keseluruhan.	Ida	Amin		Amin
Pengukuran yang menghasilkan beberapa bahagian keseluruhan.		Izan		Izan
Pengukuran yang menghasilkan beberapa benda keseluruhan dan pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu benda keseluruhan.	Ida			

Nombor bulat bahagi nombor bulat. Iqwan, Rina, Amin, dan Izan menggunakan corak pemikiran pemetakan bagi mentafsir makna bahagi, manakala Ida pula menggunakan corak pemikiran pengukuran bagi mentafsir makna bahagi. Bagi nombor bulat bahagi nombor bulat tanpa menghasilkan baki, Iqwan, Rina, Amin, dan Izan mentafsir makna bahagi sebagai pemetakan yang menghasilkan benda keseluruhan.

Petikan 15: Sedutan Petikan 3MK1

- P:** Kalau saya tekan nombor sepuluh, apa kalkulator akan buat?
M: (Murid menulis $10 \div 2 = 5$).
P: Cuba jelaskan maknanya.
M: Ada sepuluh buah limau, setiap orang dapat lima biji (murid melukis rajah).

$$10 \rightarrow 10 \div 2 = 5$$


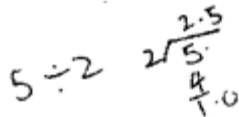
Dalam pembahagian seperti dalam Petikan 15, Rina menganggap 10 sebagai bilangan objek dan 2 sebagai bilangan petak, yang mana objek tersebut diagihkan kepada dua petak secara satu-satu sehingga habis. Bagi pembahagian yang meninggalkan baki pula, beliau juga mentafsir makna bahagi sebagai pemetakan yang menghasilkan benda keseluruhan dan bahagian benda keseluruhan. Corak pemikiran

Rina tersebut dikenali oleh Ott et al. (1991) sebagai pemetakan (*partitive*), yang mana kuantiti dalam set tidak diketahui, tetapi bilangan set diketahui terlebih dahulu.

Petikan 16: Sedutan Petikan 4MK1

P: Apakah maksud bahagi di situ?

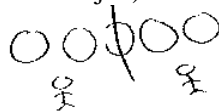
M: (Murid tunjukkan pengiraan $5 \div 2 = 2.5$ dalam bentuk lazim).



Handwritten mathematical work showing the division $5 \div 2 = 2.5$ and a long division of 5 by 2 resulting in 2.5.

P: Cuba jelaskan makna bahagi dalam pengiraan itu.

M: Ada lima benda, dibahagikan kepada dua orang, kena belahnya supaya adil. Setiap orang dapat dua point lima (murid melukis rajah).



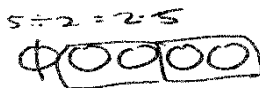
Bagi kes pembahagian meninggalkan baki pula, Amin mentafsir makna bahagi dengan menganggap 5 sebagai bilangan objek dan 2 sebagai bilangan petak, yang mana jumlah objek diagihkan kepada setiap petak satu-satu sehingga meninggalkan baki. Kemudiannya, beliau membahagikan satu objek kepada dua bahagian sama besar saiznya dan diagihkan kepada dua petak secara satu-satu sehingga habis. Setiap petak mendapat dua benda keseluruhan dan satu bahagian daripada objek berkenaan.

Berlainan pula bagi Ida, beliau mentafsir makna bahagi yang membabitkan nombor bulat bahagi nombor bulat tanpa meninggalkan baki dengan menganggap sejumlah objek diukur oleh sejumlah objek lain sebagai seunit ukuran, yang jumlah objek tersebut diukur oleh seunit ukuran secara satu-satu sehingga habis. Walau bagaimanapun, bagi pembahagian meninggalkan baki, beliau mengukur sejumlah objek dengan sejumlah objek lain yang dianggap sebagai seunit ukuran secara satu-satu sehingga habis. Walau bagaimanapun, baki objek dipetakan dan diagihkan kepada bilangan petak secara satu-satu sehingga habis.

Petikan 17: Sedutan Petikan 2MK1

P: Apakah maksud nak bahagi dua belah sama banyak?

M: Beri kepada dua orang (murid menunjuk bulatan).



Dalam Petikan 17 misalnya, Ida menganggap 2 sebagai seunit ukuran dan 5 sebagai bilangan objek, yang 5 objek tersebut diukur oleh 2 objek secara satu-satu sehingga meninggalkan baki satu objek. Objek itu dibahagikan kepada dua bahagian sama besar saiznya, kemudiannya diagihkan kepada dua petak satu-satu sehingga habis. Dalam pembahagian itu, hasil bahagi ialah terdapat dua kali dua objek keseluruhan dalam lima objek dan setiap petak mendapat separuh objek keseluruhan. Dapatan kajian ini adalah berbeza daripada pandangan Anghileri dan Johnson (1992), Ott, Snook, dan Gibson (1991), Reys, Lindquist, Lambdin, & Smith (2007) yang menyatakan pembahagian membabitkan sama ada pemetakan atau pengukuran. Ini adalah kerana Ida menjelaskan pembahagian yang mempunyai baki dengan menggunakan kedua-dua makna.

Nombor bulat bahagi pecahan. Tiga corak pemikiran tentang makna bahagi membabitkan nombor bulat bahagi pecahan ditafsirkan oleh peserta kajian, iaitu Rina mentafsir makna bahagi sebagai pemetakan yang menghasilkan benda keseluruhan, Iqwan dan Ida pula mentafsir makna bahagi sebagai pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu benda keseluruhan, Amin mentafsir makna bahagi sebagai pengukuran yang menghasilkan beberapa benda keseluruhan, manakala Izan mentafsir makna bahagi sebagai pengukuran yang menghasilkan beberapa bahagian keseluruhan.

Rina mentafsir makna bahagi membabitkan nombor bulat bahagi pecahan dengan menggunakan bahan diskret. Dalam Petikan 18, beliau mentafsir makna bahagi membabitkan $2 \div 1/2$ dengan menganggap 2 sebagai bilangan objek dan $1/2$ sebagai

bilangan petak, yang mana semua objek tersebut diagihkan kepada satu daripada dua petak.

Petikan 18: Sedutan Petikan 3MP2

M: Ada dua biji kek dan dua kumpulan. Kek ni diberikan kepada satu kumpulan sahaja sebab satu perdua (murid melukis rajah).

$$\div \frac{1}{2} \quad 2 \rightarrow 2 \div \frac{1}{2} = \textcircled{1} \textcircled{1} \rightarrow \square$$

$$6 \rightarrow 6 \div \frac{1}{2} = \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \rightarrow \square$$

Ida juga menggunakan bahan diskret untuk menjelaskan makna bahagi membabitkan nombor bulat bahagi pecahan. Walau bagaimanapun, Ida menganggap nombor dibahagi sebagai petak dan pembahagi sebagai sejumlah objek, yang objek berkenaan diagihkan kepada setiap petak secara satu-satu sehingga habis seperti yang ditunjukkan dalam Petikan 19, yang mana beliau menganggap $2 \div \frac{2}{3}$ dengan melukis dua buah pasu bunga dan tiga kuntum bunga. Dua daripada tiga kuntum bunga dianggapkan telah dikeluarkan, beliau mengagihkan satu daripada tiga kuntum bunga kepada dua pasu berkenaan dengan sama banyak.

Petikan 19: Sedutan Petikan 2MK3

M: Ada dua buah pasu dan tiga kuntum bunga. Dua pertiga sudah diambil oleh pelajar lain.



Iqwan pula memiliki corak pemikiran yang sama semasa mentafsir makna bahagi membabitkan nombor bulat bahagi pecahan dan pecahan bahagi nombor bulat. Beliau menganggap nombor bulat sebagai petak, manakala pecahan sebagai bahagian objek keseluruhan, yang mana bahagian tersebut diagihkan kepada petak secara satu-satu sehingga habis.

Berlainan pula dengan Amin dan Izan, beliau mentafsir makna bahagi sebagai pengukuran yang membabitkan bahan keseluruhan dan bahagian pada bahan keseluruhan masing-masing. Dalam Petikan 20, Amin mentafsir makna bahagi membabitkan nombor bulat bahagi pecahan dengan menganggap pecahan sebagai seunit

ukuran dan nombor bulat sebagai bilangan bahan, yang mana bahan tersebut diukur oleh seunit ukuran secara satu-satu sehingga habis.

Petikan 20: Sedutan Petikan 4MK2

M: Bahagi dua bulatan itu kepada dua belah sama banyak (murid melukis rajah).



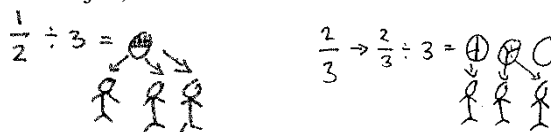
Dalam Petikan 20, Amin menganggap $1/2$ sebagai seunit ukuran bagi mengukur 2 objek secara satu-satu sehingga habis. Dalam pembahagian itu, beliau mendapati terdapat empat separuh bahagian pada dua unit objek. Begitu juga dengan aktiviti membabitkan $6 \div 1/2$, beliau mengukur enam objek dengan $1/2$ unit sebanyak 12 kali. Dalam pembahagian itu, Amin menganggap terdapat 12 separuh bulatan dalam enam buah bulatan lengkap.

Pecahan bahagi nombor bulat. Satu corak pemikiran tentang makna bahagi membabitkan pecahan bahagi nombor bulat ditafsirkan oleh semua peserta kajian, iaitu pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu benda keseluruhan.

Petikan 21: Sedutan Petikan 3MK3

P: Apakah maksud pembahagian itu?

M: Ada sebiji kek, belah kepada setengah. Setiap orang ambil sebahagian daripada kek tersebut (murid melukis rajah).



Dalam Petikan 21, Rina mentafsir makna bahagi membabitkan $1/2 \div 3$ dengan menganggap $1/2$ sebagai bilangan bahagian untuk diagihkan kepada tiga petak secara satu-satu sehingga habis. Begitu juga dengan kes membabitkan $2/3 \div 3$, beliau menganggap $2/3$ sebagai bilangan bahagian untuk diagihkan kepada tiga petak secara satu-satu sehingga habis.

Pecahan bahagi pecahan. Tiga corak pemikiran tentang makna bahagi membabitkan pecahan bahagi pecahan ditafsirkan oleh peserta kajian, iaitu pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu bahan keseluruhan, Pengukuran yang menghasilkan beberapa benda keseluruhan, dan Pengukuran yang menghasilkan beberapa bahagian keseluruhan. Dalam aktiviti ini, hanya Iqwan tidak dapat mentafsir makna bahagi dengan alasan pecahan pertama ialah petak dan pecahan kedua ialah bahagian, yang mana beliau sukar untuk menjelaskan pecahan pertama.

Dalam Petikan 22, Ida mentafsir makna bahagi membabitkan $1/3 \div 1/2$ menganggap $1/3$ sebagai bilangan petak dan $1/2$ sebagai bilangan bahagian, yang mana bahagian tersebut diagihkan kepada petak secara satu-satu sehingga habis.

Petikan 22: Sedutan Petikan 2MK5

- P:** Cuba jelaskan pembahagian itu.
M: (Diam seketika). Ada dua biji telur dan tiga orang. Sebiji telur tiada lagi dan seorang juga sudah tiada. Sekarang belah sebiji telur kepada dua orang.



Berlainan pula dengan Rina, dalam Petikan 23, beliau mentafsir makna bahagi membabitkan $2/3 \div 3/5$ dengan menganggap $2/3$ sebagai bilangan bahagian dan $3/5$ sebagai bilangan petak, yang mana bahagian tersebut diagihkan kepada petak secara satu-satu sehingga habis.

Petikan 23: Sedutan Petikan 3MK4

- P:** (Tunjukkan kalkulator yang mempunyai fungsi “ $\div 1/3$ ”). Bagi kalkulator ini, jika saya tekan satu perdua, apakah akan berlaku?
M: Sebiji kek, ada tiga kumpulan. Sebahagian kek ini diperoleh satu kumpulan sahaja (murid melukis rajah).



Amin memiliki gaya pemikiran yang berbeza daripada Ida dan Rina, beliau mentafsir makna bahagi sebagai pengukuran yang menghasilkan bahagian tertentu bahan seperti dalam Petikan 24.

Petikan 24: Sedutan Petikan 4MK4

P: Apakah makna bahagi pada simbol itu?

M: Ada sebuah bulatan, ambil dua pertiga. Dua bahagian itu perlu dibelah lagi seperti asal.



Dalam Petikan 24, Amin mentafsir makna bahagi membabitkan $2/3 \div 1/2$ dengan menganggap $2/3$ sebagai bilangan bahagian dan $1/2$ sebagai seunit ukuran, yang mana dua pertiga bahagian tersebut diukur sebanyak dua kali oleh $1/2$ secara satu-satu sehingga habis. Corak pemikiran Iqwan, Ida, Rina, Amin, dan Izan dalam konteks pemetakan atau pengukuran adalah selaras dengan pandangan Steffe (2009) yang menyatakan murid tidak lebih daripada menggunakan pengetahuan pembahagian nombor bulat bagi menjelaskan pembahagian membabitkan pecahan.

Misalnya, dalam konteks nombor bulat bahagi pecahan dan pecahan bahagi nombor bulat, Iqwan dan Ida menganggap nombor bulat sebagai bilangan petak, manakala nombor pecahan sebagai bahan untuk diagihkan kepada petak dengan sama banyak. Beliau menghadapi kesukaran untuk menjelaskan pecahan bahagi pecahan kerana bilangan petak tidak diwakili lagi. Ida dan Rina cuba mengatasi kesukaran mewakili bilangan petak dengan menggunakan bahan berbentuk diskret. Walau bagaimanapun, mereka tidak dapat mentafsir jawapan akhir kerana tidak semua daripada petak mempunyai bahan yang diagihkan.

Penyelesaian Masalah Membabit Pecahan

Cara peserta kajian menyelesaikan masalah dikenal pasti menerusi tiga konteks, iaitu mengaplikasikan nombor pecahan, operasi, dan makna bahagi. Rumusan corak pemikiran murid menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan adalah seperti ditunjukkan dalam Jadual 35.

Pengetahuan nombor pecahan. Empat pengetahuan tentang nombor pecahan digunakan oleh peserta kajian untuk menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian

pecahan, iaitu pemetakan dan pemisahan tunggal, pengumpulan dan pemisahan tunggal, nombor perseratus, dan nombor persepuluh.

Jadual 35

Corak Pemikiran Peserta Kajian Menyelesaikan Masalah Pembahagian Pecahan

	Aplikasi Pengetahuan	Masalah			
		Jus oren	Tongkat buluh	Bar Coklat	Piza
Nombor pecahan	Pemetakan dan pemisahan tunggal	Iqwan, Rina, Amin	Iqwan, Ida, Rina, Amin, Izan	Iqwan, Ida Rina, Amin, Izan	
	Pengumpulan dan pemisahan tunggal				Iqwan, Ida Rina, Amin, Izan
	Persepuluh Perseratus	Izan Ida, Izan	Iqwan Iqwan		
Operasi	Penambahan	Iqwan, Ida Amin, Izan	Iqwan, Amin Izan		
	Penolakan Pendaraban Pembahagian	Iqwan, Ida Iqwan	Iqwan Rina Iqwan	Iqwan, Rina	Iqwan
	Pengukuran yang terdiri daripada beberapa keseluruhan dan bahagian tertentu bahan keseluruhan.	Iqwan, Ida Rina, Amin Izan	Iqwan, Ida Rina, Amin Izan		
Makna bahagi	Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu bahan keseluruhan			Iqwan, Ida Rina, Amin, Izan	Iqwan, Ida Rina, Amin, Izan

Semua peserta kajian mengaplikasikan pengetahuan pecahan dengan melakukan pemetakan dan pemisahan tunggal dan pengumpulan dan pemisahan tunggal semasa menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan. Dalam Petikan 25 misalnya, Iqwan menyukat baki jus oren dengan memetakkan cawan kepada tiga bahagian sama besar saiznya. Kemudiannya, beliau melorek dua daripada tiga bahagian berkenaan dan menganggapnya sebagai $\frac{2}{4}$ cawan.

Petikan 25: Sedutan Petikan 1SPP1

- M:** (Diam seketika). Ini $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$.
P: Tadi saya kata cawan hanya dapat sukat $\frac{3}{4}$ liter sahaja.
M: (Diam seketika, kemudian melukis tiga garisan). Satu, dua, tiga.

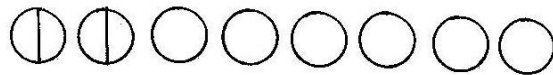


- P:** Berapakah sukatan itu sekarang?
M: $\frac{2}{4}$ gelas.

Dalam konteks bahan diskret pula, Petikan 26 menunjukkan bahawa Iqwan mengenal pasti $\frac{1}{4}$ piza daripada lapan piza dengan mengumpulkan setiap dua piza sebagai satu kumpulan berasingan. Beliau memisahkan dua daripada lapan piza tersebut dan menganggapnya sebagai $\frac{1}{4}$.

Petikan 26: Sedutan Petikan 1SPP4

- M:** Kita tanda setiap bahagian macam ini (murid melukis pada dua cip kertas).



Hanya Izan dan Iqwan menggunakan pengetahuan persepuluh. Selain itu, Ida, Izan, dan Iqwan juga mengaplikasikan pengetahuan perseratus bagi menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan. Dalam Petikan 27, Iqwan memotong tongkat $\frac{1}{2}$ cm dengan menganggap ukuran itu bersamaan dengan 0.5 cm. Seterusnya, beliau mengukur buluh yang berukuran 4 cm dengan menggunakan nombor persepuluh itu bagi mengukur tongkat yang disediakan.

Petikan 27: Sedutan Petikan 1SPP2

- M:** Kita ada 4 cm. Kita nak potong $\frac{1}{2}$ cm, itu ialah 0.5 cm. 1 cm ialah $\frac{2}{2}$ sebab dkecilkan menjadi 1 cm. Di sini kita dah tahu $\frac{1}{2}$ cm ialah 0.5 cm. Jadi kita perlu cari ada berapa batang dalam 1 cm. Kalau 0.5 cm ialah 1 batang, jadi 1 cm akan ada 2 batang tongkat.

$$\begin{aligned} 4 \text{ cm} - \frac{1}{2} \text{ cm} &= \underline{0.5 \text{ cm}} \\ 1 \text{ cm} &= \frac{2}{2} \text{ cm} = 1 \text{ cm} \\ \frac{1}{2} \text{ cm} &= \frac{0.5}{2 \div 2} \\ \textcircled{1} \text{ cm} &= 1 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} &= \dots \text{ batang} \end{aligned}$$

Dalam Petikan 28 pula menunjukkan corak pemikiran Iqwan menukar pecahan $\frac{3}{4}$ ke nombor perseratus 0.75 bagi menyelesaikan masalah membabitkan tongkat buluh.

Beliau mengaplikasikan nombor perseratus itu bagi mengukur buluh yang berukuran $1/2$ cm bagi menyelesaikan masalah penyediaan tongkat berukuran $3/4$ cm berkenaan.

Petikan 28: Sedutan Petikan 1SPP2

- P:** (Jalur kertas dan gunting diletakkan di hadapan murid). Katakan ini adalah buluh berukuran $3/4$ cm. Anda diminta memotong buluh bagi membentuk tongkat berukuran $1/2$ cm setiap satu. Berapakah bilangan tongkat $1/2$ cm yang dapat anda bentuk?
M: $3/4$ sama dengan 0.75 cm dan $1/2$ cm (diam seketika).

Corak pemikiran yang ditunjukkan oleh peserta kajian dalam Petikan 25, 26, 27, dan 28 menunjukkan bahawa semua peserta kajian mengaplikasikan pengetahuan pemetakan dan pemisahan tunggal bahan selanjar, pengumpulan dan pemisahan bahan diskret, nombor persepuluh, dan nombor perseratus sebagai nombor pecahan bergantung pada konteks masalah yang diberikan.

Pengetahuan operasi. Selain pengetahuan tentang nombor pecahan, peserta kajian juga menggunakan operasi, iaitu penambahan, penolakan, pendaraban, dan pembahagian yang membabitkan pecahan bagi menyelesaikan masalah berkenaan. Iqwan, Ida, Amin, dan Izan mengaplikasikan pengetahuan tentang penambahan dan penolakan pecahan semasa menyelesaikan masalah yang membabitkan jus oren dan tongkat buluh seperti yang ditunjukkan dalam Petikan 29.

Petikan 29: Sedutan Petikan 2SPP2

- M:** (Murid menulis " $0.75 + 0.75 = 1.50$ " dan " $1.50 + 0.75 = 2.25$ ").

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ 0.75 \\ \hline 1.50 \end{array} = 2 \qquad \begin{array}{r} 1.50 \\ 0.75 \\ \hline 2.25 \end{array}$$

- P:** Cuba tunjuk pada rajah cawan dan cari berapakah bilangan cawan yang diperlukan.
M: (Diam seketika, murid tunjuk pengiraan " $0.75 - 0.5 = 0.25$ ") Ada 2 kali 0.25 liter lagi yang lebih. Ada $2/3$ cawan.

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ 0.5 \\ \hline 0.25 \text{ L.} \end{array}$$

Petikan 29 menunjukkan bahawa Ida menambah nombor perseratus 0.75 sebanyak dua kali bagi mendapat 1.50 . Kemudiannya, beliau menolak nombor perseratus 1.50

dengan 0.75 bagi mendapat 0.75. Ini menunjukkan bahawa Iqwan mewakili $\frac{3}{4}$ dengan nombor perseratus bagi menyelesaikan masalah menentukan bilangan cawan muatan $\frac{3}{4}$ l diperlukan untuk menyukat 2 l jus oren.

Rina dan Iqwan pula menggunakan operasi darab pecahan bagi menyelesaikan masalah membabitkan pecahan, manakala hanya Iqwan sahaja mengaplikasikan pengetahuan pembahagian pecahan dalam menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dan tongkat buluh seperti yang ditunjukkan dalam Petikan 30.

Petikan 30: Sedutan Petikan 3SPP2

M: Darab. Tak berapa ingat (diam seketika). Bahagi dengan $\frac{1}{2}$ akan dapat 8 bahagian (murid tunjuk pengiraan " $4 \times \frac{2}{1} = 8$ ").

$$4 \div \frac{1}{2} = 4 \times \frac{2}{1} = 8$$

Dalam Petikan 30, Rina mengaplikasikan pengetahuan darab bagi menentukan bilangan tongkat yang dapat dihasilkan daripada sebatang buluh yang berukuran 4 cm. Beliau menukar tanda bahagi ke darab dan menyongsangkan $\frac{1}{2}$ menjadi $\frac{2}{1}$ untuk didarabkan dengan 4. Hasil operasi songsang dan darab ialah terdapat lapan batang tongkat berukuran $\frac{1}{2}$ cm dihasilkan daripada 4 cm buluh.

Pengetahuan makna bahagi. Semua peserta kajian mengaplikasikan pengetahuan pengukuran yang terdiri daripada beberapa keseluruhan dan bahagian tertentu bahan keseluruhan dalam menyelesaikan masalah yang membabitkan jus oren dan tongkat buluh. Dalam Petikan 31, Iqwan mengukur buluh berukuran 2 cm dengan menggunakan $\frac{2}{3}$ cm sebanyak dua kali. Dalam setiap kali ukuran itu, beliau mendapati baki sebanyak $\frac{1}{3}$ cm buluh dapat dihasilkan.

Petikan 31: Sedutan Petikan 1SPP2

M: (Diam seketika). Kita ambil " $1\text{cm} - 2/3\text{cm} = 1/3\text{cm}$ " ini sebatang, " $1\text{cm} - 2/3\text{cm} = 1/3\text{cm}$ " ini sebatang lagi. " $1/3 + 1/3 = 2/3$ " ini sebatang lagi. Jadi 1, 2, 3, ada 3 batang semuanya.

Handwritten work for Petikan 31:

$$1\text{cm} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Selain itu, Iqwan pula menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dengan mengukur dua liter jus oren dengan menggunakan nombor perpuluhan, iaitu 0.75 yang dianggapkan setara dengan $3/4\text{ l}$ sebuah cawan seperti ditunjukkan dalam Petikan 32.

Petikan 32: Sedutan Petikan 1SPP1

M: (Diam seketika). Kita tukar unit liter. Tapi akan jadi 1000 mililiter!
P: Ya, ya. Bagaimanakah seterusnya?
M: (Diam seketika, murid menukar $3/4$ liter kepada 0.75 liter).

Handwritten work for Petikan 32:

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75\text{ L}$$

$$\begin{array}{r} 1.00 \\ - 0.75 \\ \hline 0.25 \end{array}$$

Berlainan bagi Iqwan, beliau mengukur bahan dengan menolak dua pecahan secara aritmetik. Beliau mengukur 2 l jus oren dengan menggunakan cawan yang mempunyai muatan $3/4\text{ l}$ secara menolak 2 dengan $3/4$ bagi menghasilkan bahagian tertentu bahan keseluruhan dalam menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat dan piza.

Selain itu, Rina pula menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan dengan memetakkan cawan dengan sama besar saiznya. Beliau mengukur 2 l jus oren dengan memetakkan tiga bahagian pada cawan pertama dan tiga bahagian pada cawan

kedua. Seterusnya Rina mendapati baki jus oren ialah $\frac{2}{3}$ daripada muatan cawan yang ketiga seperti yang ditunjukkan dalam Petikan 33.

Petikan 33: Sedutan Petikan 3SPP1

- P:** Sekarang, cuba tunjukkan bilangan cawan yang diperlukan untuk menyukat 1 l jus oren.
M: Satu cawan penuh, ada lebih satu bahagian lagi (murid melukis dan melorek cawan).



Petikan 31, 32, dan 33 menunjukkan bahawa peserta kajian memiliki tiga corak pemikiran dalam menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan, iaitu mengukur menggunakan nombor perseratus, simbol pecahan, dan hubungan bahagian-keseluruhan. Amin memiliki corak pemikiran yang sama dengan Rina, iaitu mengenal pasti hubungan bahagian-keseluruhan menggunakan bahagian yang sama besar saiznya. Sementara Izan pula menggunakan nombor persepuluh dan perseratus bagi mengukur bahan yang terlibat dalam masalah tertentu.

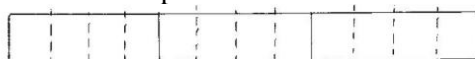
Selain itu, semua peserta kajian mengaplikasikan makna bahagi, iaitu pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu bahan keseluruhan dalam menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat dan piza. Dalam Petikan 32, Amin melakukan pemetakan berpasangan pada jalur kertas lapan petak, yang mana mempunyai empat bahagian semuanya. Beliau menganggap dua daripada lapan petak sebagai $\frac{1}{4}$.

Petikan 34: Sedutan Petikan 4SPP3

- M:** Belah empat.
P: Cuba tunjukkan.
M: (Murid melukis garisan).



- P:** Bagaimanakah anda mendapat $\frac{1}{16}$?
M: Bahagian lain juga kena belah empat.

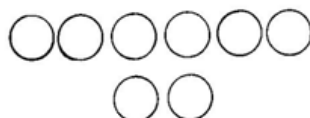


Dalam Petikan 33, Izan mengumpulkan dua piza bersama bagi membentuk empat unit pasangan piza. Beliau menganggap dua daripada lapan piza sebagai $\frac{1}{4}$. Berikutnya, beliau mengagihkan dua piza dengan sama banyak kepada empat orang rakannya.

Petikan 35: Sedutan Petikan 5SPP4

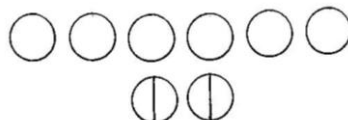
P: Bagaimanakah anda tahu itu satu perempat?

M: Sebab saya dah bahagikan kepada empat bahagian, kita ambil satu sahaja.



P: Sekarang, katakan anda memberikan semua piza itu kepada empat orang rakan anda. Tunjukkan bagaimanakah anda membahagikan piza tersebut kepada rakan anda tersebut.

M: Kena bahagikan kepada empat bahagian (murid melukis garisan pemisah).



Petikan 34 dan 35 menunjukkan bahawa Izan dan Amin memetakan bahan selanjar komposit berasaskan penyebut pecahan. Kemudiannya, beliau memetakan bahagian berkenaan berdasarkan bilangan petak, yang mana setiap bahagian yang dipetakan itu diagihkan secara satu-satu sehingga habis. Bagi bahan diskret komposit pula, Amin memiliki bentuk pemikiran yang sama seperti semasa beliau menyelesaikan masalah menggunakan bahan berbentuk selanjar. Beliau mengumpul piza secara berpasangan bagi membentuk empat pasangan piza semuanya. Amin mengagihkan piza yang dipisahkan secara satu-satu sehingga habis kepada petak berkenaan. Corak pemikiran yang sama juga dikenal pasti pada Iqwan, Ida, dan Rina semasa menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat dan piza.

Perbincangan

Peserta kajian membina cara atau kaedah khusus bagi menyelesaikan masalah bahagi yang membabitkan nombor bulat, pecahan, atau gabungan kedua-duanya menggunakan pengetahuan pecahan wajar, pecahan tak wajar, dan makna operasi bahagi bergantung pada jenis tugas yang diberikan kepada mereka.

Menyelesaikan Masalah Membabitkan Jus Oren

Peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dengan kaedah khusus, misalnya Iqwan menggunakan kaedah pengukuran berasaskan satu keseluruhan yang membabitkan penolakan pecahan wajar, membilangan nombor bulat, pemetakan tunggal, dan pemisahan tunggal. Ida pula menggunakan kaedah pengukuran berasaskan satu unit nombor perseratus yang membabitkan operasi penambahan dan penolakan nombor perpuluhan. Rina menggunakan kaedah memetakan rajah segi empat dan memisahkan bahagian tertentu. Amin menggunakan kaedah penambahan membabitkan simbol pecahan dan pengukuran membabitkan lorekan petak seragam. Manakala Izan menggunakan kaedah penambahan dan penolakan nombor perseratus dan pengukuran membabitkan nombor perseratus. Rumusan kaedah yang digunakan oleh peserta kajian untuk menyelesaikan masalah membabitkan jus oren adalah seperti dalam Jadual 36.

Jadual 36

Kaedah Digunakan Peserta Kajian Menyelesaikan Masalah Membabitkan Jus Oren

Konteks Masalah	Peserta Kajian				
	Iqwan	Ida	Rina	Amin	Izan
Jus oren	- Penolakan daripada satu keseluruhan - Membilang nombor bulat, - Pengukuran membabitkan pemetakan tunggal dan pemisahan tunggal.	- Pengukuran membabitkan nombor perseratus, - Penolakan nombor perseratus.	Pengukuran membabitkan lorekan pada petak seragam.	- Penambahan membabitkan simbol pecahan. - Pengukuran membabitkan lorekan petak seragam.	- Penambahan dan penolakan nombor perseratus. - Pengukuran membabitkan nombor perseratus.

Iqwan

Pengukuran berasaskan satu keseluruhan. Iqwan menyelesaikan tugas membabitkan jus oren dengan membandingkan muatan cawan, iaitu $3/4$ l dengan $4/4$ l, yang mana $4/4$ l dianggap sebagai 1 l jus oren.

Penolakan pecahan wajar. Beliau menyatakan bahawa baki sebanyak $1/4$ l dihasilkan apabila 1 l jus oren diisikan ke dalam sebuah cawan, manakala 2 l jus oren pula memerlukan dua buah cawan dan $2/4$ cawan yang ketiga. Ini menunjukkan bahawa beliau mengaplikasikan pengetahuan penolakan pecahan wajar dari konteks satu keseluruhan.

Membilang nombor bulat. Beliau membilang pecahan “perempat” satu demi satu, iaitu $1/4$, $2/4$, $3/4$, dan $4/4$ menunjukkan Iqwan tahu sifat kardinal dan ordinal pecahan tersebut dalam mengenal pasti bilangan cawan yang terlibat. Pemikiran membilang nombor dan menyusun nombor daripada kecil ke besar mungkin dibina daripada lanjutan konsepsi nombor bulat yang dimilikinya. Kebolehan Iqwan membilang nombor bulat pada pecahan secara kardinal dan ordinal telah membantu beliau memastikan sukatan dalam cawan dan baki jus tersebut.

Pemetakan tunggal. Bagi mengenal pasti baki jus oren pula, Iqwan menyatakan bahawa $2/4$ l ialah separuh daripada $4/4$ l. Ini menunjukkan beliau mengaplikasikan penolakan pecahan bagi mengenal pasti hubungan kedua-dua pecahan itu sebagai separuh. Walau bagaimanapun, corak pemikiran Iqwan berikutnya menunjukkan beliau mengenal pasti muatan cawan bagi baki jus, iaitu $2/4$ l dengan mengukurnya dengan cawan yang mempunyai tiga bahagian sama besar saiznya.

Pemisahan tunggal. Selanjutnya, Iqwan melorek dua daripada tiga bahagian pada sebuah cawan. Corak pemikiran Iqwan berikutnya menunjukkan bahawa beliau mengukur $2/4$ l jus oren dengan tiga bahagian cawan tersebut. Beliau menyatakan 2 l jus oren memerlukan 2 dan $2/3$ cawan yang mempunyai muatan $3/4$ l masing-masing.

Ida

Pengukuran berasaskan satu unit nombor perseratus. Ida menghadapi kesukaran bagi menyelesaikan masalah membabitkan jus oren pada awal protokol temu duga kerana beliau menukar 1 l jus oren kepada 1000 ml. Walau bagaimanapun, beliau dapat mengatasinya setelah mengubah pemikiran dengan menggunakan kaedah pengukuran berasaskan satu unit nombor perseratus untuk menjelaskan penyelesaiannya. Misalnya, beliau menukar $\frac{3}{4}$ l ke 0.75 l, kemudiannya menjumlahkan 0.75 l jus oren sebanyak dua kali bagi menghasilkan 1.50 l jus oren. Berikutnya, Ida menjumlahkan 1.50 l dengan 0.75 l jus oren menjadi 2.25 l jus oren. Corak pemikiran ini menunjukkan bahawa beliau mengukur satu unit oren, iaitu 0.75 l dengan operasi tambah sebanyak tiga kali. Beliau menyedari bahawa penambahan menyebabkan lebih cawan sebanyak 0.25 l.

Penolakan nombor perseratus. Bagi mengenal pasti muatan baki jus oren pada cawan ketiga, Ida menolak 1 l dengan 0.75 l bagi menghasilkan 0.25 l jus oren, yang mana beliau menyatakan bahawa baki 2 l jus oren yang disukat dengan 2 biji cawan ialah sejumlah 0.50 l. Bagi mengenal pasti muatan 0.50 l jus oren dalam cawan ketiga pula, beliau menolak 0.75 l dengan 0.50 l menghasilkan 0.25 l jus oren. Daripada penolakan itu, beliau menyatakan bahawa sejumlah $\frac{2}{3}$ cawan diperlukan untuk menyukat 0.50 l baki jus oren.

Penambahan nombor perseratus. Corak pemikiran Ida seterusnya mendapati bahawa beliau menganggap 0.75 l sebagai seunit ukuran bagi mengukur 2 l jus oren secara satu-satu dengan operasi penambahan. Bagi mengenal pasti baki jus oren dalam cawan ketiga pula, beliau menolak 0.50 l daripada 0.75 l seunit ukuran bagi menghasilkan 0.25 l. Beliau menyatakan sebanyak 2 dan $\frac{2}{3}$ cawan jus oren diperlukan untuk menyukat 2 l jus oren dengan cawan yang mempunyai muatan $\frac{3}{4}$ l setiap satu.

Rina

Pengukuran berasaskan bilangan petak pada rajah. Rina menghadapi kesukaran pada permulaan protokol temu duga dalam menyelesaikan masalah membabitkan jus oren. Ini adalah disebabkan beliau memetakkan sebuah cawan kepada empat bahagian dan melorek tiga daripada petak tersebut sebagai $\frac{3}{4}$ l jus oren. Satu bahagian lagi yang tidak dilorekkan, iaitu $\frac{1}{4}$ daripada cawan menyukarkan beliau menjustifikasi saiz cawan yang sebenar. Pemikiran yang dibina oleh Rina mungkin disebabkan beliau menganggap sebuah cawan penuh bersamaan dengan satu keseluruhan, iaitu $\frac{4}{4}$ daripada bahagian yang dibentuk.

Kemudiannya, Rina mengubah pemikiran dengan memetakkan dua biji cawan masing-masing kepada tiga bahagian sama besar saiznya. Beliau melorek tiga bahagian pada cawan pertama dan satu daripada tiga bahagian pada cawan kedua sebagai sukatan bagi 1 l jus oren. Beliau mengulangi langkah tersebut sekali lagi dan menganggapnya sebagai sukatan bagi 1 l kedua. Dalam aktiviti itu, beliau mentafsir jawapan sebagai sebanyak 2 dan $\frac{2}{4}$ cawan diperlukan untuk menyukat 2 l jus oren dengan cawan yang bersaiz $\frac{3}{4}$ l. Ini mungkin kerana beliau melanjutkan pemikiran sebelum itu bahawa sebuah cawan mempunyai empat bahagian. Oleh itu, baki dua bahagian, iaitu $\frac{2}{4}$ l dianggapkan sebagai $\frac{2}{4}$ daripada cawan penuh.

Amin

Operasi penambahan membabitkan simbol pecahan. Amin cuba memahami situasi dengan menyatakan $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, iaitu kurang daripada 2 l dengan alasan 2 l bersamaan dengan $\frac{8}{8}$. Beliau juga menyatakan bahawa sebanyak $\frac{2}{8}$ l jus oren lagi diperlukan untuk menjadikannya 2 l. Walau bagaimanapun, Amin menghadapi kesukaran untuk meneruskan penyelesaiannya dengan menggunakan operasi penambahan membabitkan simbol pecahan.

Pengukuran membabitkan bilangan petak pada rajah selanjar. Seterusnya, beliau mengubah pemikiran dengan memetakkan rajah berbentuk selanjar kepada empat bahagian sama besar saiznya. Beliau menulis $\frac{3}{4}$ pada rajah pertama dan melorek satu daripada empat bahagian pada petak kedua sebagai sukatan untuk 1 l jus oren. Berikutnya, Amin mengulangi langkah sebelum itu sekali lagi dengan memetakkan tiga buah cawan berbentuk segi empat sama besar saiznya. Beliau melorek empat bahagian pada cawan pertama dan kedua, manakala cawan ketiga pula dilorekkan dua daripada empat bahagian. Dalam aktiviti itu, Amin mentafsir jawapan bagi aktiviti itu sebagai sebanyak 2 dan $\frac{2}{4}$ cawan diperlukan untuk menyukat 2 l jus oren.

Izan

Penambahan dan penolakan nombor perseratus. Izan menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dengan menukar $\frac{3}{4}$ l ke 0.75 l. Beliau menjumlahkan 0.75 l sebanyak dua kali bagi menghasilkan 1.50 l. Kemudiannya, Izan menolak 2 l jus oren dengan 1.50 l menghasilkan 0.50 l baki jus oren.

Pengukuran berasaskan bilangan petak. Seterusnya, beliau memetakkan sebuah cawan kepada tiga bahagian dan menulis 0.25, 0.50, dan 0.75 pada setiap bahagian. Corak pemikiran ini menunjukkan bahawa beliau mengukur baki jus oren secara membilang nombor perseratus. Pemikiran ini mungkin merupakan lanjutan daripada pemikiran membilang nombor bulat dalam konteks kardinal dan ordinal.

Dapatan kajian ini menunjukkan pengetahuan tentang nombor, operasi, dan makna bahagi adalah saling bergantung dan saling diperlukan oleh peserta kajian. Misalnya, Iqwan dan Izan mengaplikasikan pengetahuan operasi dan nombor terlebih dahulu sebelum mengaplikasikan pengetahuan tentang makna bahagi dan perhubungan bahagian-keseluruhan bagi menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dan tongkat buluh. Dapatan kajian ini adalah selari dengan pandangan Mulligan dan Mitchelmore (1997) yang menyatakan bahawa operasi penolakan berulang merupakan operasi paling

dominan bagi muridnya dalam menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan.

Berlainan pula dengan Ida, Rina, dan Amin, mereka mengaplikasikan pengetahuan bahagian-keseluruhan terlebih dahulu sebelum mengaplikasikan pengetahuan tentang operasi tambah dan tolak membabitkan nombor perseratus. Dapatan ini adalah selaras dengan pandangan Bielefeld (2002) dan Hatfield, Edwards, Bitter, & Morrow (2000) yang menyatakan kedua-dua pengetahuan algoritma dan konseptual penting dalam membantu murid menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan.

Menyelesaikan Masalah Membabitkan Tongkat Buluh

Peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan tongkat buluh dengan kaedah khusus, iaitu Iqwan menggunakan kaedah pengukuran berasaskan satu keseluruhan membabitkan nombor perseratus, penolakan satu keseluruhan, penambahan dan meringkaskan simbol pecahan, dan pemetakan tunggal. Ida pula menggunakan kaedah pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat membabitkan pemetakan tunggal.

Sementara itu, Rina pula menggunakan kaedah operasi songsang dan darab membabitkan pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat, pemetakan tunggal, dan pemisahan tunggal. Amin pula menggunakan kaedah pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat, pemetakan tunggal, dan pemisahan tunggal. Akhirnya, Izan menggunakan kaedah operasi songsang dan darab, kemudiannya mengubah pemikirannya menggunakan kaedah pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat, pemetakan tunggal, dan pemisahan tunggal.

Konteks Masalah	Peserta Kajian				
	Iqwan	Ida	Rina	Amin	Izan
Tongkat buluh	Pengukuran berasaskan satu keseluruhan: -Nombor perseratus sebagai seunit ukuran, -Penolakan satu keseluruhan, -Penambahan dan meringkas simbol pecahan, -Pemetakan tunggal.	Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat: - Pemetakan tunggal.	Operasi songsang dan darab: - Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat, -Pemetakan tunggal, -Pemisahan tunggal.	Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat: - Pemetakan tunggal, - Pemisahan tunggal.	Operasi songsang dan darab (tidak dapat diteruskan). Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat. - Pemetakan tunggal, - Pemisahan tunggal.

Iqwan

Iqwan menyelesaikan masalah membabitkan penyediaan tongkat buluh berukuran $1/2$ cm daripada buluh berukuran 4 cm dan menyediakan tongkat berukuran $2/3$ cm daripada buluh berukuran 2 cm dengan pengukuran berasaskan satu keseluruhan.

Nombor perpuluhan sebagai seunit ukuran. Bagi aktiviti membabitkan memotong tongkat buluh berukuran $1/2$ cm daripada buluh berukuran 4 cm, Iqwan menganggap $2/2$ bersamaan dengan 1 cm. Kemudiannya, beliau menukarkan $1/2$ cm ke 0.5 cm.

Pemetakan tunggal. Berikutnya, Iqwan memetak jalur kertas kepada empat bahagian sama besar saiznya dan menganggap setiap petak berukuran 1 cm. Selanjutnya, Iqwan menganggap 0.5 cm sebagai seunit ukuran bagi mengukur 4 cm secara satu-satu sehingga habis. Beliau menyatakan lapan batang tongkat berukuran 0.5 cm dapat disediakan daripada 4 cm buluh.

Penolakan berasaskan simbol pecahan. Bagi aktiviti membabitkan memotong tongkat buluh berukuran $2/3$ cm daripada buluh berukuran 2 cm dengan menganggap 1 cm sebagai $3/3$. Kemudiannya, beliau menolak $3/3$ dengan $2/3$ menghasilkan $1/3$.

Iqwan menyatakan bahawa baki buluh berukuran $\frac{1}{3}$ cm dihasilkan setelah ditolak $\frac{3}{3}$ dengan $\frac{2}{3}$. Beliau mengulangi langkah yang sama sekali lagi dan menghasilkan baki buluh $\frac{1}{3}$ cm sekali lagi.

Penambahan dan meringkaskan pecahan. Iqwan menjumlah dua baki buluh, iaitu $\frac{1}{3}$ cm dengan $\frac{1}{3}$ cm menjadi $\frac{2}{3}$ cm. Berikutnya, beliau menulis $\frac{2}{3}$ sebanyak tiga kali dan menyatakan bahawa tiga batang tongkat berukuran $\frac{2}{3}$ cm dapat disediakan daripada sebatang buluh berukuran 2 cm.

Pemetakan tunggal. Beliau menyemak penyelesaiannya dengan memetakan satu jalur kertas kepada dua bahagian sama besar saiznya, yang mana setiap bahagian dianggap sebagai 1 cm. Kemudiannya, beliau membahagikan setiap 1 cm kepada tiga bahagian sama besar saiznya. Iqwan menulis $\frac{2}{3}$ cm pada setiap dua bahagian dan beliau menyatakan bahawa tiga batang tongkat berukuran $\frac{2}{3}$ cm dapat disediakan daripada buluh berukuran 2 cm.

Ida

Ida menyelesaikan masalah yang membabitkan memotong tongkat berukuran $\frac{1}{2}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm dan memotong tongkat berukuran $\frac{2}{3}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm dengan kaedah pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat dan pemetakan tunggal.

Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat. Ida menghadapi kesukaran untuk memotong tongkat berukuran $\frac{1}{2}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm pada permulaan protokol temu duga walaupun beliau berjaya menjelaskan aktiviti memotong tongkat berukuran 2 cm daripada sebatang buluh berukuran 5 cm. Kemudiannya, beliau diminta memikirkan hubungan di antara 1 cm dan $\frac{1}{2}$ cm. Ida menganggap $\frac{1}{2}$ cm sebagai seunit ukuran bagi mengukur 4 unit 1 cm secara satu-satu sehingga habis.

Pemetakan tunggal. Beliau menggunakan satu jalur kertas yang dibahagikan kepada empat bahagian sama besar sebagai 4 cm. Berikutnya, Ida memetakan setiap unit 1 cm jalur kertas berkenaan kepada $\frac{1}{2}$ cm masing-masing. Beliau menyatakan bahawa lapan batang tongkat berukuran $\frac{1}{2}$ cm dibina daripada sebatang buluh yang berukuran 4 cm.

Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat. Ida menghadapi kesukaran untuk menyelesaikan masalah membabitkan memotong tongkat berukuran $\frac{2}{3}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm pada permulaan protokol temu duga. Ida diminta mengubah pemikirannya dengan membandingkan 1 cm dan $\frac{2}{3}$ cm. Beliau menyatakan 1 cm adalah lebih besar berbanding $\frac{2}{3}$ cm.

Pemetakan tunggal. Berikutnya, Ida memetakan satu jalur kertas kepada tiga bahagian sama besar saiznya. Beliau menganggap dua daripada tiga bahagian tersebut sebagai $\frac{2}{3}$ cm, yang mana merupakan sebatang tongkat. Seterusnya, Ida memetakan satu bahagian yang lain kepada dua bahagian yang lebih kecil, tetapi beliau tidak dapat menyatakan dua bahagian tersebut berdasarkan ukuran tongkat yang dibina.

Ida memiliki corak pemikiran yang demikian mungkin kerana beliau menggunakan pemikiran nombor bulat untuk menjustifikasikan keadaan membabitkan pecahan. Misalnya, dalam aktiviti membanding dua pecahan wajar, mentafsir rajah pelbagai berbentuk selanjur, dan pecahan tak wajar beliau menggunakan pengetahuan membilang bahan tanpa mengambil kira keseragaman saiz bahan berkenaan.

Rina

Rina menyelesaikan masalah yang membabitkan memotong tongkat berukuran $\frac{1}{2}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm dan memotong tongkat berukuran $\frac{2}{3}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm dengan kaedah operasi songsang dan darab, pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat, pemetakan tunggal, dan pemisahan tunggal.

Operasi songsang dan darab. Bagi kes membabitkan memotong tongkat berukuran $1/2$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm dengan menulis " $4 \div 1/2$ ". Kemudiannya, beliau menulis " $4 \times 2/1 = 8$ " dan menyatakan bahawa lapan batang tongkat berukuran $1/2$ cm dapat disediakan.

Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat. Rina menjelaskan penyelesaiannya dengan melukis tiga garisan pada jalur kertas bagi membentuk empat bahagian sama besar saiznya. Beliau menganggap ukuran tongkat, iaitu $1/2$ cm sebagai seunit ukuran bagi mengukur sebatang buluh yang berukuran 4 cm secara satu-satu sehingga habis. Rina menyatakan bahawa lapan batang tongkat berukuran $1/2$ cm dihasilkan daripada buluh berukuran 4 cm.

Pemetakan tunggal. Rina menggunakan kaedah yang sama bagi menyelesaikan masalah membabitkan pembentukan tongkat berukuran $2/3$ cm daripada sebatang buluh yang berukuran 2 cm. Beliau memetakkan satu jalur kertas kepada dua bahagian sama besar saiznya. Seterusnya, Rina memetakkan kedua-dua bahagian berkenaan kepada tiga bahagian masing-masing.

Pemisahan tunggal. Beliau menganggap $2/3$ cm, iaitu dua daripada tiga bahagian sebagai seunit ukuran bagi mengukur tiga petak pertama dan menganggapnya sebagai sebatang tongkat. Rina mengukur tiga petak kedua dan menganggapnya sebagai sebatang tongkat kedua. Bagi baki dua bahagian lagi, beliau mentafsir pecahannya sebagai $2/6$ daripada sebatang tongkat ketiga.

Amin

Amin menyelesaikan masalah yang membabitkan memotong tongkat berukuran $1/2$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm dan memotong tongkat berukuran $2/3$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm dengan kaedah pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat, pemetakan tunggal, dan pemisahan tunggal.

Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat. Bagi kes membabitkan memotong tongkat berukuran $1/2$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm, Amin menganggap $1/2$ cm sebagai seunit ukuran bagi mengukur buluh berukuran 4 cm secara satu-satu sehingga habis.

Pemetakan tunggal. Beliau memetakkan satu jalur kertas kepada empat bahagian sama besar saiznya. Berikutnya, Amin memetakkan setiap bahagian tersebut kepada dua bahagian sekali lagi. Beliau menyatakan bahawa lapan batang tongkat berukuran $1/2$ cm dibentuk daripada sebatang buluh berukuran 4 cm.

Bagi kes membabitkan memotong tongkat berukuran $2/3$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm, beliau memetakkan satu jalur kertas kepada dua bahagian sama besar saiznya. Amin menganggap $2/3$ cm sebagai seunit ukuran bagi mengukur sebatang tongkat yang berukuran 2 cm. Beliau memetakkan setiap bahagian berkenaan kepada tiga bahagian masing-masing.

Pemisahan tunggal. Amin melorek dua daripada tiga bahagian pertama dan menganggapnya sebagai $2/3$ cm, iaitu bersamaan dengan sebatang tongkat. Kemudiannya, beliau melorek dua daripada tiga bahagian kedua dan menganggapnya sebagai $2/3$ cm, iaitu bersamaan dengan sebatang tongkat kedua. Bagi dua bahagian yang selebihnya, Amin menganggapnya sebagai $2/3$ cm, juga bersamaan dengan sebatang tongkat ketiga.

Izan

Izan menyelesaikan masalah yang membabitkan memotong tongkat berukuran $1/2$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm dan memotong tongkat berukuran $2/3$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm dengan kaedah songsang dan darab, pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat, pemetakan tunggal, dan pemisahan tunggal.

Operasi songsang dan darab. Izan menyelesaikan masalah membabitkan memotong tongkat berukuran $1/2$ cm daripada sebatang buluh berukuran 4 cm dengan operasi songsang dan darab. Beliau menulis " $1/2 \times 4$ " dengan meringkaskan 2 dengan 4 menghasilkan 2. Walau bagaimanapun, Izan menyatakan cara itu tidak betul. Seterusnya, beliau mengubah pemikirannya dengan menjelaskan penyelesaian dengan menggunakan satu jalur kertas.

Pengukuran berasaskan seunit ukuran tongkat. Izan menganggap $1/2$ cm sebagai seunit ukuran bagi mengukur sebatang buluh berukuran 4 cm secara satu-satu sehingga habis. Izan memetakkan satu jalur kertas kepada empat bahagian sama besar saiznya. Setiap bahagian tersebut dianggap sebagai berukuran 1 cm, yang mana seluruh jalur kertas berukuran 4 cm.

Pemetakan tunggal. Izan memetakkan setiap bahagian yang dibina kepada dua bahagian yang lebih kecil. Beliau menyatakan bahawa lapan batang tongkat berukuran $1/2$ cm dapat dibina daripada sebatang buluh berukuran 4 cm.

Bagi kes membabitkan memotong tongkat berukuran $2/3$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm, beliau menggunakan corak pemikiran yang sama seperti sebelumnya iaitu menganggap ukuran tongkat sebagai unit ukuran bagi mengukur sebatang tongkat yang berukuran 2 cm secara satu-satu sehingga habis. Beliau memetakkan satu jalur kertas kepada dua bahagian sama besar saiznya. Berikutnya, Izan memetakkan setiap bahagian kepada tiga bahagian sama besar saiznya sekali lagi.

Pemisahan tunggal. Beliau menganggap dua daripada tiga bahagian sebagai $2/3$ cm, iaitu bersamaan sebatang tongkat pertama. Izan mengulangi langkah yang sama sekali lagi bagi mendapat sebatang tongkat kedua. Bagi baki dua bahagian yang diguntingkan secara berasingan, Izan menganggapnya sebagai sebatang tongkat ketiga.

Dapatan kajian menunjukkan bahawa Iqwan, Amin, dan Izan menyatakan bahawa tiga batang tongkat berukuran $3/4$ cm dapat dihasilkan daripada 2 cm buluh, manakala

Rina dan Ida tidak dapat kerana mereka menghadapi kesukaran mengenal pasti nilai pecahan bagi bahagian daripada satu keseluruhan berbeza yang dicantumkan bersama. Rina menganggap nilai pecahan bahagi dua bahagian tersebut sebagai $\frac{2}{6}$, manakala Ida pula tidak dapat menyatakan nilai pecahan. Dapatan kajian ini selari dengan Bulgar (2003), Gregg dan Gregg (2007), Perlwitz (2005) yang melaporkan bahawa peserta kajian mereka menghadapi kesukaran menginterpretasikan baki bahan yang diukur menyebabkan jawapan yang diberikan salah.

Menyelesaikan Masalah Membabitkan Bar Coklat

Semua peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan tongkat buluh dengan kaedah khusus, iaitu menggunakan kaedah pemetakan tunggal dan pemisahan tunggal. Hanya dua daripada lima orang peserta kajian, iaitu Iqwan dan Rina menyemak jawapan bagi penyelesaian mereka. Rumusan corak pemikiran peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat adalah seperti dalam Jadual 38.

Pemetakan tunggal. Kesemua peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat dengan memetakan satu jalur kertas kepada empat bahagian sama besar saiznya. Mereka menganggap satu daripada empat bahagian tersebut sebagai $\frac{1}{4}$ daripada bar coklat. Bilangan petak dibentuk dengan merujuk pada penyebut pecahan yang diwakili. Berikutnya, mereka memetakan bahagian yang diwakili oleh $\frac{1}{4}$ tadi kepada empat bahagian yang lebih kecil. Perkara yang sama berlaku dengan sebelumnya, yang mana bilangan petak dibentuk dengan merujuk pada penyebut pecahan yang diwakili.

Corak Pemikiran Peserta Kajian Menyelesaikan Masalah Membabitkan Bar Coklat

Konteks Masalah	Peserta Kajian				
	Iqwan	Ida	Rina	Amin	Izan
Bar Coklat	- Pemetakan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu, -Menggunakan operasi darab bagi menyemak jawapan.	- Pemetakan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu	- Pemetakan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu, -Menggunakan operasi darab bagi menyemak jawapan.	- Pemetakan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu	- Pemetakan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu.

Pemisahan tunggal. Semua peserta kajian memisahkan satu daripada empat bahagian yang dibentuk dan menganggap bahagian itu sebagai $1/4$, iaitu bahagian coklat kepunyaannya. Untuk mengagihkan kepada empat orang rakannya, mereka memisahkan empat bahagian yang dipetakkan daripada salah satu bahagian berkenaan secara satu-satu sehingga habis. Dalam pembahagian itu, mereka menganggap setiap orang rakannya menerima sebanyak $1/16$ daripada bar coklat tersebut.

Pendaraban simbol pecahan. Dua daripada lima orang peserta kajian, iaitu Iqwan dan Rina menggunakan kaedah songsang dan darab untuk menyemak jawapan penyelesaian mereka. Iqwan menulis " $1/4 \times 4/4 = 16/16$ " bagi memastikan 16 bahagian yang dibentuk dalam pengiraan tersebut adalah betul. Rina pula menulis " $1/4 \div 4 = 4/1 \times 4 = 16$ " bagi memastikan hasil pengagihkan petak adalah berkenaan.

Pemetakan menghasilkan beberapa bahagian bahan. Pada umumnya, semua peserta kajian menunjukkan corak pemikiran bahawa mereka mereka menggunakan idea pemetakan menghasilkan beberapa bahagian bahan dalam menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat. Empat orang rakan dianggapkan sebagai bilangan petak dan

bar coklat dianggap sebagai bahan, yang mana $\frac{1}{4}$ daripada bar coklat kepunyaannya dipetakkan kepada empat bahagian dan diagihkan secara satu-satu kepada penerima secara satu-satu sehingga habis. Dalam aktiviti itu, setiap petak dianggap menerima sebanyak $\frac{1}{16}$ daripada seluruh bar coklat.

Dapatan kajian menunjukkan semua peserta kajian mengaplikasikan pengetahuan pemetakan dan pemisahan bahan selanjar semasa menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat. Mereka dapat membentuk petak tunggal dan seterusnya komposit untuk menjelaskan nilai pecahan yang diterima oleh salah seorang rakan. Dapatan kajian ini adalah berbeza daripada Mark (2001) yang mendapati muridnya dapat memetakan bahan selanjar, tetapi tidak dapat menjelaskan makna pecahan dengan menggunakan petak komposit yang dibentuk.

Selain itu, Iqwan dan Rina mengaplikasikan pengetahuan songsang dan darab bagi membantu mereka menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan. Walau bagaimanapun, mereka tidak dapat menggunakan peraturan tersebut dengan lancar kerana terlupa tatacara operasi berkenaan. Dapatan kajian ini adalah selaras dengan Ma (1999) yang mendapati peserta kajiannya di US juga menghadapi masalah yang sama. Walau bagaimanapun, Kalder (2007) menyatakan peserta kajiannya di China berjaya menggunakan peraturan songsang dan darab dengan baik.

Menyelesaikan Masalah Membabitkan Piza

Semua peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan piza dengan kaedah khusus, iaitu menggunakan kaedah pengumpulan tunggal, pemisahan tunggal, dan pemetakan yang menghasilkan beberapa bahagian bahan. Hanya Iqwan menyemak jawapan bagi penyelesaian beliau dengan menggunakan operasi penolakan satu keseluruhan bagi menyemak penyelesaiannya. Rumusan corak pemikiran peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat adalah seperti dalam Jadual 39.

Corak Pemikiran Peserta Kajian Menyelesaikan Masalah Membabitkan Piza

Konteks Masalah	Peserta Kajian				
	Iqwan	Ida	Rina	Amin	Izan
Piza	- Pengumpulan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu, -Menggunakan operasi penolakan satu keseluruhan menyemak jawapan.	- Pengumpulan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu.	- Pengumpulan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu.	- Pengumpulan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu.	- Pengumpulan tunggal, - Pemisahan tunggal, - Pemetakan yang menghasilkan bahagian tertentu.

Pengumpulan tunggal. Semua peserta kajian menyelesaikan masalah membabitkan piza dengan mengumpul semula lapan cip kertas ke dalam empat kumpulan pasangan cip kertas. Mereka menganggap setiap pasangan cip kertas sebagai satu kumpulan berasingan. Ini menunjukkan mereka merujuk penyebut pecahan yang hendak diwakili, iaitu empat sebagai panduan untuk membentuk bilangan kumpulan.

Pemisahan tunggal. Kesemua peserta kajian mewakili 1/4 piza milik mereka dengan mengeluarkan dua daripada lapan piza yang diberikan. Mereka menganggap dua daripada lapan piza berkenaan sebagai 1/4 daripada lapan cip kertas yang diberikan. Bagi memastikan pecahan piza yang diperolehi salah seorang raknya, mereka memetakan dua piza yang mewakili 1/4 tersebut kepada dua bahagian yang lebih kecil dan seterusnya diagihkan kepada setiap orang raknya dengan sama banyak. Mereka menyatakan setiap orang raknya menerima sebanyak 1/16 piza. Dapatan kajian didapati berbeza daripada dapatan kajian Mark (2001), yang mana beliau mendapati muridnya dapat memetakan dan memisahkan bahan yang mempunyai bilangan petak

sama dengan penyebut pecahan, tetapi gagal melakukannya pada bahan diskret komposit berbentuk diskret.

Penolakan satu keseluruhan. Hanya Iqwan menggunakan kaedah penolakan satu keseluruhan untuk menyemak jawapan bagi penyelesaian yang dijalankan untuk mengenal pasti pecahan piza yang dimiliki oleh salah seorang daripada empat orang rakannya. Iqwan menulis “ $4/4 - 1/4 = 3/4$ ” menunjukkan bahawa beliau menganggap keempat-empat kumpulan piza sebagai $4/4$. Salah satu kumpulan piza yang dipisahkan merupakan $1/4$ daripada kumpulan piza berkenaan, yang mana menghasilkan baki sebanyak $3/4$ kumpulan piza.

Pemetakan menghasilkan beberapa bahagian bahan. Dalam menyelesaikan masalah membabitkan piza, peserta kajian didapati menunjukkan corak pemikiran bahawa mereka menggunakan makna bahagi pemetakan menghasilkan beberapa bahagian bahan. Dalam aktiviti berkenaan, mereka menganggap empat orang rakan sebagai bilangan petak dan dua biji piza sebagai bilangan bahan, yang mana piza tersebut dipetakan kepada dua bahagian masing-masing dan diagihkan kepada setiap petak secara satu-satu sehingga habis. Mereka juga memetakan piza lain kepada dua bahagian sama besar saiznya. Dalam pembahagian itu, setiap orang rakannya ditafsirkan menerima sebanyak $1/16$ piza.

Dalam penyelesaian masalah membabitkan bar coklat dan piza, semua peserta kajian didapati mengaplikasikan pengetahuan yang sama, perbezaannya dari konteks bahan selanjar dan diskret. Dapatan kajian ini didapati selari dengan pandangan Thompson dan Saldhana (2003) yang menyatakan peserta kajian mereka mengaplikasikan pengetahuan yang sama bagi menyelesaikan kedua-dua tugas membabitkan penggunaan bahan selanjar dan diskret.

Dapatan Kajian Lain

Terdapat beberapa dapatan kajian lain yang menyumbang kepada pemahaman tentang cara murid membina pemahaman mereka tentang pecahan, makna bahagi, dan pembahagian pecahan dihuraikan seperti berikut.

Pecahan Wajar

Bahan diskret komposit, iaitu bilangan bahan melebihi satu unit dianggapkan mempunyai bahan berlebihan yang tidak berkaitan bagi mewakili pecahan $1/m$ ($1/m$ ialah $1/2$, $1/3$, dan $2/3$). Ini mungkin kerana pengetahuan tentang bahan selanjar adalah lebih dominan berbanding pengetahuan tentang bahan diskret.

Antara bentuk pemikiran yang dimiliki oleh peserta kajian ialah melanjutkan pengetahuan bahan selanjar dalam konteks bahan diskret. Misalnya, peserta kajian menyusun enam cip kertas bagi membentuk sebuah bulatan, yang mana setiap cip kertas dianggapkan sebagai satu bahagian pada bahan berbentuk selanjar.

Pecahan Tak Wajar

Peserta kajian menukar pecahan tak wajar ke nombor bercampur sebelum mewakilkannya. Mereka memetakan bahan selanjar berasaskan penyebut bagi pecahan wajar yang terdapat pada nombor bercampur tersebut. Corak pemikiran yang dimiliki oleh peserta kajian menunjukkan bahawa mereka mengetahui nombor bulat yang terdapat pada nombor bercampur merujuk bilangan satu keseluruhan. Sebaliknya bagi bahan diskret, mereka menganggap nombor bulat yang terdapat pada nombor bercampur merujuk bilangan objek dari konteks nombor bulat. Malah, pecahan wajar yang terdapat pada nombor bercampur juga dianggapkan sebagai bilangan objek dari konteks nombor bulat.

Makna Bahagi

Murid mengira pembahagian di antara dua nombor bulat secara pembahagian dalam bentuk lazim. Dalam memberikan makna bahagi, mereka menganggap “pembahagi” sebagai bilangan petak dan “nombor dibahagi” sebagai bilangan bahan untuk diagih kepada petak berkenaan. Pengetahuan tentang mengagihkan bahan kepada petak dilanjutkan dalam tugas berbentuk “nombor bulat bahagi pecahan” dan “pecahan bahagi nombor bulat”, yang mana nombor bulat dianggap sebagai bilangan petak, manakala pecahan sebagai bilangan bahan untuk diagihkan.

Walau bagaimanapun, semua peserta kajian menyelesaikan tugas jus oren yang membabitkan “pecahan bahagi nombor bulat” dan tongkat buluh yang membabitkan “nombor bulat bahagi pecahan” dan “pecahan bahagi nombor bulat” dengan menganggap “pembahagi” sebagai pengukur dan “nombor dibahagi” sebagai bahan yang diukur oleh pengukur, tetapi bukannya merujuk pada “nombor bulat” sebagai petak dan “pecahan” sebagai bilangan bahan untuk diagihkan. Corak pemikiran ini menyebabkan mereka menghadapi kesukaran untuk menjelaskan makna bahagi membabitkan “pecahan bahagi pecahan”. Mereka mengatasi kesukaran tersebut dengan menggunakan bahan berbentuk diskret bagi mewakili pecahan. Walau bagaimanapun, peserta kajian tidak dapat menjelaskan hasil bahagi dengan menggunakan bahan tersebut. Corak pemikiran murid ini mungkin kerana bahan diskret adalah terpisah antara satu sama lain menyebabkan sukar bagi murid mentafsirnya hasil bahagi dari perspektif satu keseluruhan.

Penyelesaian Masalah

Peserta kajian menggunakan pengetahuan penambahan nombor bulat dalam menyelesaikan masalah membabitkan jus oren. Beliau menunjukkan “ $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ” dan mengatakan bahawa $\frac{6}{8}$ kurang daripada 2 l jus oren kerana $\frac{8}{8}$ adalah bersamaan dengan 2 l jus oren. Walau bagaimanapun, beliau tahu menolak dua pecahan bagi

menjelaskan makna pecahan wajar. Misalnya, beliau menunjukkan " $4/4 - 3/4 = 1/4$ " semasa mewakili pecahan wajar dengan menggunakan bahan selang. Bentuk pemikiran peserta kajian berlaku mungkin disebabkan beliau disebabkan pengetahuan beliau tentang pecahan tak wajar menggunakan simbol masih tidak berdaya maju. Ini adalah kerana " $3/4 + 3/4 = 6/4$ ", yang mana hasil tambah ialah pecahan tak wajar yang telah memberi kesukaran bagi beliau untuk mentafsirnya sebelum itu.

Selain itu, peserta kajian juga menggunakan operasi tambah dan tolak dalam menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dan tongkat buluh. Beliau tidak menghadapi kesukaran dalam menjelaskan penyelesaiannya kerana melibatkan nombor perpuluhan yang mempunyai persamaan dengan penambahan dan penolakan nombor bulat.

Implikasi Kajian

Kajian ini memberi implikasi kepada beberapa aspek yang tiga daripadanya adalah seperti amalan bilik darjah, kurikulum matematik, dan kajian masa depan.

Amalan Bilik Darjah

Epistemologi yang mendasari kajian ini ialah murid membina pengetahuan pecahan wajar, pecahan tak wajar, makna bahagi, dan kaedah khusus bagi menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan dan pengetahuan ini dapat dimodelkan dengan mengkoordinasikan skim tindakan dan skim operasi. Dalam perspektif ini, proses pengajaran dan pembelajaran pembahagian pecahan merujuk bimbingan yang diberikan kepada kanak-kanak supaya mereka dapat membina skim pembahagian pecahan sendiri, bukannya menyalurkan pengetahuan guru kepada mereka.

Bagi memberi bimbingan yang sesuai, guru perlu mengetahui bentuk pemikiran murid, tidak kira betapa primitif bentuk pemikiran tersebut sekali pun, supaya aktiviti yang dirancang dapat membantu murid mengubah suai dan membina pengetahuan

baru (Steffe, 2009). Dalam kajian ini, beberapa bentuk pemikiran dan corak pemikiran murid tentang pecahan, makna bahagi, dan pembahagian pecahan telah dijelaskan. Walaupun pemikiran tersebut bukan suatu model yang dimiliki oleh murid, tetapi ia adalah bentuk pemikiran berdaya maju yang dapat memberi gambaran tentang pemikiran murid secara umum berkaitan pembahagian pecahan (Steffe & Cobb, 1984). Bentuk dan corak pemikiran itu juga penting dalam membantu guru Tingkatan Satu mentafsir tingkah laku murid semasa mereka menghadapi kesukaran menyelesaikan tugas membabitkan pecahan wajar, pecahan tak wajar, makna bahagi, dan penyelesaian masalah membabitkan pembahagian pecahan.

Reka bentuk pengajaran guru seharusnya mengambil kira bentuk pemikiran dan pengetahuan pembahagian pecahan milik murid. Adalah tidak wajar bagi guru mengandaikan bahawa murid membina pengetahuan pembahagian pecahan berasaskan kelaziman dalam pengetahuan guru. Ini bermaksud, perancangan pengajaran dan pembelajaran seharusnya dirancang berasaskan inferens guru tentang cara murid belajar berdasarkan pengetahuan sedia ada mereka. Misalnya, penggunaan bahan selanjat tunggal dan bahan diskret tunggal bagi mewakili $\frac{2}{3}$ adalah berbeza di antara seseorang murid dengan murid lain berbanding penggunaan bahan selanjat komposit dan bahan diskret komposit. Murid yang matang pemikiran mereka dapat mengembangkan pengetahuan mereka dengan cepat. Walau bagaimanapun, murid yang sederhana matang pemikiran pula memerlukan beberapa siri bahan bagi membimbing mereka membina pengetahuan dengan lebih terancang. Ini adalah kerana tindakan murid melakukan operasi adalah berbeza dari segi kualitinya dari perspektif mereka sendiri.

Perubahan paradigma guru daripada pengetahuan mereka ke pengetahuan murid tidak dapat dapat membantu meningkatkan proses pengajaran dan pembelajaran, kecuali guru dapat menyediakan situasi instruksional yang sesuai. Ini seterusnya

memberi kuasa kepada guru mereka bentuk pengajaran dan pembelajaran mereka dan bukan bergantung pada buku teks semata-mata.

Kurikulum Matematik

Kurikulum matematik bagi topik pembahagian pecahan Tingkatan Satu memberi penekanan pada operasi menggunakan simbol pecahan (KPM, 2002). Walau bagaimanapun, kelima-lima orang murid tidak dapat menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan dengan tepat seperti hasrat kurikulum. Malah, Iqwan dapat menggabungkan pengetahuan pecahan, nombor bulat, makna bahagi, dan operasi bagi menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian pecahan dengan bantuan lukisan atau bahan diskret dan selanjar.

Oleh itu, penumpuan kurikulum pada pengiraan operasi semata-mata membataskan pemikiran mereka untuk memahami situasi membabitkan pembahagian pecahan. Dalam tugas membabitkan jus oren misalnya, Rina hanya menggunakan rajah berbentuk selanjar yang dipetakan bagi mengukur jus oren. Beliau tidak yakin dalam menggunakan kaedah songsang dan darab bagi menjelaskan penyelesaian membabitkan pembahagian pecahan. Justeru, penggunaan unit tunggal dan komposit wajar dijadikan salah satu aspek dalam pembelajaran pembahagian pecahan oleh penggubal kurikulum.

Bagi membolehkan murid membina pengetahuan mereka tentang pembahagian pecahan, mereka perlu diberikan tugas yang bukan sahaja berfokus pada operasi tambah, tolak, darab, dan bahagi, malah juga berunsur aplikasi dalam kehidupan seharian. Misalnya, tugas membabitkan jus oren, tongkat buluh, bar coklat, dan piza memberi peluang kepada murid membina pengetahuan mereka, di samping berfikir dari perspektif kehidupan sebenar.

Kajian Masa Depan

Kajian ini bertujuan mengenal pasti cara murid membina pengetahuan tentang pecahan, makna bahagi, dan pembahagian pecahan, serta mempelajari sifat semula jadi murid membina dan mengubah suai pengetahuan sedia ada mereka. Pengubahsuaian merujuk usaha murid mengatasi gangguan dengan mengasimilasi dan mengakomodasi skim pembahagian pecahan sedia ada mereka (von Glasersfeld, 1987). Antara pengubahsuaian yang dilakukan oleh peserta kajian sepanjang temu duga klinikal berlangsung ialah pemikiran berasaskan satu keseluruhan, pemikiran berasaskan nombor lain berkaitan pecahan, pemikiran berasaskan operasi, dan pemikiran berasaskan pemetakan tunggal.

Pemikiran berasaskan satu keseluruhan. Antara kesukaran yang dihadapi oleh peserta dalam menyelesaikan masalah membabitkan jus oren ialah menyukat 2 l jus oren dengan menggunakan penyukat bersaiz $\frac{3}{4}$ l. Peserta kajian mengubah suai pemikiran dengan menyukat 1 l jus oren dengan penyukat bersaiz $\frac{3}{4}$ l sebanyak dua kali bagi menjustifikasikan penyelesaian mereka. Strategi ini membantu mereka kerana 1 l dianggapkan setara dengan $\frac{4}{4}$ l, iaitu satu keseluruhan bagi pecahan “perempat”.

Dalam masalah membabitkan tongkat buluh pula, peserta kajian juga menghadapi kesukaran dalam menyelesaikan masalah membabitkan memotong tongkat berukuran $\frac{2}{3}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 2 cm. Peserta kajian mengubah suai pemikiran mereka dengan mengukur tongkat $\frac{2}{3}$ cm daripada sebatang buluh berukuran 1 cm sebanyak dua kali bagi menjustifikasikan penyelesaian mereka. Strategi ini membantu mereka kerana 1 cm dianggapkan setara dengan $\frac{3}{3}$ cm, iaitu satu keseluruhan bagi pecahan “pertiga”.

Pemikiran berasaskan nombor lain berkaitan pecahan. Dua nombor lain berkaitan pecahan digunakan oleh peserta kajian bagi menjustifikasikan penyelesaian mereka, iaitu nombor persepuluh dan perseratus. Misalnya, mereka menganggap $\frac{3}{4}$ l

sebagai $0.75\ l$ yang ditambahkan sebanyak dua kali bagi menghasilkan $1.50\ l$ jus oren. Corak pemikiran ini dapat ditafsirkan bahawa mereka mengukur $2\ l$ jus oren secara terus tanpa menukarnya ke $1\ l$ terlebih dahulu. Penambahan sebanyak $0.75\ l$ seterusnya menghasilkan $2.25\ l$, iaitu melebihi $2\ l$ jus oren. Peserta kajian menyedari terdapat lebihan jus oren sebanyak $0.25\ l$, dan mereka mengukur jus oren berkenaan menggunakan cawan berukuran $0.75\ l$ bagi menjustifikasikan penyelesaiannya.

Dalam masalah membabitkan tongkat buluh pula, peserta kajian menukar $\frac{3}{4}\ cm$ buluh ke $0.75\ cm$ dan $\frac{1}{2}\ cm$ tongkat sebagai $0.5\ cm$, sebelum mengukur ukuran tersebut antara satu sama lain. Ini menunjukkan bahawa peserta kajian mengubah suai pemikiran mereka bagi menyelesaikan masalah membabitkan tongkat buluh.

Pemikiran berasaskan pemetakan tunggal. Peserta kajian mengubah suai pemikiran mereka daripada konteks nombor bulat atau nombor perpuluhan kepada pemikiran pemetakan tunggal. Misalnya, baki sebanyak $0.5\ l$ jus oren disukat oleh murid menggunakan cawan yang dipetakkan kepada tiga bahagian sama besar saiznya. Murid melabelkan $0.25\ l$ pada petak pertama, $0.50\ l$ pada petak kedua, dan $0.75\ l$ pada petak ketiga.

Bagi masalah membabitkan memotong tongkat berukuran $\frac{1}{2}\ cm$ daripada sebatang buluh berukuran $4\ cm$ pula, mereka menukar $\frac{1}{2}\ cm$ ke $0.5\ cm$. Seterusnya $4\ cm$ buluh itu dipetakkan sebanyak lapan kali dan melabelkan setiap petak dengan $0.5\ cm$.

Pemikiran Berasaskan Operasi. Tidak semua peserta kajian menggunakan operasi tambah, tolak, darab, dan bahagi dalam keempat-empat tugas penyelesaian masalah membabitkan pembahagian pecahan. Operasi tambah dan tolak lebih banyak digunakan oleh peserta kajian dalam menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dan tongkat buluh, manakala operasi darab dan bahagi pula lebih banyak digunakan oleh peserta kajian dalam menyelesaikan membabitkan bar coklat dan piza.

Peserta kajian dapat melakukan operasi tambah dan tolak yang betul dan sesuai dalam membantu mereka menyelesaikan masalah membabitkan jus oren dan tongkat buluh. Walau bagaimanapun, mereka tidak yakin dalam melakukan operasi songsang dan darab bagi pembahagian pecahan. Oleh itu, mereka mengubah suai pemikiran dengan menggunakan kaedah pemetakan bagi menyelesaikan masalah membabitkan bar coklat dan piza.

Bagi membolehkan pemahaman tentang proses pembinaan pengetahuan yang lebih menyeluruh bagi peserta kajian, suatu kajian yang mempunyai metodologi yang membabitkan penglibatan murid dalam jangka masa yang lebih panjang diperlukan. Walaupun kajian ini menggunakan temu duga klinikal sebagai cara mengumpul data, namun begitu, pendekatan ini masih tidak dapat memperoleh data yang lebih terperinci berbanding metodologi yang membabitkan pengajaran dan pembelajaran murid dalam tempoh tertentu.

Memandangkan kajian eksperimen dari perspektif realis mengutamakan perbandingan pencapaian di antara murid dalam kumpulan eksperimen dan kumpulan kawalan, jadi metodologi tersebut tidak dapat menjelaskan proses pemikiran murid secara spesifik. Oleh itu, dicadangkan kajian berasaskan metodologi eksperimen dijalankan pada murid Tingkatan Satu dalam tempoh tertentu dijalankan supaya proses pembinaan pengetahuan yang lebih lengkap diperoleh.