PENAAKULAN PERKADARAN DALAM KALANGAN MURID TAHUN LIMA TENTANG NISBAH DAN KADARAN

FAZURA BINTI MOHD NOOR

TESIS DISERAHKAN SEBAGAI MEMENUHI KEPERLUAN BAGI IJAZAH
DOKTOR FALSAFAH

FAKULTI PENDIDIKAN
UNIVERSITI MALAYA
KUALA LUMPUR

2018

UNIVERSITI MALAYA

<u>PERAKUAN KEASLIAN PENULISAN</u>

Nama: **FAZURA BINTI MOHD NOOR**
No. Matrik: **PHA 120038**
Nama Ijazah: **DOKTOR FALSAFAH**
Tajuk Kertas Projek/Laporan Penyelidikan/Disertasi/Tesis ("Hasil Kerja ini"):

PENAAKULAN PERKADARAN DALAM KALANGAN MURID TAHUN LIMA TENTANG NISBAH DAN KADARAN

Bidang Penyelidikan: **PENDIDIKAN MATEMATIK**

Saya dengan sesungguhnya dan sebenarnya mengaku bahawa:

(1) Saya adalah satu-satunya pengarang/penulis Hasil Kerja ini;

(2) Hasil Kerja ini adalah asli;

(3) Apa-apa penggunaan mana-mana hasil kerja yang mengandungi hakcipta telah dilakukan secara urusan yang wajar dan bagi maksud yang dibenarkan dan apa-apa petikan, ekstrak, rujukan atau pengeluaran semula daripada atau kepada mana-mana hasil kerja yang mengandungi hakcipta telah dinyatakan dengan sejelasnya dan secukupnya dan satu pengiktirafan tajuk hasil kerja tersebut dan pengarang/penulisnya telah dilakukan di dalam Hasil Kerja ini;

(4) Saya tidak mempunyai apa-apa pengetahuan sebenar atau patut semunasabahnya tahu bahawa penghasilan Hasil Kerja ini melanggar suatu hakcipta hasil kerja yang lain;

(5) Saya dengan ini menyerahkan kesemua dan tiap-tiap hak yang terkandung di dalam hakcipta Hasil Kerja ini kepada Universiti Malaya ("UM") yang seterusnya mula dari sekarang adalah tuan punya kepada hakcipta di dalam Hasil Kerja ini dan apa-apa pengeluaran semula atau penggunaan dalam apa jua bentuk atau dengan apa juga cara sekalipun adalah dilarang tanpa terlebih dahulu mendapat kebenaran bertulis dari UM;

(6) Saya sedar sepenuhnya sekiranya dalam masa penghasilan Hasil Kerja ini saya telah melanggar suatu hakcipta hasil kerja yang lain sama ada dengan niat atau sebaliknya, saya boleh dikenakan tindakan undang-undang atau apa-apa tindakan lain sebagaimana yang diputuskan oleh UM.

Tandatangan Calon Tarikh:

Diperbuat dan sesungguhnya diakui di hadapan,

Tandatangan Saksi Tarikh:
Nama:
Jawatan:

Tandatangan Saksi Tarikh:
Nama:
Jawatan:

ABSTRAK

Kajian ini yang berlandaskan konstruktivisme radikal dan perspektif matematik bertujuan untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran tentang nisbah dan kadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima. Secara khusus, kajian ini bertujuan untuk mengenal pasti bagaimana murid membanding dan menyusun pecahan, membanding nisbah, membuat hubung kait antara kuantiti, dan menyatakan implikasi bagi perubahan kuantiti. Instrumen kajian terdiri daripada 18 tugasan, tiga daripadanya merupakan tugasan membanding dan menyusun pecahan, manakala 15 tugasan membabitkan dua jenis masalah penaakulan perkadaran, iaitu masalah menentukan nilai dan masalah membandingkan nisbah. Data bagi kajian ini merangkumi maklumat secara lisan dan bukan lisan yang dikumpulkan dari tujuh orang murid Tahun Lima dalam lima sesi temu bual klinikal. Semua temu bual dirakamkan secara audio dan video dan mengambil masa selama 30 minit hingga 40 minit bagi setiap sesi. Penganalisisan data membabitkan lima peringkat, iaitu transkripsi data, pembersihan data, analisis kajian kes, pengekodan dan tema, dan analisis merentas kes. Dapatan kajian menunjukkan penaakulan perkadaran yang dimiliki murid membabitkan beberapa idea. Pertama, murid menggunakan *idea pecahan setara* dan *idea subkonstruk pecahan bahagian-keseluruhan* dan *hasil bahagi* dalam membuat perbandingan melibatkan pecahan dan nisbah. *Idea nisbah antara* dan *nisbah dalaman* secara multiplikatif digunakan dalam membuat hubung kait antara kuantiti, yang mana *idea nisbah antara* dikaitkan dengan pemikiran unitari. Dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti, murid menggunakan *idea kovarians* dan *idea invarians*. Seterusnya, kajian ini mendapati terdapat peralihan daripada *hubungan secara penambahan kepada hubungan secara multiplikatif* semasa murid menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran. Kajian ini turut membincangkan implikasi kepada amalan pendidikan dengan mencadangkan penggubal kurikulum matematik sekolah rendah memperluaskan standard pembelajaran dalam kurikulum standard sekolah

rendah. Selain itu, konsep pecahan haruslah diintegrasikan dalam pengajaran dan pembelajaran nisbah dan kadaran. Kajian ini juga memberi implikasi teori yang signifikan kerana dapat menggambarkan secara mendalam tentang penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran menggunakan kerangka konsep yang dibina.

PROPORTIONAL REASONING AMONG YEAR FIVE PUPILS OF RATIO AND PROPORTIONS

ABSTRACT

This study is based on radical constructivism and mathematical perspective aimed to identify the proportional reasoning of ratio and proportion held by Year Five pupils. Specifically, this study aims to identify how pupils compare and order fractions, compare ratios, developing relationship between the quantities, and state the implications of changes in the quantities. The instrument comprises 18 tasks, three of the tasks are compare and order fractions, while 15 tasks involve two types of proportional reasoning problems, namely the missing value problems and comparing ratios problems. Data for this study include verbal and nonverbal information collected from seven Year Five pupils in five clinical interviews. All interviews were audio and video recorded for 30 minutes to 40 minutes per session. The data analysis involves five stages, namely, data transcription, data cleaning, analysis of case studies, coding and themes, and cross-case analysis. The results showed that pupils do have proportional reasoning involving several ideas. First, pupils use *the idea of equivalent fractions* and *idea of fractions subconstruct part-whole* and *quotient* in making comparisons involving fractions and ratios. The *idea of the between ratios and within ratios* by multiplicative is used in developing the relationship between the quantities of which the *idea of the between ratios* is associated with *unitary thinking*. In explaining the implications of the changes in quantities, pupils use the idea of *covariance* and *invariance*. The study also found that there is a transition from the *additive relationship to the multiplicative relationship* during solving proportional reasoning problems related to ratios and proportions. This study also discusses the implications on education practices by suggesting the mathematics curriculum developers to widen the learning standard in the primary school curriculum. In addition, fractional concepts should be integrated in teaching and learning ratio and proportion. This study also implies significant theoretical implications as it can illustrate

in depth the proportional reasoning of ratio and proportion using the conceptual framework constructed.

PENGHARGAAN

Dengan nama Allah Yang Maha Pemurah lagi Maha Mengasihani. Selawat dan salam ke atas junjungan Nabi Muhammad s.a.w serta keluarga dan para sahabat baginda sekalian. Alhamdulillah, setinggi kesyukuran dipanjatkan kepada Allah s.w.t atas petunjuk, limpah kurnia, dan keizinan-Nya, saya telah berjaya menyiapkan tesis ini.

Jutaan penghargaan dan terima kasih saya ucapkan kepada penyelia, Prof. Madya Datin Dr. Sharifah Norul Akmar bin Syed Zamri dan Dr. Leong Kwan Eu yang bersusah payah mengorbankan masa, tenaga, memberi galakan, teguran, dan tunjuk ajar dari peringkat awal penulisan sehingga ke peringkat akhir selama beberapa tahun dalam menyiapkan tesis kedoktoran ini.

Penghargaan terima kasih tidak terhingga khas kepada suami tercinta, Mohd Kamal Pakhrul Hisham bin Ismail yang sentiasa menyokong segala usaha yang saya lakukan di samping memberikan bantuan dari pelbagai aspek dalam menjayakan tesis ini. Tanpa kesanggupan beliau memikul tanggung jawab menguruskan keluarga sepanjang pengajian ini, nescaya penulisan tesis ini tidak akan terhasil. Tidak ketinggalan, ucapan terima kasih kepada anak tersayang, Sarah Hani dan Yusuf kerana sentiasa bersabar dengan kesibukan ibu. Semoga kejayaan ibu menjadi inspirasi kepada kamu berdua untuk terus belajar ke tahap PhD pada masa depan. Dalam pada itu, saya juga ingin mengucapkan jutaan terima kasih kepada bonda Kalsom binti Osman dan ayahanda Mohd Noor bin Wahid, kerana sentiasa berdoa, memberi sokongan, dan motivasi agar menyiapkan penulisan tesis ini. Tidak dilupakan juga ucapan terima kasih tidak terhingga buat rakan seperjuangan yang banyak memberikan nasihat, semangat, dan dorongan. Allah sahaja yang dapat membalas jasa kalian semua.

Seterusnya, saya ingin merakamkan ucapan setinggi-tinggi terima kasih kepada pihak Kementerian Pelajaran Malaysia kerana memberikan peluang kepada saya melanjutkan pelajaran ke peringkat Doktor Falsafah. Juga penghargaan kepada Bahagian Perancangan

dan Penyelidikan Pendidikan (EPRD), Jabatan Pelajaran Wilayah Persekutuan, guru besar, guru, dan murid di Wilayah Persekutuan Kuala Lumpur yang terlibat dalam kajian ini kerana membolehkan data dikumpulkan dengan jayanya.

KANDUNGAN

Bab 2 Tinjauan Literatur

Bab 3 Metodologi Kajian

Bab 4 Hasil Kajian

Bab 5 Perbincangan, Kesimpulan, Dan Implikasi

SENARAI RAJAH

SENARAI JADUAL

SENARAI SINGKATAN

KPM	Kementerian Pendidikan Malaysia
PISA	*Programme for International Student Assessments*
KBSR	Kurikulum Bersepadu Sekolah Rendah
KSSR	Kurikulum Standard Sekolah Rendah
FPN	Falsafah Pendidikan Negara
CCSS-M	*Core State Standards for Mathematics*
TIMSS	*Trends in International Mathematics and Science Study*
NAEP	*National Assessment o f Educational Progress*
PPPM	Pelan Pembangunan Pendidikan Malaysia
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
UPSR	Ujian Penilaian Sekolah Rendah
EPRD	Bahagian Perancangan dan Penyelidikan Dasar Pendidikan
PKSR	Penilaian Kendalian Sekolah Rendah

SENARAI LAMPIRAN

Bab 1 Pengenalan

Latar Belakang

Pelan Pembangunan Pendidikan Malaysia 2013 - 2025 menyatakan murid bukan sahaja perlu dilengkapi dengan pengetahuan dalam pelbagai bidang, malah harus mempunyai kemahiran mengaplikasikan pengetahuan tersebut dalam situasi harian. Salah satu kemahiran kognitif yang perlu dikuasai oleh murid adalah kemahiran penyelesaian masalah dan penaakulan yang merangkumi keupayaan meramal masalah dan mendekati isu secara kritis, logik, induktif, dan deduktif bagi mencari penyelesaian, dan akhirnya membuat keputusan (Kementerian Pendidikan Malaysia, 2012). Penekanan kepada murid tentang penaakulan dan mengemukakan hujah atau justifikasi dalam pembelajaran matematik akan menghasilkan pemahaman matematik dan tidak hanya merupakan satu prosedur atau instrumental (Ball & Bass, 2003; Bieda, Ji, Drwencke, & Picard, 2013), malah dapat mengembang dan mengekspresikan pandangan murid tentang pelbagai fenomena (*National Council of Teachers Of Mathematics*, 2014).

Walaupun keputusan peperiksaan awam menunjukkan peningkatan berterusan terhadap prestasi murid (Kementerian Pendidikan Malaysia, 2012), namun begitu adalah penting membandingkan sistem pendidikan Malaysia berpandukan tanda aras antarabangsa bagi memastikan bergerak seiring dengan pembangunan pendidikan antarabangsa. Perbandingan dalaman tidak lagi memadai bagi memastikan daya saing di pentas dunia. Dalam tempoh dua dekad lepas, pentaksiran antarabangsa telah muncul sebagai satu kaedah perbandingan langsung tentang kualiti keberhasilan pendidikan yang merentas negara dan sistem. Salah satu pentaksiran ini tertumpu kepada matematik yang menguji kemahiran kognitif berkaitan aplikasi secara berkesan. Sebagai contoh, dalam tahap matematik lanjutan, *Programme for International Student Assessments* (PISA) menetapkan agar murid dapat membuat interpretasi maklumat yang lebih kompleks dan mengolah sebilangan langkah pemprosesan serta boleh menunjukkan keupayaan berfikir bagi mengenal pasti strategi penyelesaian yang sesuai, dan mempamerkan proses kognitif aras tinggi untuk menjelaskan dan menjustifikasi keputusan yang dibuat.

Maka Kementerian Pendidikan Malaysia (KPM) mendapati wujudnya keperluan untuk melakukan transformasi kurikulum sekolah rendah sebagai satu usaha penambahbaikan dalam sistem pendidikan negara terutamanya, supaya kurikulum persekolahan memenuhi keperluan dan cabaran semasa serta akan datang. Transformasi Kurikulum Bersepadu Sekolah Rendah (KBSR) kepada Kurikulum Standard Sekolah Rendah (KSSR) merupakan penyusunan semula dan penambahbaikan kurikulum persekolahan rendah sedia ada. Tujuan transformasi adalah untuk memastikan murid dibekalkan dengan pengetahuan, kemahiran, dan nilai yang relevan dengan keperluan semasa bagi menghadapi cabaran abad ke-21. Berbeza dengan KBSR yang memberi penekanan 3M (membaca, menulis, dan mengira), KSSR menambah satu lagi elemen dalam pembelajaran murid, iaitu menaakul menjadikan kurikulum berfokus 4M (membaca, menulis, mengira, dan menaakul).

Di Malaysia matematik merupakan salah satu mata pelajaran teras yang wajib dipelajari semua murid dari peringkat sekolah rendah hingga sekolah menengah. Pembelajaran matematik sekolah rendah mengambil masa selama enam tahun berpandukan KSSR dan berteraskan Falsafah Pendidikan Negara (FPN). Empat bidang pembelajaran matematik KBSR, iaitu nombor, ukuran, bentuk dan ruang, dan statistik telah digubal bagi penambahbaikan dalam KSSR. Kandungan KSSR matematik turut dirangkum dalam empat bidang pembelajaran, iaitu nombor dan operasi, sukatan dan geometri, perkaitan dan algebra, dan statistik dan kebarangkalian. Satu bidang pembelajaran baru telah diperkenalkan buat pertama kali di peringkat sekolah rendah, iaitu *perkaitan dan algebra*. Ini selari dengan standard kandungan pembelajaran matematik yang dikemukakan oleh *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSS-M, 2010) dan NCTM, 2014) meliputi nombor dan operasi, algebra, geometri, pengukuran, dan analisis data dan kebarangkalian, yang mana setiap satu mempunyai objektif tertentu mengikut gred.

Tumpuan pembelajaran matematik sekolah rendah bukan sahaja melibatkan penguasaan konsep asas nombor dan kemahiran asas semata-mata, tetapi apa yang lebih utama adalah murid berkeupayaan melakukan proses menaakul, membuat perwakilan, menyelesaikan masalah, membuat perkaitan, dan berkomunikasi dalam matematik (KPM, 2012) seterusnya mengaplikasi dalam kehidupan harian secara efektif. Secara tradisional, matematik di sekolah kerap dilihat sebagai satu proses yang melibatkan aritmetik, kelancaran dalam pengiraan, menekankan kemahiran, dan prosedur diikuti dengan prosedur bagi algebra (Blanton et al., 2007). Dalam aritmetik, beberapa nombor diproses sama ada secara penambahan, penolakan, pendaraban, atau pembahagian langkah demi langkah untuk menjana satu nombor tunggal, iaitu jawapan akhir bagi pengiraan. Pembelajaran aritmetik sering diajar secara berasingan dengan idea matematik lain yang berkaitan dan ini menghalang murid berfikir secara matematik sekaligus mengakibatkan kesukaran mempelajari algebra di peringkat menengah (Bush & Karp, 2013; Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Kieran, 2004).

Blanton dan Kaput (2003) mencadangkan guru "mengalgebrakan' bahan kurikulum semasa, iaitu mentransformasikan aktiviti aritmetik dan masalah berayat daripada pengiraan jawapan tunggal kepada memberi peluang murid menentukan pola, membuat generalisasi tentang fakta dan hubungan matematik, dan memberi justifiksi. Cadangan ini turut dikemukakan oleh Harel (2008) dan Van de Walle, Karp, dan Bay-Williams (2010), yang mana pembelajaran matematik perlu melibatkan murid mengenal pasti dan meneroka pola, membuat andaian, dan menggunakan heuristik bagi menyelesaikan masalah bukan rutin. Selain itu, murid juga perlu diberi galakan dan peluang untuk berbincang atau menjelaskan mengapa sesuatu penyelesaian masalah yang ditunjukkan adalah betul. Blanton dan Kaput (2003) turut mencadangkan guru menggunakan teknik penyoalan berkesan sebagai cara untuk mengembangkan pemikiran murid, seperti berikut: (a) apa yang menyebabkan kamu berfikir demikian?; (b) bagaimana kamu tahu jawapan ini betul?; (c) adakah cara ini sahaja yang boleh digunakan?; dan (d) mengapa kamu buat begini dan bukan begitu?

Oleh itu, pembelajaran algebra di peringkat sekolah rendah tidak boleh dipandang sambil lewa kerana selain menonjolkan keupayaan berfikir murid (Lins & Kaput, 2004; Stephens, Blanton, Knuth, Isler, & Gardiner, 2015) dan bagaimana murid menghubung kait antara aritmetik dan algebra (Russell, Schifter, & Bastable, 2011) melalui aktiviti berkaitan algebra yang disediakan di sekolah rendah, pembelajaran algebra di peringkat sekolah rendah juga merupakan persediaan pembelajaran algebra di peringkat lebih tinggi (Blanton, 2008; Kaput, 2008; Russell et al., 2011). Sehubungan itu, langkah KPM menambah bidang pembelajaran perkaitan dan algebra dalam kurikulum matematik sekolah rendah adalah sangat bertepatan.

Kajian lepas berkaitan pembelajaran matematik di peringkat sekolah rendah banyak tertumpu kepada penguasaan konsep asas nombor dan empat operasi asas aritmetik (Hiebert & Wearne, 1986; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Murray, Olivier, & Human, 1991; Ramani & Siegler, 2008; Sherin & Fuson, 2005; Squire, Davies, & Bryant, 2004) dan kurang memberi tumpuan dalam aspek penyelesaian masalah, penaakulan dan justifikasi, dan berkomunikasi dalam matematik (Ball & Bass, 2000; Gresens, 2011; Lamon, 2012; Lobato & Ellis, 2010). Walaupun murid didapati mudah menyelesaikan masalah rutin dengan pantas, namun mereka menghadapi kesukaran dalam menyelesaikan masalah terutama masalah bukan rutin (Kilpatrick et al., 2001) yang memerlukan murid menggunakan kemahiran menaakul. Murid menghadapi masalah untuk memulakan penyelesaian masalah disebabkan kebiasaan mereka membuat latihan yang hanya memerlukan menghafal rumus dan mengingat kembali prosedur penyelesaian (Lara Roth, 2006) tanpa memahami mengapa perlu berbuat demikian. Untuk menyelesaikan masalah, murid bukan sahaja perlu tahu fakta dan prosedur, tetapi harus sedar bagaimana, mengapa, dan bila mahu menggunakan fakta dan prosedur dengan berkesan dalam proses menyelesaikan masalah serta boleh memberi justifikasi terhadap setiap aktiviti matematik yang dilakukan.

Kemahiran menyelesaikan masalah dan menaakul dapat membina pemahaman baru, mengaplikasi dan menyesuaikan pengetahuan dan strategi, membuat refleksi terhadap proses berfikir dan menjadikan murid lebih kreatif (Artut & Pelen, 2015; CCSS-M, 2010; Kilpatrick & Swafford, 2002; Tall, 1991). Malangnya pembelajaran matematik yang berfokuskan pengiraan cepat, jawapan yang tepat, penggunaan formulasi yang berulang, dan hanya sebagai persiapan untuk peperiksaan (Ndalichako, 2013; Oser & Baeriswyl, 2001; Schoenfeld, 2004) sahaja tidak memberi apa-apa makna kepada murid tanpa penekanan kemahiran menaakul. Oleh itu pembelajaran matematik di peringkat sekolah rendah harus memfokuskan aspek menaakul, kerana selain membekalkan pengetahuan dan kemahiran matematik dalam pelbagai konteks, ia juga dapat membantu murid dalam kehidupan harian.

Pernyataan Masalah

Prinsip dan standard yang ditetapkan oleh NCTM (2000) menegaskan bahawa "Program pengajaran yang bermula dari peringkat prasekolah hingga Gred 12 harus membolehkan semua murid: (a) menyedari kepentingan penaakulan dan pembuktian sebagai aspek asas matematik; (b) membentuk dan meneliti konjektur matematik; (c) membina dan menilai hujah dan bukti matematik; dan (d) memilih dan menggunakan pelbagai jenis penaakulan dan kaedah pembuktian” (h. 56). Selari dengan NCTM, KPM turut memasukkan elemen proses penyelesaian masalah dan menaakul dalam reka bentuk kurikulum matematik sekolah rendah bermula tahun 2008 bagi mengelakkan murid dari menganggap matematik hanya satu set prosedur atau algoritma yang perlu diikuti untuk mendapatkan penyelesaian tanpa memahami konsep matematik disebaliknya.

Penaakulan bukan saja mengubah paradigma murid dari sekadar belajar kepada berfikir, malah memberi pengupayaan intelektual apabila murid dibimbing dan dilatih untuk membuat konjektur, membuktikan konjektur, memberikan penerangan logikal, menganalisa, menilai dan memberi justifikasi terhadap semua aktiviti matematik. Latihan sedemikian membentuk murid yang yakin dengan diri sendiri selaras dengan hasrat untuk membentuk pemikir matematik yang berkeupayaan tinggi (KPM, 2013).

Penekanan terhadap penaakulan dalam kurikulum bagi semua peringkat turut dibincangkan oleh ahli matematik dan pendidik matematik (Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002; Lamon, 2007). Mereka mendapati kurikulum matematik yang sedia ada memberi tumpuan dan penekanan algoritma dan prosedur yang bermula di peringkat sekolah rendah telah mengabaikan elemen penaakulan mengakibatkan murid yang melangkah ke peringkat menengah, seterusnya ke peringkat kolej menghadapi kesukaran dalam tugasan yang memerlukan mereka mengemukakan penjelasan logikal dan memberi justifikasi atau rasional. Maka ahli panel berpendapat bahawa budaya berhujah, menjelaskan pandangan, memberi alasan, mempertahankan hujah yang logik, dan membuat pertimbangan dan penilaian harus diterap bermula seawal peringkat sekolah rendah (Ball et al., 2002; Lamon, 2007).

Keperluan perubahan dalam kaedah pembelajaran matematik daripada menghafal prosedur tertentu semasa menyelesaikan masalah matematik kepada mengenal pasti bagaimana murid berfikir dan berkeupayaan menjelaskan dan menjustifikasikan tindakan yang dibuat turut dinyatakan dalam beberapa kajian (Davis & Maher, 1996; Howe et al., 2015; Lamon, 2007; Niss, 2007; Siegler & Pyke, 2013). Kajian tersebut menyatakan, murid perlu dicabar dengan menyediakan tugasan matematik berstruktur yang membolehkan mereka memberi penjelasan dan alasan serta meyakinkan penyelesaian yang dilakukan. Walaupun matlamat utama dalam kalangan penggubal dasar (CCSS-M, 2010; KPM, 2013; NCTM, 2014; Singapore Ministry of Education, 2007) adalah untuk membina dan membangunkan kemahiran menaakul murid dalam pembelajaran matematik, namun dalam laporan penilaian matematik di peringkat antarabangsa yang dijalankan oleh *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) dan PISA menunjukkan murid mempunyai kesukaran menerangkan dan menjustifikasi penyelesaian matematik yang dilakukan. Kelemahan ini turut dinyatakan dalam laporan oleh *National Assessment o f Educational Progress* (NAEP) melibatkan murid di semua peringkat sama ada peringkat rendah mahupun menengah (Arbaugh, Brown, Lynch, & McGraw, 2004).

Dalam laporan awal Pelan Pembangunan Pendidikan Malaysia (PPPM) 2013-2025 (KPM, 2012), prestasi pencapaian murid di Malaysia dibandingkan dengan pencapaian murid dari negara lain melalui TIMSS dan PISA. Berdasarkan laporan TIMSS 2011, kemerosotan pencapaian akademik dalam matematik semakin membimbangkan yang mana kemerosotan Malaysia secara mendadak dalam prestasi matematik dari tahun 1999 hingga 2011. Laporan menunjukkan Malaysia menduduki tangga yang ke 16 pada tahun 1999, tangga ke 10 pada tahun 2003, tangga ke 20 pada tahun 2007, dan tangga ke 26 pada tahun 2011. Dalam hal ini, 20% murid tidak mencapai tanda aras yang minimum untuk matematik dalam TIMSS 2007 dan hanya dua hingga tiga peratus sahaja murid di Malaysia yang cemerlang, iaitu mencapai tanda aras tinggi, yang mana mereka boleh menyelesaikan masalah matematik yang kompleks (KPM, 2012). Laporan dari TIMSS 2007 dan 2011 juga menunjukkan bahawa murid Malaysia mempunyai pencapaian rendah dalam dimensi kognitif yang melibatkan kemahiran berfikir dan penyelesaian masalah. Tiga domain dalam kemahiran berfikir yang diuji termasuklah pengetahuan, aplikasi, dan penaakulan. Berdasarkan laporan TIMSS 2011 sebahagian besar murid Tahun Empat di Malaysia belum menguasai kemahiran menyelesaikan masalah matematik, yang mana hanya enam peratus daripada murid yang mengambil bahagian mencapai tanda aras tertinggi melibatkan kemahiran yang mengaplikasikan pengetahuan dan pemahaman dalam situasi kompleks, menyusun maklumat, membuat generalisasi, menyelesaikan masalah bukan rutin, dan membuat rumusan.

Kemerosotan pencapaian murid dalam matematik turut diperhatikan dalam PISA 2012, yang mana prestasi Malaysia berada sekurang-kurangnya 133 mata di bawah negara serantau, seperti China, Jepun, Korea, Singapura, dan Hong Kong. Perbezaan 38 mata dalam PISA 2012 bermaksud murid Malaysia ketinggalan sekurang-kurangnya tiga tahun persekolahan berbanding murid yang seusia di negara serantau. Sebanyak 51.8% murid Malaysia gagal dalam mencapai tanda aras minimum dalam matematik, iaitu profisiensi asas yang diperlukan murid untuk penyertaan efektif dan produktif dalam kehidupan (KPM, 2012). Menurut PISA, profisiensi asas merujuk kepada murid tidak dapat menggunakan algoritma asas, formula, prosedur atau konvensyen. Murid tiada kebolehan penaakulan dan interpretasi literal bagi sesuatu keputusan walaupun mereka dapat menjawab soalan yang jelas terperinci melibatkan konteks biasa.

Konsep nisbah dan kadaran digunakan secara meluas bukan sahaja dalam matematik, malah sains dan kehidupan harian (Hoffer & Hoffer, 1988; Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Lamon, 2007; Lobato & Ellis, 2010; Vergnaud, 1994). Penaakulan perkadaran yang menggunakan konsep nisbah dan kadaran bukan sahaja dianggap sebagai penghubung antara nombor, aritmetik, algebra dan matematik lanjutan (Lamon, 2007; Lesh, Post, & Behr, 1988; Sherin & Fuson, 2005), malah penaakulan perkadaran dalam topik nisbah dan kadaran turut diajar secara formal bermula dari gred lima hingga gred lapan (NCTM, 2000). Penyelesaian masalah melibatkan topik nisbah dan kadaran memerlukan murid mengaitkan beberapa konsep matematik yang berkaitan dan memerlukan kemahiran berfikir yang tinggi seperti menaakul (Akkus & Duatepe-Paksu, 2006). Maka memiliki pengetahuan penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran adalah penting selain berfungsi sebagai asas di peringkat sekolah rendah dan menengah serta merupakan prasyarat untuk peringkat yang lebih tinggi (Lamon, 2007; Post, Behr, & Lesh, 1988).

Tidak seperti kurikulum matematik bagi negara Australia, Jepun, dan Amerika yang menggabungkan penaakulan perkadaran dengan topik nisbah dan kadaran atau memasukkan penaakulan perkadaran sebagai hasil pembelajaran dalam topik nisbah dan kadaran, pembelajaran nisbah dan kadaran di Malaysia adalah diajar sebagai satu topik yang tidak memasukkan unsur penaakulan perkadaran. Di Malaysia topik nisbah dan kadaran pertama kali diperkenalkan dalam kurikulum matematik Tahap Dua sekolah rendah pada tahun 2014 yang merangkumi standard pembelajaran seperti berikut: (a) Tahun Empat: menentukan suatu nilai menggunakan kaedah unitari dalam situasi harian; (b) Tahun Lima: menentukan suatu nilai berdasarkan nisbah 1:1 hingga 1:10, 1:100 dan 1:1000; dan (c) Tahun Enam: i) mewakilkan nisbah dua kuantiti dalam bentuk $a : b$ atau yang melibatkan nisbah bahagian kepada bahagian, bahagian kepada keseluruhan, dan keseluruhan kepada bahagian dan (ii) menyelesaikan masalah harian yang melibatkan nisbah dan kadaran yang mudah (KPM, 2013, 2014a, 2014b).

Walaupun sejak lima dekad yang lalu banyak perbincangan dan kajian berkaitan penaakulan perkadaran dalam topik nisbah dan kadaran telah dijalankan (Benson, 2009; Brawand, 2013; Inhelder & Piaget, 1958; Karplus, Karplus, & Wollman, 1974; Lamon, 2012; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980a, 1980b, Vergnaud, 1983, 1994), tumpuan hanya diberi dalam beberapa aspek seperti pemahaman dan pengetahuan guru (Benson, 2009; Johnson, 2013; Simon & Blume, 1994; Smith, Stein, Silver, Hillen, &

Heffernan, 2001), mengenal pasti strategi dan kesilapan murid menyelesaikan masalah (Avcu & Avcu, 2010; Carney et al., 2015), mengukur prestasi murid (Cheng, Star, & Chapin, 2013; Lithner, 2000), dan membina item ujian diagnostik nisbah dan kadaran (Misailidou & Williams, 2003). Kajian mengenal pasti penaakulan perkadaran murid, terutama di peringkat sekolah rendah berkaitan nisbah dan kadaran dalam konteks tempatan masihbelum diterokai. Walau bagaimanapun terdapat satu kajian di Malaysia menggunakan kaedah gabungan kualitatif dan kuantitatif berkaitan pemahaman murid tentang konsep nisbah dan kadar yang dijalankan oleh Singh (2000) terhadap murid tahun Enam dan murid berumur 15 hingga 16 tahun. Dalam kajian tersebut, beliau mencadangkan beberapa aspek yang perlu diterokai oleh pengkaji akan datang antaranya: kajian lanjut tentang bagaimana pemahaman murid tentang konsep unit komposit dalam struktur multiplikatif boleh dikembangkan dalam penaakulan perkadaran; menyiasat apakah yang membolehkan murid membuat peralihan daripada pengulangan unit komposit kepada pendaraban dan pembahagian; dan analisis lanjut berkemungkinan murid sekolah rendah mempunyai penaakulan perkadaran yang lebih canggih.

Oleh kerana topik nisbah dan kadaran baru diperkenalkan di sekolah rendah bermula tahun 2014 bagi murid Tahun Empat dan tahun 2015 bagi murid Tahun Lima, maka adalah perlu untuk mengenal pasti sejauh manakah penaakulan perkadaran yang dipunyai oleh murid sekolah rendah tentang nisbah dan kadaran. Adakah penaakulan perkadaran murid sekolah rendah hanya terbatas kepada standard pembelajaran yang dikemukakan dalam kurikulum matematik sekolah rendah (KPM, 2013, 2014a, 2014b) atau sebaliknya?

Justeru adalah wajar kajian ini dijalankan bagi membekalkan maklumat yang berguna dan membantu mengetahui sejauh manakah penaakulan perkadaran dimiliki murid berkaitan nisbah dan kadaran. Kajian ini hanya melibatkan murid Tahun Lima dan pengkaji akan terlibat secara langsung dalam semua sesi temu bual. Selain itu, kajian ini hanya memfokuskan penaakulan perkadaran yang ditunjukkan murid dalam menyelesaikan masalah berkaitan topik nisbah dan kadaran dalam lima sesi temu bual dari perspektif murid dan bukan untuk melihat pencapaian, kecekapan, dan kesilapan penaakulan perkadaran murid.

Kerangka Teori

Kajian ini menggunakan dua perspektif, iaitu dari perspektif psikologi dan perspektif matematik sebagai asas teori. Konstruktivisme radikal merupakan satu pendekatan psikologi yang berlandaskan epistimologi genetik yang dimajukan oleh Piaget dan kemudiannya dikembangkan oleh (von Glasersfeld, 1995) dari aspek epistimologi. Pada umumnya, konstruktivisme radikal adalah satu cara memikirkan dan menghuraikan proses yang digunakan manusia untuk mengetahui sesuatu perkara atau fenomena secara rasional.

Konstruktivisme radikal merupakan satu bentuk paradigma pendidikan yang didasari oleh lima aspek, iaitu metafizik, epistimologi, aksiologi, pedagogi, dan metodologi. Konstruktivisme radikal tidak memberi perhatian kepada metafizik kerana menurut mereka realiti yang diketahui oleh seseorang adalah realiti yang dialaminya sendiri (Steffe, 2007; Thompson, 2000; Nik Azis, 1999). Ini bermakna, seseorang itu tidak dapat mengetahui sesuatu yang tidak ada dalam domain pengalamannya, maka persoalan tentang hakikat semula jadi manusia yang muktamad dan persoalan tentang alam sejagat tidak dapat dijawab kerana terkeluar dari pengalaman seseorang. Perbincangan konstruktivisme radikal hanya bertumpu pada pengetahuan rasional dan bukannya pengetahuan metafizik mahupun pengetahuan mistik.

Epistimologi merujuk sifat asas dan proses perkembangan pengetahuan yang dimiliki individu. Penggunaan metafora pembinaan oleh konstruktivisme radikal selari dengan pandangan epistimologi bahawa pengetahuan merupakan sesuatu yang dibina sendiri oleh individu. Pengetahuan bukanlah sesuatu yang boleh dipindahkan daripada pemikiran orang dewasa kepada pemikiran kanak-kanak, tetapi semua pengetahuan yang dimiliki seseorang adalah hasil tindakan kognitif yang dilakukan berdasarkan pengalaman dan ciri pengalaman oleh mereka (Steffe, 1995; Nik Azis, 1999).

Aksiologi membabitkan teori tentang nilai, termasuklah nilai moral dan nilai estetika. Teori mengetahui yang dimajukan oleh konstruktivisme radikal berlandaskan dua andaian tentang nilai. Pertama, sebarang andaian yang dibuat oleh seseorang boleh mempunyai daya maju yang sama dengan pembinaan lain yang dilakukannya. Daya maju yang ditentukan berdasarkan tindakan seseorang dan sejauh mana tindakan tersebut dapat membantunya mencapai matlamat tertentu dalam konteks sosial tindakan itu berlaku (Thompson, 2000; Nik Azis, 1999). Andaian kedua ialah manusia dianggap lebih menyukai sesetengah perkara berbanding benda lain. Dari aspek pendidikan, konstruktivisme radikal menegaskan bahawa pendidikan matematik bukan merupakan suatu aktiviti yang bebas nilai sebaliknya menganggap nilai etika seperti sederhana dalam kelakuan, kuat kerja, bersopan santun dalam tindakan, jujur dalam setiap usaha, cekal menghadapi cabaran, berani mencuba idea baru, dan saling menghormati antara satu sama lain adalah penting.

Pedagogi membabitkan teori pengajaran dan cara memupuk pembelajaran mengikut epistimologi tertentu. Menurut konstruktivisme radikal terdapat empat faktor perkembangan yang perlu diberi perhatian dalam pembinaan sesuatu model pembelajaran, iaitu interaksi sosial, kematangan, pengalaman fizikal, dan keseimbangan (Steffe, 1995; Nik Azis, 1999). Interaksi khususnya interaksi linguistik merupakan konteks terpenting bagi akomodasi yang mana seseorang yang berinteraksi secara berterusan dengan orang lain merupakan satu sumber gangguan yang kaya dan penghapusan gangguan tersebut membabitkan proses akomodasi.

Konstruktivisme radikal yang merupakan salah satu metodologi kajian mencadangkan beberapa prinsip, prosedur, dan amalan umum bagi membantu pengkaji menjalankan kajian yang baik. Perkara utama yang diberi tumpuan dalam sesuatu kajian adalah terhadap kandungan sebenar pemikiran murid, iaitu bagaimana murid membina realiti matematik mereka sendiri melalui tindakan refleksi terhadap tindakan tersebut berdasarkan pengalaman mereka. Konstruktivisme radikal berusaha menyelidik pembinaan konsep dan operasi matematik yang dilakukan murid dalam proses mentafsirkan dan menyusun pengalaman mereka. Matematik milik murid adalah terdiri daripada satu himpunan skim tindakan dan skim operasi yang telah dikoordinasikan yang berkaitan dengan topik matematik yang khusus, manakala matematik untuk murid adalah terdiri daripada pengetahuan matematik yang dijanakan oleh pengkaji berdasarkan analisis mendalam terhadap tingkah laku murid yang berkaitan dengan matematik melalui satu interaksi sosial dalam tempoh panjang. Dalam konteks ini, aktiviti pengkaji yang berfungsi sebagai guru dan aktiviti murid adalah saling mempengaruhi antara satu sama lain (Steffe, 1995; Thompson, 2000; Nik Azis, 1999).

Teori ini menganjurkan dua teknik bagi menjalankan penyelidikan dalam bidang pendidikan matematik, iaitu teknik temu bual klinikal dan teknik eksperimen mengajar. Melalui teknik temu bual klinikal, pengkaji dapat mengenal pasti penaakulan perkadaran yang ditunjukkan oleh murid bagi menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Terdapat dua prinsip asas konstruktivisme radikal seperti yang dianjurkan oleh von Glasersfeld (Steffe, 1995; Thompson 2000): (a) pengetahuan tidak diterima secara pasif sama ada melalui deria atau melalui komunikasi sebaliknya pengetahuan dibina oleh individu yang berfikir secara aktif, (b) fungsi kognisi adalah adaptif, dalam pengertian biologi, dan cenderung ke arah kesesuaian atau berdaya maju. Kognisi berperanan dalam mengorganisasikan pengalaman seseorang dan bukan dalam menemui realiti ontologi yang objektif. Prinsip yang pertama menjelaskan bahawa bagi mengetahui merupakan satu proses yang bersifat aktif, peribadi, dan berlandaskan pengetahuan yang sebelumnya, iaitu pembinaan pengetahuan secara berulang-ulang dan berterusan dan bukan sebagai satu fenomena yang pasif, umum, dan dikawal daripada luar. Proses pembinaan ini bukanlah seperti proses penyerapan, salinan, atau pemindahan maklumat semata-mata. Dalam konteks kajian ini murid perlu membina pengetahuan matematik berlandaskan kepada pengalaman termasuklah aktiviti di dalam bilik darjah yang membabitkan proses interaksi sosial dan melakukan refleksi, iaitu proses memikirkan semula aktiviti yang lalu. Guru tidak boleh memindahkan pengetahuan dari pemikirannya kepada pemikiran murid melalui interaksi sosial, bahasa atau komunikasi sebaliknya murid perlu membentuk sendiri pengetahuan mereka berdasarkan pengalaman lepas. Interaksi sosial dan bahasa hanya digunakan untuk mengorientasikan pembinaan pengetahuan. Pembinaan pengetahuan bukan sahaja dipengaruhi oleh pengalaman individu malah faktor kematangan, interaksi sosial, dan keseimbangan turut memainkan peranan penting (Piaget, (1964) dalam Nik Azis, 1999).

Prinsip kedua pula menerangkan pembinaan pengetahuan seseorang dianggap sebagai satu proses yang bersifat adaptif. Konstruktivisme radikal mentakrifkan semula konsep adaptasi dengan menggunakan konsep berdaya maju yang mengimplikasikan terdapat halangan dan kekangan yang menyekat atau mengganggu usaha seseorang untuk mencapai matlamat berfaedah (Steffe, 1995; Nik Azis, 1999). Satu aspek penting dalam teori ini adalah tentang idea kesesuaian atau kesecocokan semasa seseorang membina pengetahuan. Sesuatu pengetahuan yang dibina oleh seseorang dianggap pengetahuan yang baik sekiranya pengetahuan tersebut sesuai dengan kekangan realiti yang dihadapinya dan pengetahuan itu tidak bertembung dengan kekangan tersebut. Dalam proses adaptasi, seseorang berusaha untuk mengubahsuai perkara yang ditanggapinya supaya perkara tersebut dapat disesuaikan ke dalam struktur konsepsi yang dimilikinya.

Dalam kajian ini, pengkaji telah membuat beberapa andaian bagi mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima berkaitan nisbah dan kadaran berlandaskan konstruktivisme radikal.

i. Realiti bagi murid sekolah rendah dianggap sebagai sebahagian pembinaan kognitif mereka.
ii. Penaakulan perkadaran tentang nisbah dan kadaran harus dibina oleh setiap murid berdasarkan pengetahuan dan pengalaman mereka sendiri.
iii. Pembelajaran berlaku apabila murid membuat akomodasi atau pengubahsuaian terhadap pengetahuan sedia ada bagi mengatasi gangguan atau ketidakseimbangan dalam fikiran mereka.
iv. Murid Tahun Lima telah mempelajari konsep nisbah dan kadaran dalam Tahun Empat semasa kajian ini dijalankan yang merangkumi satu standard pembelajaran, iaitu menentukan suatu nilai melalui kaedah unitari.
v. Murid Tahun Lima menjawab secara jujur dan mencuba sedaya upaya kesemua tugasan yang diberi semasa temu bual klinikal.

Andaian itu bertujuan untuk membantu pengkaji mempersempitkan skop kajian bagi melicinkan proses kajian dan memudahkan pelaksanaan kajian. Andaian tersebut juga dapat memberi panduan kepada pengkaji dalam pengumpulan data dan menganalisis data yang relevan bagi menjawab soalan kajian serta mentafsir hasil kajian.

Sebagai tambahan kepada pendekatan konstruktivisme radikal, kajian ini turut melihat penaakulan perkadaran dan konsep nisbah dan kadaran masing-masing dari perspektif psikologi dan perspektif matematik yang akan dijelaskan dalam Bab Dua.

Tujuan dan Soalan Kajian

Kajian ini bertujuan untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran berdasarkan objektif berikut:

i. Mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima dalam membanding dan menyusun pecahan.
ii. Mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima dalam membandingkan nisbah membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan.
iii. Mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima dalam membuat hubung kait antara kuantiti dalam nisbah dan kadaran membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan.
iv. Mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima dalam menyatakan implikasi tentang perubahan kuantiti dalam nisbah dan kadaran membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan.

Secara khusus, kajian ini memberi tumpuan kepada soalan kajian seperti berikut:

i. Bagaimanakah murid Tahun Lima membanding dan menyusun pecahan?
ii. Bagaimanakah murid Tahun Lima membandingkan nisbah membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan?
iii. Bagaimanakah murid Tahun Lima membuat hubung kait antara kuantiti dalam nisbah dan kadaran membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan?
iv. Bagaimanakah murid Tahun Lima menyatakan implikasi tentang perubahan kuantiti dalam nisbah dan kadaran membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan?

Kajian ini menggunakan kajian kes sebagai reka bentuk kajian dan teknik temu bual sebagai kaedah pengumpulan data. Seterusnya, kaedah analisis protokol bertulis digunakan untuk menganalisis data kualitatif hasil temu bual yang terdiri daripada maklumat lisan dan maklumat bukan lisan seperti lakaran, catatan, dan tingkah laku peserta kajian serta catatan pengkaji yang dikumpul.

Definisi Istilah

Terdapat beberapa istilah asas yang digunakan dalam kajian ini. Istilah penaakulan perkadaran, masalah penaakulan perkadaran, nisbah, kadaran, pecahan, dan Murid Tahun Lima. Di bawah penaakulan perkadaran, terdapat empat subkonstruk membabitkan istilah perbandingan, hubung kait, justifikasi, dan implikasi. Berikut adalah definisi bagi istilah tersebut.

Penaakulan Perkadaran. Penaakulan perkadaran merujuk bagaimana individu mengenal pasti dan mengemukakan alasan bagi menyokong pernyataan yang dibuat tentang struktur hubungan antara kuantiti dalam nisbah, keupayaan individu mengenal pasti hubungan multiplikatif antara dua kuantiti, dan melanjutkan hubungan yang sama bagi pasangan kuantiti yang lain (Lamon, 2007). Empat elemen proses kognitif digunakan dalam kajian ini untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima, iaitu perbandingan, hubung kait, justifikasi, dan implikasi.

Perbandingan. Perbandingan merujuk mengenal pasti persamaan dan perbezaan antara perkara tertentu dan menentukan bagaimana perkara itu berkait atau saling berkait antara satu sama lain (Lamon, 2007). Dalam kajian ini, murid membandingkan: (a) dua atau lebih pecahan wajar tanpa melibatkan sebarang konteks masalah; dan (b) dua atau lebih nisbah yang melibatkan konteks masalah berbeza.

Hubung kait. Hubung kait merujuk membuat perkaitan, pertalian, atau sangkut paut antara kuantiti dalam nisbah atau kuantiti sepadan dalam dua nisbah secara multiplikatif (Lamon, 2007). Dalam kajian ini, murid menggunakan pengetahuan tertentu bagi menghubung kaitkan antara kuantiti dalam nisbah atau kadaran.

Justifikasi. Justifikasi merujuk memikirkan tentang sesuatu secara logik dan munasabah dengan mengemukakan pendapat, alasan atau sokongan terhadap sesuatu perkara atau situasi (Lamon, 2007). Dalam kajian ini, murid mengemukakan justifikasi atau alasan bagi menyokong pernyataan yang dibuat tentang perbandingan pecahan dan nisbah, hubung kait antara nisbah dan kadaran, dan implikasi perubahan kuantiti.

Implikasi. Implikasi merujuk menyatakan kesan yang timbul, membuat jangkaan, meramalkan, dan menyatakan kemungkinan yang akan berlaku apabila terdapat perubahan dalam kuantiti (Lamon, 2007). Dalam kajian ini, murid menyatakan kesan terhadap satu kuantiti apabila terdapat perubahan pada satu lagi kuantiti.

Masalah Penaakulan Perkadaran. Dua jenis masalah penaakulan perkadaran yang terlibat dalam kajian ini adalah masalah menentukan nilai dan masalah membandingkan nisbah.

Masalah menentukan nilai. Masalah menentukan nilai melibatkan empat kuantiti a, b, c, dan d ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) dalam dua nisbah saling berkait secara perkadaran, yang mana tiga kuantiti dalam dua nisbah diberi dan perlu menentukan kuantiti keempat yang tidak diketahui (Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993b). Kajian ini menggunakan enam masalah menentukan nilai yang membabitkan struktur hubungan nombor bulat-nombor bulat, nombor bulat-bukan nombor bulat, bukan nombor bulat-nombor bulat, dan bukan nombor bulat-bukan nombor bulat.

Masalah membandingkan nisbah. Masalah membandingkan nisbah melibatkan perbandingan dua atau lebih nisbah (Karplus et al., 1983) membabitkan tiga jenis kuantiti berbeza setiap satu, iaitu diskrit, selanjar, dan diskrit-selanjar. Kajian ini menumpukan kepada masalah perbandingan yang tertentu, seperti membandingkan bahagian piza, membandingkan rasa jus oren, membandingkan bancuhan warna, membandingkan kepadatan ruang, dan membandingkan saiz segiempat.

Nisbah dan Kadaran.

Nisbah. Secara matematik, nisbah ditakrifkan sebagai satu pasangan nombor tertib ditulis dalam pelbagai notasi seperti berikut: (a) $a : b$ ($b \neq 0$), (b) a/b; dan (c) $a \rightarrow b$ yang menyatakan perbandingan dua kuantiti secara multiplikatif, iaitu sama ada secara mendarab atau membahagi (Lamon, 2012). Kajian ini tidak menggunakan mana-mana notasi nisbah secara langsung, sebaliknya menggunakan perwakilan notasi tersebut secara perbandingan gambar rajah atau perbandingan dua situasi berayat dalam tugasan yang diberi.

Kadaran. Kadaran merujuk kepada hubungan antara empat kuantiti a, b, c, dan d ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) yang akan membentuk hubungan perkadaran dalam dua situasi, iaitu kadaran secara langsung atau kadaran songsang (Ben-Chaim, Keret, & Illany, 2012). Kajian ini melibatkan tugasan yang membabitkan kadaran secara langsung dan kadaran songsang.

Kajian ini memfokuskan tugasan masalah penaakulan perkadaran yang melibatkan penggunaan konsep berkaitan nisbah dan kadaran. Tiga konteks masalah penaakulan perkadaran membabitkan konsep nisbah dan kadaran adalah seperti berikut:

i. *Konteks masalah nisbah*. Konteks masalah nisbah melibatkan perbandingan dua kuantiti sama unit atau berlainan kuantiti. Dalam kajian ini terdapat enam tugasan yang melibatkan konteks masalah nisbah Piza, Jus Oren 1, Jus Oren 2, Cat (a), (b), Warna, dan Susunan Guli.

ii. *Konteks masalah kada**r***. Kadar atau ketumpatan adalah merujuk membandingkan dua kuantiti yang berlainan unit tetapi saling berkait bagi membentuk satu kuantiti lain (Ben-Chaim et al., 2012). Dalam kajian ini terdapat lima tugasan yang melibatkan konteks masalah kadar atau ketumpatan, iaitu Khemah, Pasu Bunga, Lolipop, Belon, dan Bersih Rumah.

iii. *Konteks masalah keserupaan*. Keserupaan adalah merujuk membandingkan dua kuantiti yang berkait secara konseptual, namun bukan melibatkan bahagian daripada satu keseluruhan (Freudenthal, 1983). Kajian ini melibatkan empat tugasan dalam konteks keserupaan, iaitu Segiempat, Lukisan, Gambar, dan Cermin yang melibatkan pembesaran dan pengecilan objek dengan skala tertentu.

Pecahan. Pecahan adalah satu pasangan nombor nisbah berbentuk a/b, dengan a dan b adalah nombor bulat dan $b \neq 0$, yang mana nombor a dan b masing-masing disebut sebagai pengangka dan penyebut (Freudenthal, 1983). Suatu pecahan dikatakan pecahan wajar apabila nilainya kurang daripada satu dengan pengangkanya lebih kecil daripada penyebut. Kajian ini hanya melibatkan membanding dan menyusun dua atau lebih pecahan wajar.

Limitasi dan Delimitasi

Kajian ini mengandungi beberapa limitasi, yang tiga daripadanya berkaitan dengan reka bentuk kajian, kaedah pengumpulan data, dan instrumen. Manakala tiga daripada delimitasi pula adalah berkaitan penaakulan perkadaran, kandungan matematik, dan seting.

Limitasi. Limitasi yang pertama berkaitan reka bentuk kajian. Kajian ini menggunakan kajian kes sebagai reka bentuk kajian. Dalam kajian kes, pengkaji memerlukan masa yang panjang dan kos yang tinggi (Merriam, 2009) untuk menjalankan kajian yang melibatkan beberapa siri temu bual . Pengkaji terlibat secara langsung dalam temu bual, pengumpulan data, mentafsir data, menganalisis hasil kajian dan penulisan yang panjang dan terperinci yang memerlukan masa yang panjang. Isu etika, integriti dan sensitiviti sepanjang mengendalikan kajian turut dipersoalkan memandangkan pengkaji merupakan salah satu instrumen utama yang terlibat dalam kajian (Merriam, 2009).

Menyediakan satu perancangan yang sistematik melibatkan semua aspek seperti masa yang sesuai menjalankan kajian rintis dan sesi temu bual sebenar, menganalisa dan menginterpretasi data mengikut aliran kerja yang ditetapkan serta melakukan penulisan dengan konsisten dapat membantu pengkaji menggunakan masa dengan optimum. Selain itu, piawaian etika juga dapat membantu pengkaji untuk mencapai matlamat kajian yang mana pengkaji yang berintegriti dan berakauntabiliti sepanjang kajian dapat mengelakkan berlakunya kesilapan, pemalsuan data, memberi gambaran yang salah tentang data kajian, dan melindungi kerahsiaan. Ini sekaligus memberi kesan terhadap kesahan dalaman kajian yang mana pengkaji dapat mengukur apa yang hendak diukur dalam kajian.

Limitasi yang kedua adalah berkaitan kaedah pengumpulan data yang digunakan dalam kajian, iaitu temu bual. Dalam teknik temu bual, pengkaji merupakan instrumen kajian. Menurut Steffe dan Cobb (1983), teknik temu bual membolehkan pengkaji mentafsir, menganalisis dan menguji andaian tentang pemahaman murid berkait sesuatu konsep. Kurangnya pengalaman dan pengetahuan pengkaji boleh menyebabkan data yang dikumpulkan disalah tafsir dan disalah baca dan kemungkinan berlakunya bias akibat ketidaktegasan pengkaji semasa proses pengumpulan dan analisis data hingga mengakibatkan kurang kredibilitinya. Pengkaji perlu responsif kepada konteks dan peka kepada data tanpa bahasa, kebolehan untuk memberi perhatian kepada konteks yang menyeluruh, mengadaptasikan teknik kepada keadaan, memproses data dengan serta merta, dan membuat penjelasan dan rumusan semasa kajian (Nik Azis, 2009). Oleh kerana kredibiliti kajian bergantung pada kepakaran, pengalaman, dan kegigihan pengkaji, maka langkah yang diambil bagi meningkatkan kemahiran pengkaji dalam mengendalikan temu bual adalah dengan menjalankan beberapa siri kajian rintis bagi membiasakan pengkaji dengan situasi sebenar kajian. Selain itu, untuk menunjukkan kebolehpastian hasil kajian, pengkaji perlu menyimpan rekod yang lengkap tentang data mentah, produk analisis, catatan proses, catatan peribadi, salinan semua rakaman temu bual, catatan temu bual, dan salinan transkrip yang dibuat (Nik Azis, 2009).

Limitasi yang ketiga berkaitan dengan instrumen. Dalam kajian ini, instrumen diadaptasi dan dimodifikasi oleh pengkaji berpandukan instrumen kajian lepas dan pakar dalam bidang penaakulan perkadaran. Bagi memastikan murid boleh mempamerkan penaakulan perkadaran bagi setiap aktiviti matematik yang melibatkan masalah nisbah dan kadaran dalam pelbagai konteks yang terkandung dalam pelan temu bual, maka soalan yang dikemukakan haruslah dapat memaparkan cara murid berfikir dan memberi justifikasi. Untuk memastikan kredibiliti hasil kajian, soalan yang dibina perlulah mempunyai format yang berlainan dengan soalan yang biasa ditanya di sekolah dan di dalam buku teks dengan andaian bahawa ianya dapat mengekalkan motivasi murid dalam memberi respons. Setiap aktiviti yang disediakan dalam instrumen perlu dapat menunjukkan penaakulan perkadaran murid yang melibatkan beberapa proses termasuklah hubung kait, perbandingan, dan implikasi. Seterusnya instrumen kajian dihantar kepada beberapa orang pakar dan penyelia bagi mendapatkan pandangan tentang kesesuaian instrumen. Ini bertujuan agar data yang diperolehi mempunyai kredibiliti yang tinggi (Lincoln & Guba, 1985).

Delimitasi. Delimitasi yang pertama bagi kajian ini adalah berkaitan dengan konstruk psikologi yang terlibat, iaitu penaakulan perkadaran. Kajian ini hanya mengkaji penaakulan perkadaran dari perspektif murid dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Berpandukan data yang diperolehi melalui temu bual, pengkaji hanya membuat andaian berkaitan penaakulan perkadaran murid kerana pengkaji tidak dapat mengetahui apa sebenarnya yang terdapat dalam fikiran murid.

Aspek pembelajaran seperti pembelajaran melibatkan teknologi dan kecekapan mengira tidak terlibat dalam kajian ini. Kajian ini juga hanya memfokuskan pada dua jenis masalah berkaitan penaakulan perkadaran, iaitu masalah menentukan nilai dan masalah membandingkan nisbah. Terdapat beberapa lagi jenis masalah berkaitan penaakulan perkadaran yang tidak diambil kira dalam kajian ini seperti masalah membanding nisbah dan kadaran secara kualitatif dan menentukan nisbah tiga kuantiti. Selain itu, kajian ini hanya membataskan kepada murid Tahun Lima sekolah kebangsaan gred A dan tidak melibatkan murid Tahun Lima sekolah jenis kebangsaan, sekolah gred B, dan sekolah kurang murid walaupun mereka telah mempelajari silibus matematik yang sama.

Ketiga-tiga delimitasi di atas boleh memberi kesan terhadap kesahan luaran kajian yang mana generalisasi statistik tidak boleh dibuat. Walau bagaimanapun generalisasi lain seperti generalisasi analisis dan naturalistik masih boleh digunakan. Generalisasi naturalistik membabitkan generalisasi yang dibuat oleh pembaca berdasarkan maklumat yang dibekalkan dalam laporan kajian (Stake, 1995, 2000). Tanggungjawab untuk menunjukkan kebolehpindahan suatu hasil kajian terletak ditangan pembaca laporan kajian dan bukannya ditangan pengkaji (Nik Azis, 1999). Beberapa perkara yang dapat meningkatkan kebolehpindahan telah diambil kira oleh pengkaji seperti memberi penjelasan tentang peranan pengkaji dalam kajian, menjelaskan secara terperinci keadaan seting, lokasi, ciri peserta kajian, kaedah pengumpulan data, analisis data, dan tafsiran data bagi membolehkan pembaca untuk membuat keputusan sama ada hasil kajian dapat diaplikasikan kepada keadaan lain atau tidak (Nik Azis, 2009).

Signifikan Kajian

Hasil kajian ini dapat memberi manfaat kepada beberapa pihak tertentu seperti guru matematik dan pensyarah pendidikan matematik selain dapat menyumbang pengetahuan kepada kajian sedia ada.

Hasil kajian dijangka dapat memberi manfaat kepada guru matematik, khususnya di sekolah rendah. Misalnya, hasil kajian ini dapat membantu guru mengetahui penaakulan perkadaran yang dimiliki murid dan bagaimana murid menjelaskan atau memberi alasan dalam setiap aktiviti matematik berkaitan nisbah dan kadaran. Adalah penting bagi guru untuk mengetahui bagaimana murid boleh menjelaskan alasan bagi setiap aktiviti matematik kerana ia menunjukkan idea murid terhadap diri mereka, rakan, dan guru (Harel & Sowder, 2007). Selain itu, ia dapat membuktikan bahawa murid bukan hanya sekadar mengingat prosedur bagi penyelesaian masalah tertentu tanpa makna. Maklumat yang diperoleh dari hasil kajian ini juga membantu guru memahami teknik penyoalan yang berkesan dalam bilik darjah dan bentuk tugasan yang dapat merangsang murid untuk menjelaskan setiap perkara yang dilakukan, diperhatikan, dan difikirkan khususnya berkaitan nisbah dan kadaran.

Selain itu, hasil kajian dapat membantu guru merancang dan membuat persediaan pengajaran dan pembelajaran berasaskan keperluan murid. Guru matematik boleh menggunakan instrumen kajian sebagai panduan untuk melaksanakan tugasan yang mencabar kognitif murid, yang mana memerlukan murid mengemukakan justifikasi untuk menyokong setiap algoritma penyelesaian masalah berkaitan nisbah dan kadaran seterusnya memberi peluang murid mengalami pembelajaran yang berkualiti. Hasil kajian juga dapat membantu pensyarah pendidikan matematik memahami tindakan, pemikiran, penjelasan, dan penaakulan perkadaran murid dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran serta mengambil kira beberapa keperluan seperti menyemak semula kaedah, bahan, teori pembelajaran, dan isi kandungan pengajaran dan pembelajaran bagi tujuan penambahbaikan. Ini dapat membantu meminimakan ketidak fahaman murid yang akan timbul apabila mempelajari topik nisbah, kadar, dan kadaran di peringkat sekolah menengah.

Hasil kajian juga dapat menambahkan sumbangan kepada kajian yang sedia ada tentang penaakulan perkadaran, khususnya murid sekolah rendah dalam masalah berkaitan nisbah dan kadaran terutama dalam konteks Malaysia. Selain menyumbang pengetahuan, hasil kajian dari beberapa sesi temu bual dapat dimanfaatkan dengan membekalkan informasi yang mendalam kepada pengkaji akan datang tentang penaakulan perkadaran murid seawal usia 11 tahun berkaitan nisbah dan kadaran.

Rumusan

Bab Satu menjelaskan satu persatu perkara yang menjadi asas dan hala tuju kajian ini. Ia menerangkan latar belakang kajian dan mengenal pasti beberapa isu kritikal yang berkaitan dengan bidang kajian. Hanya satu isu kajian yang dipilih dan dihuraikan dengan memberi justifikasi bagi pemilihan isu tersebut. Seterusnya, penerangan tentang kerangka teori, tujuan kajian, dan soalan kajian diperjelaskan. Beberapa definisi istilah yang digunakan dalam kajian turut diterangkan, diikuti dengan limitasi dan delimitasi kajian, dan signifikan kajian. Berdasarkan asas ini, laporan kajian dalam bab seterusnya dijelaskan dengan terperinci yang merangkumi tinjauan literatur dalam Bab Dua, metodologi kajian dalam Bab Tiga, hasil kajian dalam Bab Empat, dan perbincangan, kesimpulan, dan implikasi kajian dalam Bab Lima. Seterusnya, segala rujukan disenaraikan di bawah tajuk Rujukan, manakala bahan sokongan dan tambahan pula dilampirkan di bawah tajuk Lampiran.

Bab 2 Tinjauan Literatur

Pengenalan

Bab Dua mempunyai lapan bahagian utama. Bahagian pertama membincangkan teori konstruktivisme radikal yang digunakan dalam kajian ini. Ini diikuti oleh bahagian kerangka konseptual kajian yang menjelaskan hubungan antara subkonstruk. Dalam bahagian ketiga, huraian tentang konsep matematik seperti konsep nisbah dan kadaran dibincangkan. Bahagian keempat pula membentangkan maksud penaakulan dalam matematik. Bahagian seterusnya menerangkan tentang penaakulan perkadaran yang merangkumi konsep dan komponen yang terlibat dalam penaakulan perkadaran. Jenis masalah penaakulan perkadaran pula dibentangkan dalam bahagian keenam diikuti dengan tinjauan literatur yang relevan dengan penaakulan perkadaran murid melibatkan nisbah dan kadaran dalam bahagian ketujuh. Bahagian akhir merumuskan idea penting bagi Bab Dua dan menerangkan secara ringkas isi kandungan bagi Bab Tiga.

Konstruktivisme Radikal

Satu idea dalam teori mengetahui yang dianjurkan oleh konstruktivisme radikal adalah idea tentang struktur pemikiran atau dengan kata lain bagaimana seseorang individu membina dan mengembangkan pengetahuan yang mana pembinaan pengetahuan adalah bersifat berdaya maju (adaptasi) dan boleh tersilap (Nik Azis, 2014). Von Glasersfeld (1995) menegaskan bahawa pengetahuan yang dibina oleh seseorang individu terbatas pada pengalaman yang dimilikinya dan tidak merujuk sebarang perkara di luar domain pengalaman individu. Terdapat beberapa aspek yang diberi perhatian oleh pengkaji dalam pemilihan konstruktivisme radikal sebagai kerangka teori kajian ini berbanding teori lain yang tiga darinya adalah dari aspek peserta kajian, pengumpulan data, dan menganalisis data.

Dari aspek peserta kajian, teori pemprosesan maklumat yang juga dikenali sebagai neobehaviorisme menganggap pengetahuan matematik yang dimiliki murid seperti kebolehan tentang nombor merupakan kebolehan yang dipunyai murid secara semulajadi dan murid dapat membina perwakilan mental yang menggambarkan atau bersepadan dengan dunia sedia ada, iaitu realiti ontologi. Dalam konteks ini, teori ini menganggap murid itu sebagai satu alat untuk memproses maklumat dan semua aktiviti matematik seseorang murid dapat diwakilkan dalam bahasa komputer secara tepat dan formal (Nik Azis, 2014). Sebaliknya, konstruktivisme radikal menjelaskan pengetahuan matematik yang dipunyai murid merupakan pengetahuan yang dibinanya sendiri melalui refleksi yang berulang kali dan berterusan. Pengetahuan murid tidak menggambarkan realiti ontologi tetapi ia menandakan perkara yang dapat dilakukan murid dalam dunia yang dialaminya (Nik Azis, 2014). Dalam kajian ini pengkaji ingin mengenal pasti penaakulan perkadaran murid semasa menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran berlandaskan tafsiran khusus berkaitan proses pengabstrakan reflektif yang melibatkan akomodasi yang bertentangan dengan teori pemprosesan maklumat yang merupakan pemprosesan formal tentang maklumat yang tersimpan dalam ingatan jangka pendek atau ingatan jangka panjang (Nik Azis, 1999). Maka model yang dimajukan oleh teori pemprosesan maklumat tidak mampu untuk menjelaskan penaakulan perkadaran dimiliki oleh murid. Pemilihan konstruktivisme radikal sebagai kerangka teori kajian dapat membantu pengkaji dalam membekalkan data yang relevan untuk menjawab soalan kajian.

Dari aspek pengumpulan data kajian pula, teori pemprosesan maklumat menggunakan tugasan berasaskan temu bual sebagai sumber penting bagi mengumpulkan data dan tumpuan utama adalah pada prosedur atau algoritma murid dalam menyelesaikan masalah matematik (Nik Azis, 1999). Persoalan asas yang menjadi fokus adalah “Bagaimana murid memproseskan maklumat?” Teori ini memberi tumpuan terhadap proses pemikiran murid dalam menyelesaikan masalah matematik dan pembelajaran tidak dianggap sebagai satu perkara yang penting.

Sebaliknya konstruktivisme radikal menggunakan teknik temu bual klinikal dalam pengumpulan data yang mana teknik ini boleh mengenal pasti dua perkara asas, iaitu bentuk pengetahuan matematik yang dimiliki oleh murid dan cara murid menggunakannya dalam menyelesaikan masalah matematik. Untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran murid, pengkaji perlu menyediakan beberapa tugasan berbeza melibatkan masalah menentukan nilai dan masalah membandingkan nisbah semasa temu bual klinikal bagi membuat rumusan tentang penaakulan perkadaran murid. Melalui temu bual klinikal, pengkaji dapat mengumpul seberapa banyak data yang berkaitan dengan proses pemikiran murid selain membolehkan murid menunjukkan keupayaan menaakul mereka seperti menganalisis dan membuat jangkaan memandangkan ciri temu bual klinikal yang fleksibiliti dalam soalan berstruktur dan kebebasan dalam soalan spontan (Nik Azis, 2014).

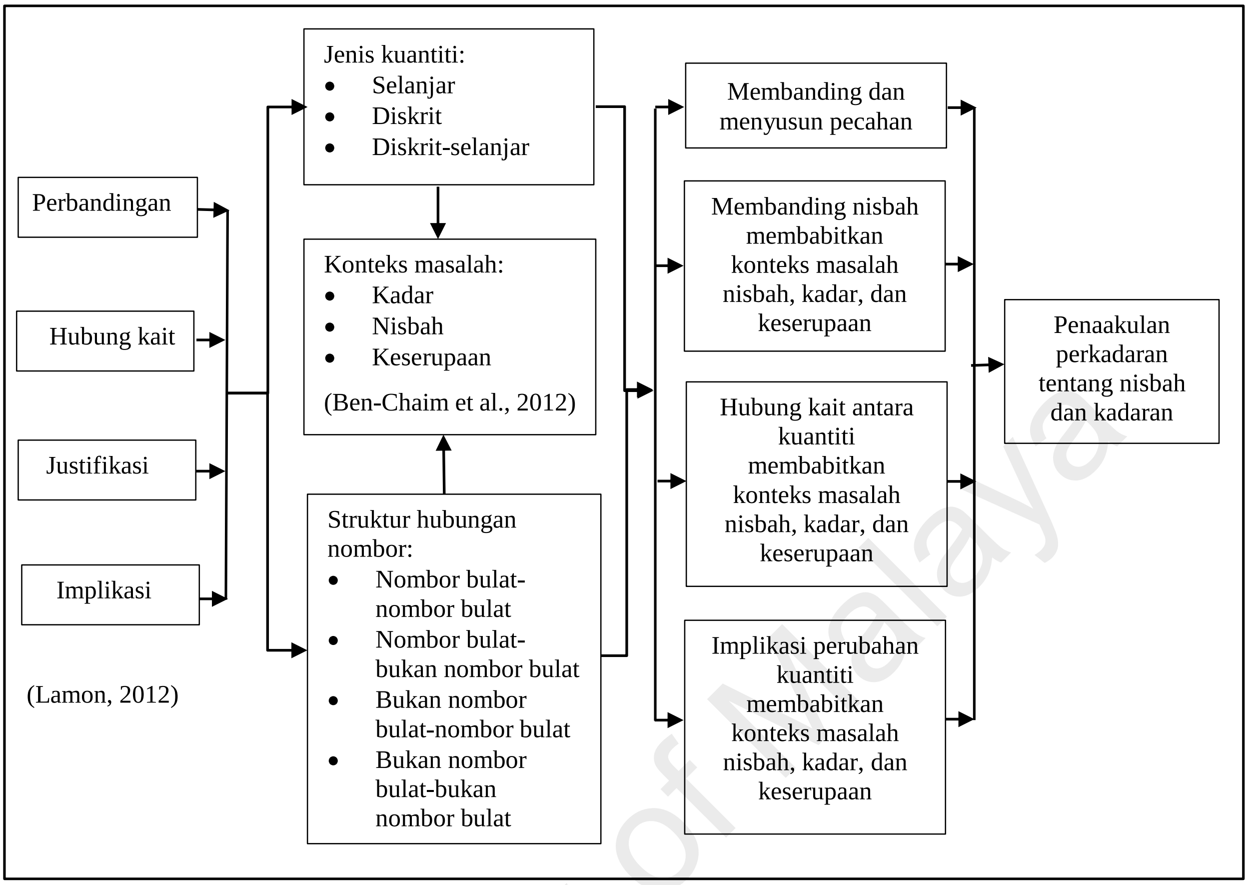
Pemilihan konstruktivisme radikal sebagai asas teori kajian berbanding teori lain juga dilihat dari aspek menganalisis data. Teori pemprosesan maklumat menganalisis data berdasarkan laporan pengkaji semasa atau selepas sesuatu tugasan diselesaikan oleh murid sebelum ditranskripsikan, dikod, dan pengkaji membuat inferens tentang kemahiran yang terlibat dalam proses kognitif murid (Nik Azis, 2014). Manakala bagi konstruktivisme radikal, data dianalisis menggunakan kaedah analisis protokol bertulis yang melibatkan transkripsi data lisan dan bukan lisan kepada bentuk bertulis bagi meneliti tema dan pola yang tersirat dan tersurat. Fokus adalah kepada apakah bentuk pengetahuan yang dimiliki murid dan cara murid membina pengetahuan tersebut. Pengkaji menggunakan pengetahuan sedia adanya, iaitu analisis peringkat pertama untuk menjelaskan pemerhatian, termasuklah pemerhatian ke atas tingkah laku, bahasa, dan interaksi murid sepanjang temu bual. Pengkaji menggunakan analisis peringkat kedua untuk menganalisis pengetahuan matematik yang dipunyai murid. Hubungan timbal balik antara analisis peringkat pertama dan kedua adalah asas dalam penyelidikan konstruktivisme radikal kerana ia menggambarkan bagaimana pengkaji menjalankan operasi dan pemerhatian ke atas murid dan membantu pengkaji menjawab soalan kajian Steffe (2007).

Beberapa kajian lepas berkaitan penaakulan turut menggunakan konstruktivisme radikal sebagai kerangka teori bagi kajian mereka. Antaranya ialah kajian yang dijalankan oleh Nabors (2003) tentang proses pemikiran murid Gred Tujuh semasa menyelesaikan masalah berkaitan penaakulan perkadaran dengan menggunakan perisian komputer. Proses pemikiran murid dianalisis menggunakan operasi skim kognitif yang kemudiannya dikategorikan mengikut tahap penaakulan perkadaran yang dibangunkan oleh Kaput dan West (1994). Satu lagi kajian berkaitan penaakulan yang menggunakan konstruktivisme radikal adalah kajian yang dilakukan oleh Hackenberg (2005) untuk mengenal pasti penaakulan algebra dalam kalangan murid Gred Enam di Georgia bagi pembinaan model bertujuan menentukan hubungan pemboleh ubah yang diketahui dan pemboleh ubah yang tidak diketahui dan melibatkan penyelesaian persamaan linear yang asas, iaitu $ax = b$. Kajian beliau menggunakan kaedah eksperimen pengajaran seperti yang dianjurkan konstruktivisme radikal melibatkan tugasan berkaitan struktur penaakulan pendaraban menggunakan perisian komputer untuk mengenal pasti pengetahuan sedia ada murid tentang penaakulan pendaraban, cara murid membina penaakulan pendaraban, dan bagaimana interaksi guru dan murid boleh menggalakkan penyelesaian masalah persamaan linear. Data yang diperolehi melalui kaedah eksperimen pengajaran dapat membantu Hackenberg menjawab soalan kajian yang dibina.

Selain itu, kajian Aming-Attai (2012) tentang penaakulan pendaraban dalam kalangan murid Gred Enam yang mempunyai kesukaran dalam pembelajaran matematik turut menggunakan konstruktivisme radikal sebagai kerangka teori. Beliau menggabungkan teknik temu bual klinikal dan eksperimen pengajaran sebagai reka bentuk kajian. Dalam kajian ini, beliau tidak menjalankan pengajaran mengikut kurikulum sebaliknya menyediakan masalah matematik dan mengemukakan soalan berbeza aras kesukaran bagi mendorong murid menunjukkan pengetahuan dan konsep pendaraban yang dimiliki.

Kerangka konseptual

Kerangka konseptual kajian ini adalah berlandaskan dua perspektif, iaitu perspektif psikologi dan perspektif matematik. Dari perspektif psikologi, kajian ini menggunakan konstruktivisme radikal dan konsep penaakulan perkadaran yang masing-masing dicadangkan oleh von Glasersfeld (1995) dan Lamon (2012). Bagi konteks masalah penaakulaan perkadaran pula, kajian ini adalah berlandaskan dari perspektif matematik (Ben-Chaim et al., 2012). Konstruktivisme radikal membantu pengkaji dari aspek metodologi seperti reka bentuk kajian, pengumpulan data, dan penganalisaan data. Manakala konsep penaakulan perkadaran dan konteks masalah penaakulaan perkadaran mengandungi beberapa konstruk dan subkonstruk yang dapat membantu pengkaji menjawab soalan kajian. Rajah 2.1 menunjukkan kerangka konseptual yang digunakan dalam kajian ini yang terdiri daripada dua konstruk utama, iaitu proses kognitif dan konstruk matematik. Proses kognitif yang terlibat dalam kajian ini merangkumi empat komponen seperti dicadangkan oleh Lamon (2012), iaitu perbandingan, hubung kait, justifikasi, dan implikasi yang digunakan untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran murid berkaitan nisbah dan kadaran. Manakala konstruk matematik berkaitan nisbah dan kadaran memberi tumpuan kepada konteks masalah penaakulaan perkadaran (Ben-Chaim et al., 2012), struktur hubungan nombor, dan jenis kuantiti untuk membolehkan pengkaji mengumpul maklumat yang kaya dan mendalam.



Rajah 2.1. Kerangka konseptual kajian

Rajah 2.1 menunjukkan hubungan antara proses kognitif dan konstruk matematik yang membolehkan pengkaji mengenal pasti penaakulan perkadaran murid berkaitan nisbah dan kadaran. Komponen proses kognitif yang pertama, iaitu *perbandingan* mengkehendaki murid: (a) membanding pecahan tanpa melibatkan konteks masalah; dan (b) membanding nisbah dalam pelbagai konteks masalah berbeza melibatkan kuantiti selanjar, diskrit, dan diskrit-selanjar yang tidak pernah dipelajari atau terkandung dalam buku teks. Oleh kerana kajian ini menggunakan dua jenis tugasan yang berbeza, iaitu masalah menentukan nilai dan masalah membandingkan nisbah, maka pengkaji dapat mengenal pasti pelbagai bentuk pemikiran yang berbeza ditunjukkan murid dalam menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran. Selain itu, penggunaan pengetahuan dan konsep tertentu yang diaplikasikan murid dalam setiap tindakan dan operasi menyelesaikan masalah turut dapat diperhatikan. Menurut Nik

Azis (2014), apabila murid mengalami sesuatu situasi yang baru, mereka akan meneliti persamaan dan perbezaan antara situasi tersebut dengan pengetahuan sedia ada.

Dalam komponen kedua, pengkaji ingin melihat bagaimana murid membuat *hubung kait* antara kuantiti dalam nisbah dan kadaran yang melibatkan empat struktur hubungan nombor, iaitu nombor bulat-nombor bulat, nombor bulat-bukan nombor bulat, bukan nombor bulat-nombor bulat, dan bukan nombor bulat-bukan nombor bulat semasa menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran. Murid mengaitkan hubungan antara kuantiti dalam nisbah atau kadaran bagi menentukan nilai yang dikehendaki. Misalnya, murid mungkin akan menghubung kait antara dua kuantiti menggunakan pemikiran yang berbeza berdasarkan pengalaman dan pengetahuan sedia ada.

Komponen proses kognitif yang ketiga adalah *justifikasi* bertujuan mengenal pasti bagaimana murid menjelaskan secara mendalam dan terperinci tentang proses asas atau idea yang digunakan untuk memahami sesuatu konsep atau melakukan operasi yang diberi dalam tugasan yang dikemukakan. Komponen ini melibatkan bagaimana murid memberi alasan bagi menyokong pernyataan yang dibuat semasa membanding pecahan dan nisbah, membuat hubung kait antara kuantiti, dan menyatakan kesan terhadap perubahan kuantiti. Dalam konteks ini, murid mungkin akan menginterpretasi proses atau aktiviti yang dilakukannya secara subjektif dan berbeza memandangkan pengetahuan sedia ada dan pengalaman yang berbeza. Selain itu, komponen ini juga saling berkait dengan tiga lagi komponen proses kognitif. Komponen ini memerlukan murid menjustifikasi setiap idea dan penyelesaian yang dilakukan menggunakan kesemua pengalaman dan pengetahuan yang dimiliki. Murid akan diminta mengemukakan alasan terhadap soalan seperti, Bagaimana kamu tahu setiap orang mendapat 1/3 bahagian piza?, Mengapakah kamu lakukan begitu?, Mengapa kamu mengatakan campuran asal lebih rasa oren berbanding campuran kedua?, atau dengan kata lain murid perlu memberi alasan dan memberi penjelasan munasabah terhadap setiap tindakan dan operasi yang dilakukan tentang aktiviti yang difikirkan dan ditunjukkan semasa menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran.

Seterusnya, dalam komponen proses kognitif *implikasi*, murid perlu menyatakan kesan kepada satu kuantiti apabila terdapat perubahan dalam satu kuantiti yang lain. Komponen ini membabitkan jenis kuantiti yang berbeza, iaitu kuantiti selanjar, diskrit, dan diskrit-selanjar. Kesemua komponen proses kognitif yang dijelaskan dapat membantu pengkaji untuk menjelaskan salah satu aspek penting yang terkandung dalam tajuk kajian, iaitu penaakulan perkadaran murid berkaitan nisbah dan kadaran seterusnya mencapai tujuan kajian.

Konstruk matematik melibatkan tiga konteks masalah penaakulan perkadaran seperti yang dicadangkan oleh Ben-Chaim et al. (2012), iaitu konteks masalah nisbah, konteks masalah kadar, dan konteks masalah keserupaan. Konteks masalah nisbah memerlukan murid membuat perbandingan dua situasi bagi menentukan hubungan antara kuantiti dalam nisbah sama ada kuantiti yang sama atau berlainan. Seterusnya, konteks masalah kadar atau ketumpatan adalah merujuk membandingkan dua kuantiti yang berlainan unit tetapi saling berkait bagi membentuk satu kuantiti lain (Ben-Chaim et al., 2012). Bagi konteks masalah keserupaan, murid dikehendaki membandingkan atau mengenal pasti skala pembesaran dua objek yang mana dua kuantiti dalam setiap nisbah adalah berkait secara konseptual, namun bukan melibatkan bahagian daripada satu keseluruhan objek.

Konsep Nisbah dan Kadaran

Konsep Nisbah. Nisbah boleh ditafsirkan dengan pelbagai makna mengikut konteks di mana ia digunakan. Terdapat pelbagai definisi tentang nisbah yang ditafsirkan pengkaji lepas sejak tiga dekad yang lalu (Ben-Chaim et al., 2012; Freudenthal, 1983; Lamon, 2012; Van de Walle et al., 2010). Lamon (2007) dan Van de Walle et al. (2010) misalnya mendefinisikan nisbah sebagai membandingkan dua kuantiti secara relatif dalam situasi tertentu, yang mana hubungan relatif antara kuantiti tersebut boleh diaplikasikan dalam situasi yang berlainan. Secara matematik nisbah *a* kepada *b* boleh ditulis dengan beberapa tata tanda seperti *a* : *b*, *a*/*b*, dan $a \rightarrow b$ dengan pelbagai sebutan lisan diberikan kepada tata tanda tersebut seperti *a* kepada *b*, *a* per *b*, *a* untuk *b*, *a* bagi setiap *b*, untuk setiap *b* ada *a*, dan nisbah *a* kepada *b* (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2012) dengan tafsiran makna yang berbeza.

Pengkaji lepas mengkategorikan nisbah kepada beberapa jenis, iaitu nisbah bahagian-keseluruhan, nisbah bahagian-bahagian, dan kadar sebagai nisbah (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2012; Van de Walle et al., 2010). Nisbah bahagian-keseluruhan adalah nisbah yang membandingkan satu bahagian daripada satu keseluruhan benda, manakala satu nisbah dikatakan nisbah bahagian-bahagian apabila satu bahagian daripada satu keseluruhan benda dibandingkan dengan satu lagi bahagian lain daripada satu keseluruhan benda yang sama (Freudenthal, 1983). Sebagai contoh, satu karton air kotak mengandungi lima kotak susu coklat dan tujuh kotak susu putih. Perbandingan nisbah bahagian-bahagian, iaitu 5 : 7 adalah merujuk perbandingan lima kotak susu coklat kepada tujuh kotak susu putih, manakala nisbah 7 : 5 adalah merujuk perbandingan tujuh kotak susu putih kepada lima kotak susu coklat. Bagi nisbah bahagian-keseluruhan pula, nisbah 7 : 12 bermaksud membandingkan tujuh kotak susu putih kepada keseluruhan bilangan susu kotak, iaitu 12. Begitu juga nisbah 5 : 12 yang bermaksud membandingkan lima kotak susu putih kepada keseluruhan bilangan susu kotak. Kedua-dua jenis nisbah ini hanya melibatkan dua kuantiti *ekstensif* yang terpakai bagi situasi khusus seperti di atas dan kebiasaannya tidak dilanjutkan kepada satu situasi yang lain (Lamon, 2012). Oleh kerana subkonstruk pecahan juga adalah nisbah bahagian-keseluruhan, maka setiap pecahan adalah nisbah tetapi bukan semua nisbah merupakan pecahan (Van de Walle et al., 2010). Menurut Freudenthal (1983), dengan mewakilkan nisbah sebagai pecahan, sifat pengecilan dan pembesaran pecahan boleh diaplikasikan dalam situasi yang berbeza. Kedua-dua jenis nisbah yang dijelaskan di atas melibatkan perbandingan dua kuantiti dari jenis atau unit yang sama, namun apabila membandingkan dua kuantiti dari jenis atau unit yang berbeza, nisbah tersebut dinamakan sebagai kadar (Freudenthal, 1983). Freudenthal merujuk kadar sebagai hasil daripada hubungan pendaraban yang menggambarkan sifat semula jadi sesuatu fenomena. Misalnya, RM3 bagi setiap jam adalah kadar yang menerangkan hubungan antara kos dalam ringgit dan masa dalam jam untuk semua keadaan seperti berikut: RM6 untuk 2 jam, RM24 untuk 8 jam, RM54 untuk 18 jam, dan seterusnya. Dalam situasi ini kadar sebagai nisbah melibatkan dua kuantiti *ekstensif* yang berbeza unit (ringgit dan jam) membentuk satu kuantiti *intensif*, iaitu "ringgit per jam".

Ringkasnya terdapat pelbagai definisi nisbah yang diberikan oleh kajian lepas termasuklah bahagian-keseluruhan, bahagian-bahagian, dan kadar sebagai nisbah. Kajian ini tidak menggunakan mana-mana notasi nisbah secara langsung, sebaliknya menggunakan perwakilan notasi tersebut secara perbandingan gambar rajah atau perbandingan dua situasi berayat dalam tugasan yang diberi. Maka definisi nisbah dilihat dari perspektif murid dan bukannya daripada definisi yang diberikan oleh pengkaji lepas. Kajian ini melihat definisi nisbah sebagai pengetahuan yang dimiliki dan dibina secara aktif berdasarkan pengalaman peserta kajian.

Konsep Kadaran. Kadaran merujuk kesetaraan antara dua nisbah melibatkan hubungan antara empat kuantiti, yang mana nisbah bagi pasangan kuantiti yang pertama adalah sama dengan nisbah pasangan kuantiti yang kedua dan ditandai sebagai $a : b = c : d$ (Van de Walle et al., 2010). Ini bermakna bahawa kesemua pembolehubah, a, b, c, dan d ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) akan membentuk hubungan yang berkadaran dalam dua keadaan, iaitu kadaran langsung dan kadaran songsang. Pertama, kadaran langsung berlaku apabila terdapat perubahan kuantitatif antara dua kuantiti secara seragam (Ben-Chaim et al., 2012) dengan arah perubahan yang sama. Ini bermakna bagi dua nisbah $a : b$ dan $c : d$, jika kuantiti a didarabkan dengan faktor m (m ≠ 0), maka kuantiti b juga mesti didarabkan dengan faktor pemalar yang sama. Dalam kes ini, hasil bahagi dua kuantiti pasangan nisbah pertama adalah sepadan dengan hasil bahagi dua kuantiti pasangan nisbah kedua.

Kedua, kadaran songsang berlaku apabila terdapat perubahan kuantitatif antara dua kuantiti secara seragam tetapi dalam arah perubahan yang bertentangan, sama ada secara mendarab atau membahagi (Ben-Chaim et al., 2012). Ini bermakna jika kuantiti a didarabkan dengan faktor m (m ≠ 0), maka kuantiti b mesti dibahagikan dengan faktor pemalar yang sama. Dalam hal ini, hasil darab dua kuantiti bagi pasangan nisbah pertama adalah sama dengan hasil darab dua kuantiti dalam pasangan kedua. Kadaran songsang dapat dilihat dalam hubungan antara bilangan pekerja dan masa (dalam hari) bekerja yang diperlukan untuk sesuatu tugas. Jika bilangan pekerja meningkat sebanyak faktor *m*, maka masa (dalam hari) bekerja yang diperlukan akan berkurang sebanyak faktor *m* dan begitu juga sebaliknya. Kajian ini membabitkan kedua-dua keadaan, iaitu kadaran langsung dan kadaran songsang.

Penaakulan

Pemahaman yang dimiliki murid dalam pembelajaran matematik adalah sangat penting kerana ia dapat membantu untuk meneroka bagaimana murid berfikir dan apa yang menggalakkan mereka berfikir sedemikian rupa sehingga boleh mempamerkan pemahaman dengan jelas. Secara umum Stylianides (2009) menakrifkan penaakulan sebagai proses menyelaraskan bukti, kepercayaan, dan idea untuk membuat kesimpulan tentang apa yang tepat atau benar. Dari sudut yang berbeza, Rips (1994) pula menerangkan penaakulan sebagai proses mental yang mencipta idea baru berdasarkan idea yang tersedia ada. Dalam nada yang sama, Nik Azis (2014) pula mentakrifkan penaakulan sebagai sebahagian aktiviti berfikir yang membabitkan semua perkaitan antara pengalaman dan pengetahuan yang digunakan oleh individu untuk menjelaskan perkara yang diperhatikan, difikirkan, dimanipulasikan, dan disimpulkan. Maka secara dasarnya, keupayaan penaakulan yang baik adalah prasyarat murid untuk membina pemahaman.

Ball dan Bass (2003) membincangkan kepentingan penaakulan dalam konteks matematik sekolah. Mereka menegaskan bahawa pemahaman matematik adalah mustahil tanpa memberi penekanan terhadap elemen penaakulan yang mana menurut mereka tanpa penaakulan, pemahaman matematik hanya merupakan satu prosedur atau instrumental. Menurut Ball dan Bass lagi, terdapat beberapa kepentingan penaakulan dalam matematik. Pertama, tanpa menaakul murid sukar untuk menggunakan pengetahuan sedia ada kepada satu situasi baru disebabkan tidak memahami konsep matematik. Selain itu, murid yang mempunyai kemahiran menaakul mudah membina semula pengetahuan walaupun mereka lupa prosedur bagi menyelesaikan masalah matematik. Ball dan Bass (2003) juga turut membezakan antara "penaakulan untuk menyelidiki" (*reasoning for inquiry*) dan "penaakulan untuk justifikasi" (*reasoning for justification*). Penaakulan untuk menyelidiki merujuk kepada penaakulan yang membolehkan penemuan dan penerokaan idea matematik yang baru manakala penaakulan untuk justifikasi pula merujuk kepada penaakulan yang berfungsi untuk memberi justifikasi, menjelaskan alasan, dan membuktikan pernyataan matematik. Kajian ini memfokuskan penaakulan untuk justifikasi bagi menjawab soalan kajian yang dibina. Francisco dan Maher (2005) turut membincangkan kepentingan menekankan justifikasi dalam matematik di peringkat sekolah rendah dan bukannya pembuktian matematik secara formal. Mereka menerangkan bahawa pembuktian matematik secara formal adalah sukar untuk murid terutama di peringkat rendah tetapi jika murid digalakkan untuk menjustifikasi penyelesaian yang dibuat dengan cara yang meyakinkan, kelak murid dengan sendirinya dapat berhadapan dengan aktiviti berbentuk pembuktian tanpa menghadapi masalah.

Penaakulan Perkadaran

Penaakulan perkadaran adalah sukar untuk diterangkan secara ringkas kerana ia bukanlah semata-mata melibatkan sama ada murid boleh atau tidak boleh menyelesaikan sesuatu masalah. Kajian lepas mendapati pengkaji terdahulu memberikan definisi penaakulan perkadaran dari pelbagai aspek. Lesh et al. (1988) misalnya mendefinisikan penaakulan perkadaran sebagai proses asimilasi mental dan sintesis beberapa nisbah dalam kadaran. Menurut mereka lagi, penaakulan perkadaran merupakan salah satu cabang bagi penaakulan secara matematik yang membabitkan perbandingan secara multiplikatif, membuat kesimpulan, dan ramalan. Dalam nada yang sama, Hart (1988) pula mentafsirkan penaakulan perkadaran sebagai proses kognitif yang melibatkan aplikasi tentang konsep kadaran.

Lobato dan Ellis (2010) berpendapat bahawa terdapat beberapa perkara asas bagi penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran, iaitu mempertimbangkan sesuatu kuantiti dari aspek relatif dan bukannya secara mutlak, perubahan menaakul secara menambah kepada menaakul secara multiplikatif, memahami nisbah sebagai perbandingan secara multiplikatif atau unit komposit, dan menghubung kaitkan nisbah, pecahan, dan hasil bahagi. Ini turut diakui oleh Lamon (2007, 2012) yang menjelaskan bahawa penaakulan perkadaran melibatkan individu dengan “sengaja” menggunakan hubungan multiplikatif untuk membandingkan kuantiti dan meramalkan nilai satu kuantiti berdasarkan nilai satu kuantiti yang lain. Istilah “sengaja” digunakan untuk menjelaskan bahawa individu yang menaakul sedar dan tahu apa yang difikirkannya berserta alasan yang munasabah tentang hubungan multiplikatif berbanding prosedural menyelesaikan masalah nisbah dan kadaran secara formal atau darab silang (Ontario Ministry Of Education, 2013). Kajian lepas menggambarkan beberapa pengkaji (Lamon, 2012; Lesh et al., 1988; Lobato & Ellis, 2010) menakrifkan penaakulan perkadaran dengan meneliti proses mental bagi mengenal pasti aspek berkaitan dengan konsep nisbah dan kadaran yang boleh diperhatikan.

Namun, beberapa pengkaji lain memberikan gambaran penaakulan perkadaran dari aspek yang berbeza, yang mana penaakulan perkadaran bukan sahaja memerlukan individu menentukan nilai yang ingin diketahui atau membuat inferens tentang ketidaksamaan antara nisbah, malah boleh membezakan masalah yang melibatkan kadaran atau sebaliknya dan menentukan situasi yang mempunyai hubungan multiplikatif atau penambahan (Karplus et al., 1983; Post et al., 1988). Post et al. (1988) dan Lamon (2007) turut menyediakan satu senarai lengkap menggambarkan beberapa kebolehan penaakulan perkadaran seperti berikut:

i. Menyatakan makna kuantiti dan pembolehubah menggunakan pemalar perkadaran dalam pelbagai konteks serta berkeupayaan mengenal pasti kedua-dua hubungan skalar dan fungsi membabitkan struktur nombor integer dan bukan integer.
ii. Membezakan situasi melibatkan multiplikatif dan penambahan.
iii. Boleh menggunakan dan menghubungkan pelbagai perwakilan meliputi fungsi, jadual, graf, dan diagram. Ini termasuklah hubung kait antara pecahan, nisbah, kadar, perpuluhan, dan peratusan yang mana pecahan dan perpuluhan dianggap sebagai salah satu nisbah.
iv. Boleh memberi justifikasi secara kualitatif dan kuantitatif tentang situasi yang melibatkan perkadaran. Justifikasi secara kualitatif melibatkan pemahaman terhadap perubahan arah sesuatu kuantiti yang meliputi perubahan dalam pengangka dan penyebut bagi sesuatu pecahan (Lamon, 2012). Terdapat bukti menunjukkan bahawa justifikasi secara kualitatif

yang dikemukakan oleh murid adalah selari dengan justifikasi yang diberi secara kuantitatif membabitkan perubahan magnitud kuantiti mengakibatkan perubahan (Post et al., 1988).

v. Mengemukakan sama ada perkataan atau pernyataan berkaitan perkadaran. Perkataan atau pernyataan yang dikemukakan memerlukan murid memahami konsep dan hubungan nisbah dan kadaran.

Secara khusus, Lamon (2012) mencadangkan enam komponen yang terlibat dalam penaakulan perkadaran, iaitu pemikiran relatif, unit komposit, pemetakan, kepekaan nisbah, kuantiti dan perubahan, dan subkonstruk pecahan.

Pemikiran relatif. Kebolehan menganalisa perubahan sesuatu kuantiti dalam nisbah secara relatif merupakan salah satu kemahiran berfikir yang diperlukan dalam penaakulan perkadaran (Bright, Joyner, & Wallis, 2003; Hilton, Hilton, Dole, & Goos, 2013; Lamon, 2012). Menurut Lamon (2012), pemikiran relatif merujuk fungsi kognitif yang menggambarkan kebolehan murid untuk menganalisis perubahan menggunakan pemikiran multiplikatif yang melibatkan operasi pendaraban atau pembahagian. Kebolehan ini mengkehendaki murid memahami dan mengenal pasti perbezaan antara perubahan kuantiti secara mutlak atau perubahan kuantiti secara relatif. Murid yang menentukan jumlah sebenar perubahan antara dua kuantiti sama ada secara menambah atau menolak dikatakan berfikir secara mutlak dan tidak berfikir secara relatif.

Lobato dan Ellis (2010) turut mengemukakan pendapat yang sama, yang mana murid yang membuat perbandingan kuantiti dalam nisbah secara multiplikatif dapat menjawab persoalan tentang “berapa kali besar” atau “berapa banyak satu bahagian dalam satu bahagian yang lain”. Sebaliknya, perbandingan kuantiti dalam nisbah secara mutlak hanya merujuk kepada persoalan tentang “berapa besar atau kecil satu kuantiti berbanding satu kuantiti lain”. Sebagai contoh, murid yang berfikir secara relatif atau membandingkan secara multiplikatif dapat menyatakan hubungan antara dua pecahan setara, iaitu 3/5 adalah separuh daripada 6/10 atau membandingkan kepadatan satu lif yang mengandungi tiga orang dengan dua lif yang mengandungi lapan orang di dalamnya.

Menurut Thompson dan Saldanha (2003), dua skim multiplikatif yang sering digunakan murid apabila menyelesaikan pelbagai masalah melibatkan konteks nisbah, iaitu *multiplikatif sebagai ulangan penambahan* dan *multiplikatif sebagai kali besar*. Oleh kerana *multiplikatif sebagai ulangan penambahan* adalah berasaskan kepada replikasi unit secara membilang, maka skim ini dianggap sebagai penambahan dan bukannya multiplikatif (Heinz, 2000). Sebaliknya, bagi skim *multiplikatif sebagai kali besar*, murid memfokuskan kepada hasil darab yang dianggap berapa kali besar atau banyak satu kuantiti berbanding satu kuantiti yang lain. Dengan kata lain, hasil darab dua kuantiti *a* dan *b* bagi nisbah a : b ditafsirkan sebagai *a* kali besar berbanding *b* dan *b* kali besar berbanding *a*.

Maka pemikiran relatif adalah sinonim dengan perbandingan secara multiplikatif selain menjadi asas bagi konsep nisbah. Konsep nisbah tidak dapat difahami oleh murid sekiranya mereka hanya dapat mengenal pasti perubahan secara mutlak. Walaupun nisbah memerlukan murid berfikir secara multiplikatif dan merupakan indeks perbandingan yang eksplisit, namun kajian lepas mendapati murid sering mengabaikannya dan lebih kerap menggunakan perbandingan secara penambahan (Misailidou & Williams, 2003; Nikula, 2010; Singh, 2000) untuk menyelesaikan masalah berkaitan nisbah. Sekiranya murid dapat mengenal pasti dan memahami perbezaan antara pemikiran relatif dan pemikiran mutlak, maka murid tersebut telah mula menaakul secara perkadaran.

Menurut Lamon (2012), pemikiran relatif harus diterap pada murid bermula di awal pembelajaran pecahan memandangkan ia diperlukan dalam memahami beberapa idea berkaitan pecahan. Oleh kerana makna bahagian-keseluruhan dalam pecahan juga dianggap sebagai nisbah, maka pembelajaran pecahan dapat membangunkan pemikiran relatif murid dengan memberi penekanan dalam lima perkara berikut: (a) hubungan antara saiz bahagian dan bilangan bahagian; (b) keperluan dalam membandingkan pecahan yang mempunyai unit yang sama; (c) makna nombor pecahan; (d) saiz nombor pecahan; dan (e) konsep perwakilan pecahan setara.

Namun murid kerap menghadapi kesukaran bagi membezakan situasi masalah yang memerlukan pemikiran relatif atau pemikiran mutlak (Lamon, 2012; Lobato & Ellis, 2010). Menurut Lamon (2012) kesukaran tersebut mempunyai hubung kait dengan struktur ayat yang ditanya kepada murid iaitu, sama ada struktur ayat tersebut membolehkan murid berfikir secara relatif atau sebaliknya. Sebagai contoh, dalam membandingkan panjang antara dua objek A dan B, soalan "Berapa *lebih* panjang A berbanding B?" atau "Berapa *kurang* panjang B berbanding A?" akan membuatkan murid berfikir secara mutlak. Walau bagaimanapun, jika soalan "Berapa panjang A berbanding B?" atau "Berapa pendek B berbanding A?" dikemukakan, murid cenderung menggunakan pemikiran relatif. Maka, penggunaan struktur ayat mengikut konteks yang bersesuaian dalam mengemukakan soalan kepada murid memainkan peranan yang penting dalam menggalakkkan murid berfikir secara relatif (Lamon, 2012).

Unit komposit. Unit komposit merupakan satu proses kognitif yang melibatkan murid menggambarkan secara konseptual beberapa kumpulan sama saiz atau sama bilangan benda dalam pelbagai bentuk atau susunan sebagai satu unit (Lamon, 2012). Misalnya, bagi masalah "Jika harga tiga oren adalah RM1.20, berapa harga bagi sembilan oren?", pendekatan yang sering digunakan oleh murid adalah menentukan harga bagi seunit oren, iaitu 40 sen dan kemudian mendarabkan harga seunit oren dengan sembilan oren. Dengan menggunakan konsep unit komposit, murid perlu membayangkan tiga oren dalam satu kumpulan, iaitu kumpulan bertiga dan menganggap kumpulan tersebut sebagai satu unit. Murid seterusnya mengenal pasti bahawa sembilan oren adalah tiga kumpulan bertiga dan mendarabkan tiga dengan RM1.20. Namun, menurut Lamon (2007), murid jarang menggunakan konsep unit komposit dalam menyelesaikan masalah nisbah dan kadaran kerana lebih selesa mengikuti prosedur yang diajar atau diperkenalkan di sekolah. Beliau juga berpendapat bahawa kemampuan murid menggunakan unit komposit bukan sahaja menggambarkan murid boleh menaakul tetapi dapat mengembangkan idea matematik yang lebih canggih.

Konsep unit komposit memainkan peranan penting dalam beberapa proses pembelajaran pecahan, seperti perkongsian sama rata dan kesetaraan pecahan (Lamon, 2012). Murid yang boleh menggunakan unit komposit secara fleksibel lebih mudah memahami konsep kesetaraan pecahan. Aktiviti berhujah secara lisan dengan meminta murid menyatakan beberapa kesetaraan pecahan yang mewakili kuantiti yang sama dapat mengembangkan pengetahuan intuitif murid dan menggalakkan fleksibiliti dalam unit komposit (Hackenberg, 2010; Lamon, 2012).

Lobato dan Ellis (2010) pula menjelaskan konsep unit komposit yang terkandung dalam peringkat kedua Model Peralihan Penaakulan Perkadaran Empat Peringkat yang dibangunkan mereka. Menurut mereka, unit komposit adalah penggabungan dua kuantiti yang berlainan unit untuk mewujudkan satu unit baru. Pendedahan konsep unit komposit perlu dibangunkan seawal mungkin dalam pembelajaran nisbah dan kadaran agar dapat mengembangkan penaakulan perkadaran murid. Ini turut dinyatakan oleh NCTM (2014) bahawa keupayaan murid dalam menggunakan unit komposit merupakan salah satu perbezaan paling ketara antara murid yang memiliki dan tidak memiliki penaakulan perkadaran. Ini kerana, murid beralih menaakul daripada pengulangan unit komposit bagi membentuk kumpulan yang dikehendaki dengan mengekalkan hubungan perkadaran secara mendarab dan membahagi setiap kuantiti dengan faktor yang sama. Peralihan ini menggambarkan transisi pemahaman murid tentang invarians bagi nisbah dan mengenal pasti situasi yang melibatkan penaakulan perkadaran atau sebaliknya.

Pemetakan. Menurut Lamon (2012), pemetakan adalah proses membahagikan satu keseluruhan objek atau beberapa objek kepada beberapa bahagian secara sama rata. Dengan kata lain, setiap bahagian yang dipetak tidak bertindih antara satu dengan lain. Aktiviti pemetakan merupakan aktiviti yang berkait rapat dengan pengalaman seharian murid yang melibatkan perkongsian sama rata, seperti berkongsi coklat, roti, atau biskut dan dapat memperkembangkan pengetahuan nombor bulat kepada pecahan. Proses pemetakan sangat berkait rapat dengan pembelajaran pecahan dan nombor perpuluhan (Lamon, 2012; Steffe & Olive, 2010), selain menjadi asas kepada pemahaman bagi konsep kesetaraan. Di awal pembelajaran pecahan, murid akan membahagikan satu keseluruhan kepada bahagian yang sama saiz, tetapi apabila murid mahir dengan konsep pemetakan, murid akan menggunakan strategi pemetakan yang paling efisien (Lamon, 2012; Steffe & Olive, 2010). Misalnya, jika empat orang berkongsi sama rata lima piza, murid akan mula memotong setiap piza kepada empat bahagian dan mengedarkan satu bahagian daripada setiap satu keseluruhan piza kepada setiap orang. Murid kemudiannya akan mengenal pasti kaedah yang lebih efisien dengan mengagihkan setiap keseluruhan piza untuk setiap orang, sebelum membahagikan baki satu keseluruhan piza kepada empat keping.

Bagi Steffe dan Olive (2010) pula, pemetakan merupakan konsep asas kepada pecahan, yang mana murid yang mempunyai skim pemetakan menggambarkan keupayaan mereka berfikir berapa banyak bahagian dalam satu bahagian keseluruhan yang dipetak. Skim ini bergantung kepada operasi murid mengecam beberapa perkara seperti berikut: (a) mengenal pasti satu keseluruhan benda; (b) membahagi satu keseluruhan kepada bahagian yang sama saiz; dan (c) mengagihkan bahagian-keseluruhan. Menurut mereka lagi, memahami pemetakan satu benda atau satu unit ukuran bukan sekadar melibatkan memotong atau membahagi kepada bahagian yang lebih kecil, malah lebih daripada itu, antaranya “bagaimana subbahagian itu dinamakan?”, “bagaimana saiz subbahagian yang berbeza berhubung kait?”, dan “berapa kecil atau besar subbahagian?”.

Pitkethly dan Hunting (1996) turut mengenal pasti tiga skim pemetakan namun berbeza dengan skim yang dicadangkan oleh Steffe dan Olive seperti berikut: (a) berkongsi sama rata keseluruhan satu set objek dengan mengedarkan setiap satu objek yang sama kepada setiap orang secara kitaran sehingga semua objek habis; (b) membahagi dua satu keseluruhan objek atau set objek melalui proses pemetakan; dan (c) melipat atau memisahkan objek atau unit berulang kali untuk menghasilkan pecahan.

Pothier dan Sawada (1983) pula telah mengenal pasti empat tahap keupayaan murid dalam pemetakan. Pada tahap pertama, murid mempunyai pengalaman dalam berkongsi objek dan boleh memetakkan satu keseluruhan objek menjadi separuh atau suku, namun pemetakan yang dilakukan adalah tidak sekata. Dalam tahap kedua pula, murid menggunakan pecahan yang penyebutnya adalah kuasa dua seperti, lapan dan enam belas melalui proses membahagi dua satu keseluruhan objek secara berulang. Seterusnya, pada tahap ketiga murid mula mempertimbangkan kesamaan atau kesamarataan bagi setiap bahagian yang dipetak dari satu keseluruhan objek dan berkeupayaan membentuk pecahan dengan penyebut genap. Tahap akhir menunjukkan pengetahuan murid tidak hanya terbatas kepada melalui proses membahagi dua satu keseluruhan objek secara berulang, malah melibatkan pecahan yang penyebutnya ganjil.

Kuantiti dan Perubahan. Kuantiti merujuk ukuran kualiti bagi sesuatu objek, sama ada kualiti tersebut boleh diukur atau sebaliknya (Lamon, 2012). Murid yang berkeupayaan menghubung kaitkan antara kuantiti yang tidak boleh diukur dikatakan mempunyai pengetahuan penaakulan perkadaran. Misalnya, murid menyatakan kuantiti menggunakan perkataan "lebih", "sedikit", atau "sama" bagi menggambarkan kuantiti yang tidak boleh diukur, seperti membandingkan rasa jus oren yang berlainan kepekatan. Konsep kuantiti dan perubahan melibatkan murid berfikir bagaimana saling kait antara kuantiti dan kovarians antara kuantiti (Lobato & Ellis, 2010) atau dengan bahasa mudahnya, apakah hubungan antara dua kuantiti dan bagaimana dua kuantiti tersebut berubah secara serentak. Pengkaji lepas (Lamon, 2012; Lobato & Ellis, 2010) mencadangkan dua jenis varians dalam penaakulan perkadaran, iaitu kovarians dan invarians. Kovarians bagi struktur perkadaran merupakan satu hubungan, yang mana jika satu kuantiti dalam satu nisbah yang didarab atau dibahagi dengan satu faktor tertentu, maka satu lagi kuantiti dalam nisbah yang sama perlu didarab atau dibahagi dengan faktor yang sama sehingga wujud nisbah baru yang invarians, iaitu nisbah yang masih mengekalkan hubungan perkadaran (Lamon, 2012; Lobato & Ellis, 2010).

Proses menganalisis tentang apa yang berubah dan apa yang tidak berubah dalam sesuatu kuantiti sangat penting memandangkan murid sering mengalami pengalaman yang membabitkan konsep kuantiti dan perubahan kehidupan seharian. Sebagai contoh, murid yang membancuh pekatan oren dengan air boleh menjangkakan dan mengenal pasti perubahan rasa jus oren sekiranya kuantiti pekatan oren ditambah atau dikurangkan. Begitu juga dengan perubahan rasa jus oren jika kuantiti air yang ditambah atau dikurangkan. Murid dengan mudah berkeupayaan memberi alasan tentang perubahan kuantiti yang berlaku berdasarkan pengetahuan sedia ada dan pengalaman mereka.

Lamon (2012) mencadangkan sembilan situasi berbeza berkaitan kuantiti dan perubahan yang boleh dikemukakan kepada murid, yang mana dapat menggalakkan murid mengemukakan hujah, justifikasi, atau alasan atau dengan kata lain murid bukan sahaja memahami perubahan kuantiti di peringkat permukaan tetapi memahami apa yang tersirat. Dalam konteks masalah menentukan kuantiti biskut yang diperoleh untuk setiap orang, sembilan situasi perubahan yang dicadangkan adalah seperti berikut: (a) kuantiti biskut bertambah, kuantiti orang bertambah; (b) kuantiti biskut bertambah, kuantiti orang berkurang; (c) kuantiti biskut bertambah, kuantiti orang kekal sama; (d) kuantiti biskut berkurang, kuantiti orang berkurang; (e) kuantiti biskut berkurang, kuantiti orang berkurang; (f) kuantiti biskut berkurang, kuantiti orang kekal sama; (g) kuantiti biskut kekal sama, kuantiti orang bertambah; (h) kuantiti biskut kekal sama, kuantiti orang berkurang; dan (i) kuantiti biskut kekal sama, kuantiti orang kekal sama.

Pemahaman berkaitan perubahan kuantiti juga harus melibatkan perbincangan tentang perubahan arah, perubahan bentuk atau saiz, dan kadar bagi perubahan selain murid perlu didedahkan dengan penggunaan simbol anak panah bagi menggambarkan arah perubahan kuantiti bertujuan memberi fokus kepada hubungan kuantiti dan bukannya kepada perubahan angka (Lamon, 2007). Penaakulan perkadaran bukan sahaja memerlukan murid untuk menilai dan membandingkan hubungan antara dua kuantiti, malah mengenal pasti bagaimana kuantiti ini berubah. NCTM (2014) telah mengenal pasti beberapa asas untuk memahami perubahan kuantiti dengan cara berikut: (a) penaakulan perkadaran berkaitan nisbah melibatkan murid mempertimbangkan dan mengkoordinasi dua kuantiti; (b) membentuk satu nisbah dengan memahami kesan perubahan satu kuantiti terhadap kuantiti yang lain; dan (c) kadaran adalah hubungan kesetaraan antara dua nisbah, yang mana nisbah bagi dua kuantiti sentiasa malar dengan perubahan kuantiti yang sepadan.

Kepekaan Nisbah. Lamon (2012) menakrifkan kepekaan nisbah merujuk intuitif individu yang diperoleh melalui pengalaman melibatkan beberapa konteks masalah yang sesuai. Memupuk kepekaan nisbah kepada murid adalah penting dalam penaakulan perkadaran memandangkan makna nisbah dan kadaran adalah bergantung kepada konteks masalah yang dikemukakan. Oleh kerana nisbah mengaitkan dua atau lebih daripada dua kuantiti dan saling berhubung dengan kadaran, maka penekanan pembelajaran harus bertumpu kepada keupayaan murid menjelaskan hubungan antara kuantiti dalam nisbah. Satu cara untuk meningkatkan kepekaan nisbah adalah melalui pembinaan perwakilan pecahan (McIntosh, 2013) bagi membiasakan murid menilai dan menyusun urutan nisbah bagi satu set nisbah setara. Apabila murid mula mengenal pasti hubungan yang diwakili oleh nisbah, mereka kemudiannya dapat menentukan bagaimana nisbah tersebut boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah.

Langrall dan Swafford (2000) berpendapat bahawa untuk mengembangkan kepekaan nisbah, murid harus boleh membezakan antara perbandingan bahagian-keseluruhan dan bahagian-bahagian. Mereka memberi tumpuan kepada objek diskrit kerana murid seawal usia enam tahun berkeupayaan mengenal pasti perbezaan dan membuat perbandingan secara intuitif. Pemahaman ini akan terus berkekalan sehingga murid didedahkan kepada bahan manipulatif atau model, yang mana murid akan dapat melihat hubungan secara konkrit dan bukan melibatkan angka sahaja. Apabila murid telah biasa dengan bahan manipulatif atau model, mereka seterusnya beralih kepada penggunaan label atau tanda yang mewakili hubungan kuantiti. Penekanan terhadap hubungan antara kuantiti dalam nisbah perlu diberi keutamaan berbanding mencari nilai yang dikehendaki.

Terdapat beberapa konteks berkaitan nisbah seperti kebolehlanjutan (*extendibility*), keterturunan (*reducibility*), kebolehbalikan (*reversibility*), kehomogenan, dan kebolehbahagian (*divisibility*) yang perlu diambil kira kerana dapat meningkatkan pemahaman tentang hubungan nisbah yang diwakili. Kebolehlanjutan bermakna sesuatu nisbah boleh digunakan untuk mewakilkan hubungan perkadaran bagi membentuk satu nisbah yang baru dan merupakan asas sebelum murid memahami nisbah setara (McIntosh, 2013).

Keterturunan satu nisbah pula membolehkam murid memahami situasi yang melibatkan nisbah yang diringkaskan atau dipermudahkan kepada gandaan yang boleh digambarkan dengan mudah. Seterusnya idea tentang kebolehbalikan pula adalah mengubah kedudukan kuantiti dalam satu nisbah untuk menerangkan hubungan dari perspektif yang berbeza. Sebagai contoh, bagi nisbah satu guli merah kepada empat guli biru (1 : 4) memberi maksud bagi setiap satu guli merah terdapat empat guli biru atau apabila diterbalikkan (4 : 1) bermaksud bagi setiap empat guli biru terdapat satu guli merah. Kedua-dua nisbah ini penting untuk membezakan salingan pecahan dan kebolehterbalikan bagi nisbah yang berbeza antara satu dengan lain. Kehomogenan nisbah menghubung kaitkan antara nisbah dan pengukuran. Satu nisbah itu dikatakan homogen apabila nisbah tersebut boleh dipermudahkan kepada bentuk nisbah yang lain namun masih mengekalkan hubungan perkadaran yang sama. Kebolehbahagian nisbah pula merujuk kepada hasil bahagi antara kuantiti dalam satu nisbah yang mewakili kadar unit (McIntosh, 2013).

Subkonstruk Pecahan. Kajian sepanjang tiga dekad (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto, & Miller, 1998; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Howe, Nunes, & Bryant, 2011; Lamon, 2007; Lobato & Ellis, 2010) mendapati pemahaman konsep pecahan bukan sahaja merupakan prasyarat bagi penaakulan perkadaran, malah hubungan tersebut menunjukkan proses timbal balik, yang mana murid yang mempunyai pengetahuan penaakulan perkadaran dapat menguasai konsep pecahan dan begitu juga sebaliknya (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Doyle, Dias, Kennis, Czarnocha, & Baker, 2015; Howe et al., 2015, 2011; Lobato & Ellis, 2010). Lima subkonstruk pecahan adalah perbandingan bahagian-keseluruhan, hasil bahagi, pengukuran, operator, dan nisbah (Kieren, 1993; Lamon, 2007; Resnick & Singer, 1993).

Perbandingan Bahagian-keseluruhan. Subkonstruk perbandingan bahagian-keseluruhan melibatkan keupayaan murid untuk melakukan pemetakan atau pemecahan satu keseluruhan objek, sama ada bagi satu objek selanjar mahupun satu kumpulan objek diskrit kepada subbahagian yang sama saiz (Behr, Lesh, et al., 1983; Lamon, 2007; Van de Walle et al., 2010). Ramai pengkaji lepas (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; DeWolf, Grounds, Bassok, & Holyoak, 2013; Hannula, 2003; Kieren, 1993; Ni & Zhou, 2005; Reys, Suydam, & Lindquist, 1995; Steffe & Olive, 2010) bersetuju bahawa subkonstruk perbandingan bahagian-keseluruhan merupakan pengetahuan asas untuk memahami konsep pecahan terutama sebelum diperkenalkan dengan simbol pecahan. Tambahan pula, keupayaan kognitif yang berbeza diperlukan bagi mewakilkan pecahan terutama dalam bentuk selanjar dan diskrit (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Steffe & Olive, 2010).

Clarke (2011) mendapati perbandingan bahagian-keseluruhan telah mendominasi dalam kaedah pengajaran pecahan di sekolah dan menyebabkan murid menghadapi kesukaran dalam membandingkan pecahan (Ni & Zhou, 2005; Ramani & Siegler, 2008) dan memahami konsep kesetaraan (Fuchs et al., 2013; Ni & Zhou, 2005; Siegler & Pyke, 2013). Ini turut disokong oleh pengkaji lain (Fuchs et al., 2013; Stafylidou & Vosniadou, 2004) yang menyatakan subkonstruk ini merupakan interpretasi yang paling kerap digunakan dalam pengajaran pecahan. Selain itu, kesukaran murid turut dipengaruhi oleh konsep nombor bulat dan operasi aritmetik (Fuchs et al., 2013; Ni & Zhou, 2005; Steffe & Olive, 2010) dan memberi implikasi kepada murid dalam membentuk pemahaman tentang konsep perwakilan pecahan, yang mana murid sering menganggap pengangka dan penyebut adalah mewakili masing-masing bilangan bahagian dan jumlah keseluruhan bahagian yang sama saiz.

Penggunaan istilah *daripada* dalam subkontruk perbandingan bahagian-keseluruhan seperti, “3/4 disebut tiga bahagian daripada empat bahagian sama saiz” juga menyumbang kekeliruan murid kerana menganggap pengangka dan penyebut adalah dua nombor bulat yang terpisah (Dougherty, Bryant, Bryant, & Shin, 2016; Fuchs et al., 2013). Sebagai tambahan, Lamon (2012) turut mendapati murid jarang didedahkan tentang idea nisbah dan kadaran semasa pembelajaran perbandingan pecahan bahagian-keseluruhan.

Hasil bahagi. Subkonstruk hasil bahagi melibatkan operasi pembahagian antara pengangka dengan penyebut bagi satu pecahan, iaitu $a/b = a \div b$ (Lamon, 2007). Walaupun subkonstruk ini menggunakan simbol a/b seperti dalam subkonstruk bahagian-keseluruhan dan nisbah, namum tafsirannya adalah berbeza kerana membabitkan pemikiran tentang bagaimana suatu pecahan dilihat sebagai satu hasil bahagi (Martinie, 2007). Streefland (1997) menyarankan agar subkonstruk hasil bahagi digunakan bagi memperkenalkan konsep pecahan kepada murid memandangkan ia berkait dengan idea perkongsian sama rata. Pendapatnya turut disokong oleh Clarke, Roche, dan Mitchell (2008) yang menyatakan pemahaman subkonstruk hasil bahagi boleh diperolehi sekiranya murid menguasai konsep pemetakan dan perkongsian sama rata.

Lamon (2007) berpendapat subkonstruk hasil bahagi saling berhubung dengan nisbah dan kadar, seperti konsep perkongsian sama rata dan perbandingan melibatkan konteks masalah tertentu. Pemahaman pecahan sebagai hasil bahagi juga perlu membabitkan perwakilan berbentuk diskrit dan selanjar bagi membangunkan kefahaman murid tentang bagaimana perkongsian sama rata “berapa banyak” objek selanjar dianggap seperti perkongsian dalam objek diskrit. Subkonstruk hasil bahagi bukan sahaja melibatkan murid melakukan pengiraan (Clarke, 2011; McIntosh, 2013), malah perlu memahami proses tersebut secara kuantitatif (Lamon, 2007). Murid yang dapat menguasai hubungan antara nombor yang dibahagi dengan pembahagi secara konseptual didapati mudah memahami nisbah, kadar, dan kadaran (Kieren, 1993; Lamon, 2012; Martinie, 2007).

Pengukuran. Subkonstruk pengukuran bagi pecahan ditafsirkan sebagai proses pemetakan unit kepada beberapa bahagian tertentu, namun pemetakan yang dimaksudkan bukan merujuk kepada perbandingan bahagian yang sama saiz kepada keseluruhan unit tersebut, tetapi bilangan bahagian yang sama saiz tersebut boleh pelbagai atau berubah bergantung kepada berapa kali proses pemetakan dilakukan (Lamon, 2012). Dalam nada yang sama Van de Walle et al. (2010) mendefiniskan subkonstruk pengukuran sebagai pengulangan bahagian pecahan misalnya, 2/5 dibentuk daripada pengulangan dua kali 1/5. Martinie (2007) pula menjelaskan subkonstruk pengukuran dalam pecahan mengikut konteks yang berbeza, iaitu kedudukan satu kuantiti yang mewakili panjang atau jarak pada garis nombor, yang mana garis nombor tersebut dibentuk dari pengulangan satu unit atau melalui pemetakan satu keseluruhan kepada bahagian yang lebih kecil dan sama saiz. Melalui subkonstruk pengukuran, murid dapat menukar persepsi mereka tentang pecahan sebagai dua nombor bulat yang berasingan kepada satu nombor tunggal (Behr, Lesh, et al., 1983). Seterusnya Kieren (1993) menyatakan subkonstruk pengukuran dalam pecahan merujuk perbandingan satu kuantiti berdasarkan kuantiti yang lain atau kuantiti rujukan yang melibatkan proses timbal balik. Misalnya, bagi satu objek selanjar, panjang A diukur berdasarkan panjang B atau panjang B diukur berdasarkan panjang A. Beliau juga menyatakan bahawa kebiasaannya subkonstruk pengukuran sering digabungkan penggunaannya dengan subkonstruk bahagian-keseluruhan.

Selain itu, semua operasi pecahan seperti penambahan, penolakan, dan menyusun pecahan melibatkan subkonstruk ini.

Operator. Subkonstruk operator melibatkan pecahan ditafsir sebagai fungsi atau transformasi yang membabitkan konteks pembesaran atau pengecilan, kenaikan atau susutan, atau pendarab atau pembahagi (Behr, Lesh, et al., 1983; Lamon, 2007; Mack, 1990; McIntosh, 2013). Sebagai tambahan, Lamon (2012) berpendapat suatu pecahan bertindak sebagai subkonstruk operator dalam konteks penskalaan yang melibatkan proses pembesaran atau pengecilan dan pembahagian atau pendaraban. Misalnya, subkonstruk ini dapat membentuk rajah yang setara dengan nisbah yang berbeza. Menurut beliau lagi, subkonstruk operator berbeza dengan perwakilan bahagian-keseluruhan, misalnya "3/5 daripada" membawa maksud menjadikan sesuatu kuantiti tiga kali besar dan pengurangan sebanyak 1/5.

Pemahaman pecahan berdasarkan subkonstruk operator melibatkan penggunaan pemikiran multiplikatif yang menjadi asas kepada penaakulan perkadaran. Martinie (2007) menyatakan bahawa pemahaman pecahan sebagai subkonstruk operator dapat meningkatkan pemahaman murid berkaitan pendaraban pecahan terutamanya tafsiran tentang pernyataan "sebahagian daripada sebahagian daripada keseluruhannya".

Nisbah. Subkonstruk nisbah merujuk hubungan antara dua kuantiti (Carraher, 1996; Hart, 1988; Lamon, 2007) dan keupayaan memahami hubungan antara dua kuantiti tersebut sebagai unit komposit (Lamon, 1994; Martinie, 2007; Streefland, 1997). Sebagai contoh, pecahan 2/5 ditafsirkan sebagai dua bahagian piza bagi setiap lima orang. Satu pecahan dikatakan sebagai nisbah hanya apabila ia melibatkan perwakilan bahagian-keseluruhan dan bukannya perwakilan bahagian-bahagian. Ini bermaksud bukan semua nisbah adalah pecahan tetapi pecahan boleh mewakili nisbah. Bagi menguasai subkonstruk nisbah, murid perlu membuat perbandingan secara relatif (Behr, Lesh, et al., 1983; Kieren, 1993; Lamon, 2012). Selain itu, murid juga harus sedar tentang apa yang dimaksudkan dengan hubungan antara dua kuantiti, yang mana satu kuantiti berubah serentak dengan satu lagi kuantiti dan mengekalkan hubungan antara kuantiti (Lobato & Ellis, 2010). Maka, murid sering keliru dalam membezakan antara nisbah dan bahagian-keseluruhan. Pecahan dan nisbah sering dianggap sebagai satu set yang bertindih dan mengelirukan murid (Clark, Berenson, & Cavey, 2003).

Jenis Masalah Penaakulan Perkadaran

Kajian lepas menunjukkan terdapat pelbagai kategori masalah penaakulan perkadaran bertujuan mengenal pasti pengetahuan penaakulan perkadaran murid. Lesh et al. (1988) mencadangkan tujuh kategori masalah penaakulan perkadaran yang disusun mengikut topik yang berbeza seperti berikut: (a) kategori pertama mengandungi masalah menentukan nilai (*missing value*). Bagi dua nisbah dalam bentuk $a/b = c/d$, tiga daripada empat kuantiti dalam nisbah diberi. Objektif masalah ini adalah menentukan nilai kuantiti yang keempat; (b) kategori kedua terdiri daripada masalah membandingkan dua nisbah yang disusun dalam bentuk $a/b \leq, =, \geq c/d$, yang mana empat kuantiti dalam nisbah diberi. Objektif masalah ini adalah untuk menentukan sama ada nisbah pertama adalah lebih kecil, sama, atau lebih besar daripada nisbah kedua; (c) kategori ketiga mengandungi masalah transformasi yang melibatkan salah satu daripada dua bentuk transformasi. Transformasi pertama membabitkan menilai perubahan arah. Dua nisbah setara $a/b = c/d$ diberi dan salah satu daripada empat kuantiti bertambah atau berkurang bertujuan menentukan sama ada hubungan (≤, =, atau ≥) adalah benar selepas transformasi dilakukan. Masalah transformasi kedua melibatkan transformasi kesetaraan, yang mana dimulakan dengan hubungan $a/b \leq c/d$. Kemudian satu daripada kuantiti, katakan a, perlu ditransformasi agar membentuk hubungan $a + x/b = c/d$; (d) kategori keempat terdiri daripada masalah nilai min bertujuan menentukan min bagi geometri bagi dua nombor. Bagi dua nombor a dan b, min geometri boleh ditentukan menggunakan $a/x = x/b$; (e) kategori kelima terdiri daripada masalah penukaran yang melibatkan penukaran daripada nisbah kepada kadar, dan pecahan; (f) kategori keenam terdiri daripada masalah yang melibatkan ruang ukuran (unit) dan nombor. Dalam masalah ini, murid bukan sahaja perlu sedar hubungan antara nombor, malah hubungan antara ruang ukuran yang berbeza; dan (g) kategori ketujuh mengandungi masalah translasi. Dalam masalah ini murid perlu menggunakan nisbah yang diberi dan mewakilkan hubungan nisbah yang sama bagi satu sistem perwakilan yang lain.

Lamon, (1993a, 2012) turut mengemukakan kategori yang hampir sama dengan Lesh et al. (1988) namun dengan bilangan kategori yang lebih sedikit dan memfokuskan masalah berdasarkan konteks tertentu. Beliau mencadangkan empat jenis masalah dalam penaakulan perkadaran seperti berikut: (a) masalah pengukuran bahagian yang terdiri daripada dua kuantiti berbeza unit dan murid perlu membentuk satu nisbah dengan kombinasi dua kuantiti menghasilkan kuantiti yang ketiga, seperti "kilometer sejam", "RM seunit"; (b) masalah bahagian-bahagian-keseluruhan mengandungi nisbah bagi subset yang menerangkan satu keseluruhan unit, seperti nisbah bilangan lelaki kepada perempuan di dalam satu kelas; (c) masalah set berkait melibatkan kadaran antara dua kuantiti yang tidak mempunyai hubungan yang jelas, namun dua kuantiti tersebut mempunyai hubungan dalam konteks situasi masalah, seperti tiga piza bagi tujuh budak lelaki; dan (d) masalah pengembangan dan pengecilan membabitkan pemetaan antara dua kuantiti selanjar mewakili ciri tertentu seperti, tinggi, panjang, dan lebar yang mana hubungan nisbah yang sama dikekalkan.

Beberapa pengkaji lain (Ben-Chaim et al., 2012; Cramer & Post, 1993; Heller, Post, Behr, & Lesh, 1990; Tourniaire & Pulos, 1985) pula mengklasifikasikan masalah penaakulan perkadaran dalam tiga kategori, seperti berikut: (a) masalah menentukan nilai; (b) masalah perbandingan berangka; dan (c) masalah ramalan kualitatif dan perbandingan. Masalah menentukan nilai melibatkan tiga kuantiti yang dinyatakan dan satu kuantiti yang tidak diketahui (Ben-Chaim et al., 1998; Cramer & Post, 1993; Heller et al., 1990; Lesh et al., 1988). Kesemua empat kuantiti adalah berkait secara sintaksis, berpasangan dan mengikut tertib, dan mempunyai hubungan semantik sama ada secara implisit atau eksplisit dengan mengemukakan kata kunci seperti "per", "dan," "pada", atau "untuk" (Harel & Behr, 1989). Masalah menentukan nilai juga sering kali berkait rapat dengan hubungan bahagian-keseluruhan, nisbah, dan kadar.

Asas bagi pemahaman dalam masalah menentukan nilai adalah perwakilan nisbah setara. Maka untuk mengetahui struktur hubungan dan perubahan kuantiti yang berkadaran dan mewakilkan hubungan tersebut sebagai dua nisbah yang setara, murid perlu tahu menyusun ketiga-tiga kuantiti yang diberi dalam bentuk $a/b = c/d$. Walau bagaimanapun, Lamon (2012) berpendapat, murid tidak sepatutnya diajar menyelesaikan masalah dengan meletakkan tiga daripada empat kuantiti ke dalam persamaan $a/b = c/d$ dan kemudian melakukan operasi darab silang dan pembahagian kerana kaedah tersebut langsung tidak menggalakkan penaakulan perkadaran. Dalam nada yang sama, Lobato dan Ellis (2010) turut menyatakan bahawa masalah menentukan nilai yang digunakan dalam kajian penaakulan perkadaran tidak berkait dengan algoritma pendaraban silang kerana fokus utama adalah murid dapat memahami konteks masalah yang berkaitan dengan kadaran.

Masalah perbandingan berangka melibatkan murid membuat perbandingan antara dua nisbah dan dapat menyatakan kesimpulan tentang hubungan dua nisbah, seperti dapat mengenal pasti kadar yang lebih cepat (Ben-Chaim et al., 2012; Cramer & Post, 1993; Heller et al., 1990; Tourniaire & Pulos, 1985). Misalnya, murid mungkin membuat perbandingan antara pemandu yang memandu 140 kilometer dalam masa 3 jam dan pemandu yang memandu 100 kilometer dalam masa dua jam. Tjoe dan de la Torre (2014) turut menggunakan masalah perbandingan berangka dalam kajiannya dengan memfokuskan masalah yang melibatkan campuran, seperti campuran jus oren dan air untuk membandingkan nisbah kepekatan atau rasa bagi dua campuran.

Masalah ramalan kualitatif dan perbandingan melibatkan masalah pecahan, nisbah, dan kadar yang bebas daripada sebarang konteks (Heller et al., 1990) tanpa melibatkan sebarang angka. Bentuk soalan yang ditanya adalah bersifat semulajadi berkaitan bagaimana nilai pecahan, nisbah, atau kadar akan berubah apabila perubahan yang diterangkan secara kualitatif dengan menggunakan istilah seperti penurunan, peningkatan, dan tiada perubahan.

Secara ringkas, jenis masalah penaakulan perkadaran yang dicadangkan kajian terdahulu mempunyai persamaan antara satu dengan lain. Misalnya, kategori pertama Lesh et al. (1988), iaitu masalah menentukan nilai adalah sepadan dengan masalah masalah set berkait dan masalah pengukuran bahagian yang dicadangkan oleh Lamon (2012). Masalah perbandingan berangka Tjoe dan de la Torre (2014) pula adalah sama dengan masalah membandingkan nisbah oleh Lesh et al. (1988). Kebanyakan kategori masalah penaakulan perkadaran dalam kajian lepas adalah dalam kategori yang sama dan berbeza dari aspek penggunaan istilah.

Oleh kerana kajian ini ingin mengenal pasti pengetahuan penaakulan yang dimiliki murid Tahun Lima, maka pengkaji menggunakan dua jenis masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran, iaitu masalah menentukan nilai dan masalah membandingkan nisbah. Dalam masalah menentukan nilai, objektif utama bukanlah menyusun tiga kuantiti yang diberi dalam bentuk $a/b = c/d$ atau mencari nilai yang keempat, tetapi ingin melihat bagaimana murid mengenal pasti hubungan antara kuantiti dalam nisbah dan kuantiti sepadan antara nisbah. Begitu juga bagi masalah membanding nisbah, jawapan berangka yang tepat bukanlah matlamat utama, tetapi cara peserta kajian membandingkan nisbah dan menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti menjadi keutamaan.

Struktur Masalah Penaakulan Perkadaran. Pengkaji lepas telah mengenal pasti beberapa struktur masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran yang mempengaruhi pemikiran dalam penyelesaian dan memberi alasan. Tiga faktor utama yang dikenal pasti adalah struktur konteks masalah, struktur hubungan nombor, dan jenis kuantiti yang akan dijelaskan.

Struktur konteks masalah. Struktur konteks masalah merujuk kepada situasi yang digambarkan dalam suatu pernyataan masalah (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 1993a, 2008; Kaput & West, 1994; Tournaire & Pulos, 1985). Ben-Chaim et al. (2012) membina 19 aktiviti berkaitan penaakulan perkadaran yang melibatkan tiga konteks masalah, iaitu nisbah, kadar, dan keserupaan. Kesemua konteks masalah ini membabitkan perbandingan secara kualitatif dan kuantitatif antara nisbah dan menentukan nilai. Sebagai tambahan, Kaput dan West (1994) juga mencadangkan tiga konteks masalah dalam penaakulan perkadaran, iaitu masalah campuran (*mixture problems*), masalah yang menggunakan frasa "bagi setiap", dan masalah nisbah, yang mana mempunyai persamaan dengan konteks masalah yang dikemukakan oleh Ben-Chaim et al. (2012). Begitu juga dengan Steinthorsdottir (2003, 2006) yang menggunakan istilah yang berbeza bagi konteks masalah yang sama dengan pengkaji lain. Misalnya, bagi konteks masalah keserupaan Ben-Chaim et al. (2012), beliau menamakan sebagai konteks masalah pertumbuhan.

Struktur hubungan nombor. Faktor kedua yang mempengaruhi pemikiran murid apabila menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran adalah struktur hubungan nombor yang merupakan hubungan nisbah dalaman (*within ratio*) dan hubungan nisbah antara (*between ratio*). Pengkaji lepas menakrifkan hubungan nisbah dalaman dan hubungan nisbah antara secara berbeza. Umpamanya, Lamon (1993b, 2012) menjelaskan hubungan nisbah dalaman adalah merujuk hubungan multiplikatif antara dua kuantiti sepadan yang sama ruang ukuran dalam dua nisbah, manakala hubungan antara nisbah adalah hubungan multiplikatif bagi dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran dalam nisbah yang sama. Sebaliknya, Steinthorsdottir (2003) dan Kaput dan West (1994) menakrifkan hubungan nisbah dalaman dan hubungan nisbah antara secara bertentangan dengan Lamon. Mereka merujuk hubungan nisbah dalaman sebagai hubungan multiplikatif antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran dalam nisbah yang sama, manakala hubungan nisbah antara sebagai hubungan multiplikatif antara dua kuantiti sepadan yang sama ruang ukuran dalam dua nisbah.

Kajian lepas (Alatorre & Figueras, 2003; Kaput & West, 1994; Lamon, 2012; Riehl & Steinthorsdottir, 2015) telah mengenal pasti tiga faktor kesukaran dalam struktur hubungan nombor: (a) masalah melibatkan nombor bulat atau bukan nombor bulat; (b) kedudukan kuantiti yang tidak diketahui dalam masalah; dan (c) saiz nombor atau nisbah yang terlibat. Faktor kesukaran struktur hubungan nombor yang pertama dinamakan perbezaan (Kaput & West, 1994; Lamon, 2012; Riehl & Steinthorsdottir, 2015). Mereka menyatakan perbezaan sama atau tidak sama bagi kuantiti hubungan nisbah dalaman dan nisbah antara menyebabkan murid hanya memberi tumpuan terhadap hubungan penambahan dan bukannya hubungan multiplikatif seperti yang diperlukan dalam penaakulan perkadaran. Contoh perbezaan sama adalah $2/6 = 6/x$, yang mana perbezaan antara kuantiti hubungan nisbah dalaman dan kuantiti hubungan nisbah antara adalah sama, iaitu perbezaan antara enam dan dua adalah empat manakala perbezaan tidak sama adalah $2/8 = 10/x$, yang mana perbezaan dua dan enam tidak sama dengan perbezaan dua dan sepuluh. Faktor kesukaran struktur nombor yang kedua adalah merujuk saiz kuantiti (Alatorre & Figueras, 2003; Lamon, 2012; Riehl & Steinthorsdottir, 2015), sama ada kuantiti yang tidak diketahui lebih besar atau lebih kecil daripada kuantiti yang diberi. Jika kuantiti yang tidak diketahui lebih kecil berbanding kuantiti yang diberi, masalah perkadaran adalah lebih sukar. Faktor kesukaran struktur hubungan nombor yang seterusnya adalah berkait dengan jenis nisbah yang juga dikenali sebagai hubungan nombor bulat atau bukan nombor bulat (Alatorre & Figueras, 2003; Freudenthal, 1983; Kaput & West, 1994; Karplus et al., 1983) yang terlibat dalam konteks masalah kadaran, iaitu sama ada terdapat hubungan nombor bulat atau hubungan bukan nombor bulat antara hubungn nisbah dalaman dan hubungan nisbah antara atau kedua-duanya. Murid beranggapan konteks masalah yang melibatkan struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dalam hubungan nisbah dalaman dan nisbah antara adalah sukar berbanding nombor nombor bulat (Kaput & West, 1994; Lamon, 2012; Riehl & Steinthorsdottir, 2015).

Jenis kuantiti. Faktor terakhir yang dikenal pasti mempengaruhi respons penaakulan perkadaran murid adalah jenis kuantiti, iaitu kuantiti diskrit atau selanjar. Kajian Jeong, Levine, dan Huttenlocher (2007) mendapati murid lebih mudah menggambarkan konteks masalah yang melibatkan kuantiti selanjar berbanding kuantiti diskrit. Namun dapatan kajian Steinthorsdottir (2003) bertentangan dengan kajian Jeong dan rakannya. Steinthorsdottir mendapati murid perempuan lebih cenderung menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran melibatkan kuantiti diskrit dengan jayanya berbanding kuantiti selanjar. Walaupun faktor jenis kuantiti mempengaruhi penaakulan perkadaran, namun kajian tentangnya banyak dijalankan berkait dengan topik pecahan (Nik Azis, 1987; Pitkethly & Hunting, 1996; Yang & Liu, 2013) namun masih kurang dalam masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran.

Secara ringkasnya, kajian lepas mendapati pelbagai struktur konteks masalah, struktur hubungan nombor, dan jenis kuantiti dapat mempengaruhi penaakulan perkadaran murid. Maka kajian ini turut menggunakan pelbagai konteks masalah, struktur hubungan nombor, dan jenis kuantiti yang melibatkan kuantiti diskrit, selanjar, dan diskrit-selanjar bertujuan mendapat respons yang kaya dan mendalam tentang pengetahuan penaakulan perkadaran murid berkaitan nisbah dan kadaran seterusnya dapat menjawab soalan kajian.

Kajian Tentang Penaakulan Perkadaran Berkaitan Nisbah dan Kadaran

Kajian tentang penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran ini membincangkan beberapa kajian relevan dari perspektif murid yang merangkumi pengetahuan penaakulan perkadaran dari aspek metodologi, instrumen, soalan kajian, pensampelan, dan hasil kajian. Kajian tentang pengetahuan penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran dari perspektif murid dapat membentangkan maklumat tentang pengetahuan, strategi, prosedur, kesukaran, dan idea yang digunakan mereka.

Steinthorsdottir dan Sriraman (2009) menjalankan kajian tentang perkembangan penaakulan perkadaran terhadap 26 murid perempuan Gred Lima (10 hingga 11 tahun) selama 12 minggu menggunakan ujian bertulis melibatkan tugasan menentukan nilai yang membabitkan struktur hubungan nombor nombor bulat dan bukan nombor bulat. Kajian ini bertujuan mengenal pasti tahap penaakulan perkadaran murid dan strategi yang digunakan bagi menyelesaikan masalah menentukan nilai berkaitan nisbah dan kadaran. Empat tahap penaakulan perkadaran yang digunakan dalam kajian ini adalah: (a) tahap 1- pengetahuan terhad tentang nisbah; (b) tahap 2 - membina nisbah secara penambahan berulang, multiplikatif, atau kombinasi penambahan berulang dan multiplikatif; (c) tahap 3 - sama seperti tahap dua dengan tambahan dapat menyelesaikan masalah melibatkan nombor bukan nombor bulat; dan (d) tahap 4 - mengenal pasti hubungan nisbah antara dan nisbah dalaman, fleksibel dalam pemilihan strategi penyelesaian.

Hasil kajian mendapati kebanyakan murid dengan mudah beralih daripada tahap 1 kepada tahap 2 dan tahap 2 kepada tahap 3. Namun, peralihan murid daripada tahap 3 kepada tahap 4 mengambil masa yang lama. Kajian ini juga mendapati kebanyakan murid dapat menentukan nilai yang ingin diketahui, iaitu x bagi struktur hubungan nombor nombor bulat dalam bentuk 2/8 = *x*/24, yang mana murid dapat mengenal pasti hubungan antara “2 dan 8” dan “8 dan 24” secara menambah nombor 8 sebanyak tiga kali sehingga mencapai 24, sebelum mengulangi langkah yang sama terhadap nombor 2 bagi menentukan nilai *x*. Sebaliknya, murid menghadapi kesukaran untuk menentukan nilai *x* bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dalam bentuk 5/6 = *x*/21. Satu lagi hasil kajian menunjukkan hanya sebilangan kecil murid yang mempunyai pengetahuan penaakulan perkadaran tahap 4 walaupun perbincangan tentang hubungan multiplikatif telah dibuat beberapa kali. Murid cenderung menggunakan strategi penambahan berulang berbanding menggunakan pemikiran multiplikatif.

Haja dan Clarke (2011) telah menjalankan kajian bagi meneliti pengetahuan tentang penaakulan perkadaran yang dimiliki 20 orang murid Gred 7 dan Gred 8 (11 hingga 13 tahun). Data yang diperolehi daripada ujian bertulis dan temu bual menggunakan tugasan berkaitan kadaran dua peringkat, iaitu peringkat pertama memilih jawapan daripada pilihan yang disediakan dan peringkat kedua melibatkan murid menulis justifikasi bagi pilihan jawapan yang dibuat. Hasil kajian menunjukkan beberapa kategori yang digunakan murid meliputi meneka secara penghapusan, pengulangan lisan, justifikasi jawapan, dan kesukaran. Kajian ini mendapati bahawa murid yang meneka secara penghapusan pada mulanya memangkah pilihan jawapan yang tidak munasabah sebelum memilih jawapan yang tinggal. Murid yang menggunakan kategori ini tidak dapat mengemukakan justifikasi terhadap jawapan yang dipilih. Bagi kategori pengulangan lisan pula, murid berulang kali menyatakan jawapan yang dipilih secara lisan tanpa memberi sebarang alasan. Sebaliknya murid yang menggunakan strategi justifikasi dapat memberi justifikasi bagi pilihan jawapan yang dibuat dengan munasabah. Dalam kategori kesukaran, kebanyakan murid menunjukkan strategi yang berbeza bagi tugasan yang berbeza. Misalnya, kebanyakan murid menggunakan strategi secara penambahan apabila menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran bagi konteks masalah penskalaan, iaitu tugasan segiempat.

Kajian kes oleh Fielding-Wells, Dole, dan Makar (2014) melibatkan murid Gred Empat berumur sembilan tahun bertujuan mengenal pasti bagaimana pembelajaran berasaskan inkuiri dapat menggalakkan penaakulan perkadaran murid sekolah rendah. Kesemua murid yang terlibat dalam kajian telah pun mempunyai pengalaman dalam pembelajaran berasaskan inkuiri. Kajian ini melibatkan empat fasa pembelajaran berasaskan inkuiri, iaitu penemuan, perancangan, pembangunan, dan mempertahankan. Dalam fasa penemuan, tugasan perbandingan saiz dua objek yang berkadaran digunakan. Hasil kajian mendapati dalam fasa ini murid menggunakan pengalaman dan pengetahuan sedia ada mereka dalam menjelaskan kadaran menggunakan perkataan tertentu yang menggambarkan penskalaan. Seterusnya dalam fasa perancangan dan pembangunan, murid meramal dan memberi justifikasi, misalnya murid boleh meramalkan kesan perubahan kuantiti secara tidak formal dengan menyatakan semakin panjang leher, maka semakin besar saiz seseorang. Fasa keempat mengkehendaki murid menjelaskan dan membuktikan kepada kelas tentang pernyataan yang dibuat. Hasil kajian juga mendapati, walaupun murid tidak mengenal pasti tugasan yang diberi adalah berbentuk kadaran, namun mereka boleh membuat perbandingan bagi pembesaran objek menggunakan gabungan idea penambahan dan idea perkadaran.

Kajian kes oleh Wright (2014) selama 10 minggu terhadap lapan orang murid berumur 11 hingga 13 tahun memberi tumpuan kepada perkembangan murid berdasarkan trajektori hipotesis pembelajaran pecahan yang dibangunkannya. Data kajian ini dikumpulkan melalui temu bual sebanyak empat kali, ujian bertulis murid, dan catatan pengkaji. Trajektori hipotesis pembelajaran pecahan yang dicadangkan oleh Wright terdiri daripada empat subkonstruk pecahan, iaitu pengukuran, operator, hasil bahagi, dan nisbah dan kadar. Bagi setiap subkonstruk pecahan, beliau mengkategorikan empat idea berkaitan pecahan, iaitu idea pembentukan unit, idea mengkoordinasi unit, idea kesetaraan, dan idea perbandingan yang digunakan murid dalam menyelesaikan masalah pecahan.

Hasil kajian Wright (2014) ini mendapati bahawa terdapat saling hubungan antara subkonstruk pecahan dalam setiap strategi penyelesaian yang ditunjukkan murid. Misalnya, kebanyakan murid menggunakan subkonstruk hasil bahagi dalam membuat perbandingan perkongsian turut menggunakan idea kesetaraan melibatkan subkonstruk pengukuran. Murid membandingkan perkongsian sama rata nisbah 3 kepada 5 dan nisbah 2 kepada 3 dalam bentuk perbandingan 3/5 dan 2/3 sebagai subkonstruk pengukuran. Selain itu kebanyakan murid dapat mengenal pasti hubungan multiplikatif sama ada hubungan nisbah antara atau hubungan nisbah dalaman, sebelum menggunakan subkonstruk hasil bahagi bagi menentukkan kadar unit.

Sementara itu, Carney et al. (2015) pula telah menjalankan kajian terhadap murid Gred 6 hingga Gred 7 dengan dua tujuan: (a) mengenal pasti pemikiran murid tentang pemikiran mutlak (penambahan) dan pemikiran multiplikatif; dan (b) kebolehan murid menggunakan hubungan skalar atau hubungan fungsi dalam pelbagai struktur hubungan nombor. Data kajian ini dikumpulkan melalui tugasan bertulis mengikut tahap kesukaran item bermula dengan yang paling mudah. Hasil kajian menunjukkan murid mengemukakan enam strategi penyelesaian mengikut t item yang diberi. Bagi item melibatkan penskalaan menaik dalam bentuk $5/2 = 20/x$, kebanyakan murid mengulangi nisbah asal, iaitu 5/2 secara menambah atau menggandakan berulang kali hingga mencapai kuantiti yang disasar. Murid mudah mengenal pasti hubungan skalar atau hubungan nisbah dalaman (2 dan 20) kerana melibatkan hubungan nombor nombor bulat. Murid juga menggunakan pemikiran multiplikatif dengan mendarab terus 5 dengan 4, sebelum mengaplikasikan hubungan pendaraban tersebut kepada kuantiti yang lain bagi mencari kuantiti yang dikehendaki.

Bagi item melibatkan penskalaan menurun dalam bentuk 10/8 = x/2, kebanyakan murid menghadapi kesukaran mengenal pasti hubungan skalar (8 dan 2) yang melibatkan operasi pembahagian. Murid hanya menjadikan separuh daripada kuantiti asal (8) secara berulang kali hingga mencapai kuantiti disasar (2) dan mengulangi langkah yang sama bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui. Namun, terdapat sebilangan kecil murid yang menggunakan pemikiran multiplikatif dengan meringkaskan nisbah asal secara pembahagian sebelum menentukan kuantiti yang ingin diketahui. Berbeza dengan dua item terdahulu, kajian ini juga mendapati kebanyakan murid menggunakan pemikiran multiplikatif bagi item melibatkan fungsi dalam bentuk 16/8 = x/3. Murid menentukan hubungan pendaraban antara 8 dan 16, sebelum menentukan kuantiti yang ingin diketahui. Item melibatkan penskalaan menurun merupakan item yang sukar dalam kalangan murid.

Tiga strategi yang digunakan oleh murid dalam penaakulan perkadaran melibatkan nisbah dan kadaran adalah secara kualitatif, penambahan, dan multiplikatif (Steinthorsdottir & Sriraman, 2009). Murid sekolah rendah menggunakan strategi informal atau menjelaskan secara kualitatif di peringkat permulaan sebelum beralih kepada penaakulan perkadaran. Dalam *penaakulan secara kualitatif*, murid cenderung menggunakan pengetahuan informal atau menghubungkan pengetahuan intuitif tanpa melibatkan pengiraan berangka (Kieren, 1993; Steinthorsdottir & Sriraman, 2009). Pengetahuan informal yang merangkumi pengetahuan visual berkaitan nisbah dan kadaran ditunjukkan oleh murid di peringkat sekolah rendah semasa membuat perbandingan antara kuantiti, penurunan atau peningkatan sesuatu kuantiti, dan hubungan bahagian-keseluruhan. Strategi ini boleh dikenal pasti melalui penggunaan perkataan perbandingan seperti lebih banyak atau lebih sedikit, besar atau kecil, dan bertambah atau berkurang untuk mengaitkan kuantiti dalam soalan yang diberi (Steinthorsdottir & Sriraman, 2009). Sebagai contoh, murid mungkin menyatakan jumlah air dalam gelas yang lebih besar lebih banyak berbanding gelas yang kecil tanpa membuat sebarang pengiraan. Walaupun penaakulan secara kualitatif sering dikaitkan dengan murid di peringkat sekolah rendah, namun strategi ini kekal walaupun murid tersebut telah mempelajari strategi yang lebih formal. Ini kerana penaakulan secara kualitatif masih terus digunakan oleh murid sama ada di peringkat sekolah menengah atau yang lebih tinggi dalam menyelesaikan masalah perkadaran walaupun mereka berkeupayaan menaakul secara perkadaran dengan cara yang lebih canggih.

Penaakulan perkadaran secara penambahan yang juga dikenali sebagai strategi mengkoordinasi nisbah atau strategi mengenal pasti pola merupakan strategi yang dominan dalam kalangan murid sekolah rendah dan menengah (Kaput & West, 1994). Menurut Vergnaud (1983), strategi ini mempamerkan kebolehan murid selangkah ke hadapan berbanding penaakulan secara kualitatif kerana kuantiti hubungan nisbah perlu ditentukan secara operasi menambah atau menolak yang dianggap logik oleh murid bagi suatu konteks masalah nisbah dan kadaran yang diberi. Strategi ini dapat diillustrasikan melalui contoh berikut: “Terdapat dua campuran oren dan air. Campuran pertama dibuat daripada dua gelas oren dan empat gelas air, manakala campuran kedua menggunakan enam gelas oren. Berapa gelas air yang diperlukan bagi campuran kedua agar kedua-dua campuran mempunyai rasa yang sama?” (Tourniaire, 1986). Respons murid adalah “dua gelas oren tambah dua gelas oren tambah dua gelas oren jadi enam gelas oren, maka empat gelas air tambah empat gelas air tambah empat gelas air jadi 12. Jawapannya 12”. Ini menunjukkan murid menggunakan strategi mengkoordinasi nisbah, yang mana murid telah mengenal pasti pola bagi nisbah campuran pertama. Murid mendapati dua gelas oren bagi empat gelas air, dengan kata lain dua gelas air lebih banyak berbanding oren, maka murid kemudiannya mengaplikasikan pola yang sama, iaitu strategi mengkoordinasi nisbah secara penambahan bagi mencari kuantiti yang tidak diketahui bagi nisbah yang kedua.

Walaupun strategi mengkoordinasi nisbah merupakan permulaan bagi penaakulan perkadaran, namun Resnick dan Singer (1993) mengingatkan bahawa strategi ini hanya membolehkan murid menyelesaikan masalah tanpa mengenal pasti hubungan multiplikatif yang wujud dalam kadaran. Maka penyelesaian masalah secara penambahan sering dirujuk sebagai *protoratio* atau pra-perkadaran (Kaput & West, 1994; Resnick & Singer, 1993; Steinthorsdottir & Sriraman, 2009).

Penaakulan perkadaran secara multiplikatif melibatkan dua jenis hubungan nisbah, iaitu hubungan nisbah dalaman dan hubungan nisbah antara (Hart, 1988; Karplus et al., 1983; Noelting, 1980a; Vergnaud, 1983). Hubungan nisbah dalaman adalah berdasarkan bagaimana hubungan pendaraban diaplikasikan dalam satu nisbah kepada nisbah yang kedua untuk menghasilkan nisbah yang setara, manakala hubungan nisbah antara pula adalah menentukan hubungan pendaraban antara kuantiti yang sepadan bagi dua nisbah untuk menghasilkan nisbah yang setara. Strategi yang dipilih oleh murid adalah bergantung kepada struktur hubungan nombor dalam nisbah dan kadaran, sama ada melibatkan nombor bulat atau bukan nombor bulat (Karplus et al., 1983; Tourniaire & Pulos, 1985). Sebagai contoh, Vergnaud (1983) menyarankan agar melibatkan nombor bulat atau bukan nombor bulat dalam hubungan nisbah dalaman dan nisbah antara agar murid dapat mempamerkan pelbagai strategi semasa menyelesaikan masalah nisbah dan kadaran. Dengan kata lain, jika hubungan nisbah antara melibatkan nombor bulat, maka murid akan memberi tumpuan kepada hubungan antara nisbah. Sebaliknya, jika masalah tersebut membabitkan nombor bulat dalam hubungan nisbah dalaman murid akan memberi tumpuan kepada hubungan tersebut untuk menyelesaikan masalah.

Terdapat banyak kajian tentang perkembangan penaakulan perkadaran murid berkaitan nisbah dan kadaran dijalankan (Carpenter et al., 1999; Hart, 1984; Kaput & West, 1994; Lamon, 1994; Lo & Watanabe, 1997; Lobato & Ellis, 2010; Misailidou & Williams, 2003; Noelting, 1980a, 1980b; Parish, 2010; Post et al., 1988; Riehl & Steinthorsdottir, 2015; Wright, 2014) yang mengkategorikan respons murid dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran kepada beberapa tahap.

Carpenter et al. (1999) misalnya telah mengembangkan kajian yang dibuat oleh Lamon (1994) dengan membina empat tahap trajektori hipotesis pembelajaran dengan mengambil kira sejauh mana murid memahami konsep *unitizing* dan *norming* (Lamon, 1993b, 1994) untuk mencapai tahap penaakulan perkadaran yang lebih tinggi. Kajian mereka terhadap murid Gred Empat dan Gred Lima dalam menyelesaikan dua jenis masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran, iaitu masalah menentukan nilai dan masalah perbandingan bertujuan menentukan tahap pemahaman murid dalam penaakulan perkadaran berdasarkan empat tahap.

Pada tahap pertama murid mempunyai pengetahuan tentang nisbah yang sangat terhad dan hanya memfokuskan perbezaan (secara menambah atau menolak) antara kuantiti dalam nisbah yang diberi atau membuat pengiraan secara rambang tanpa makna. Tahap kedua melibatkan murid yang boleh menggabungkan unit nisbah dengan cara menambah atau mendarab tetapi tidak dapat menyelesaikan masalah nisbah yang melibatkan pemetakan. Dalam erti kata lain, murid ini hanya boleh membesarkan atau membina nisbah daripada nisbah asal. Tahap ketiga merujuk murid melihat nisbah sebagai unit yang dipermudahkan yang mana murid boleh membina dan meringkaskan nisbah asal kepada sebutan paling ringkas semasa menyelesaikan masalah kadaran. Selain itu murid juga berkeupayaan menyelesaikan pelbagai jenis masalah nisbah dan kadaran yang lebih kompleks termasuk melibatkan nilai bukan nombor bulat antara nisbah menggunakan konsep *unitizing*. Pada tahap keempat pula, murid tidak lagi melihat nisbah sebagai satu unit kuantiti tetapi boleh mengenal pasti hubungan. Tahap ini mempamerkan murid menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran dalam pelbagai magnitud dan konteks masalah, yang mana murid dapat mengenal pasti kedua-dua hubungan, iaitu hubungan nisbah dalaman dan hubungan nisbah antara. Mereka biasanya menggunakan strategi yang paling berkesan dan mempunyai strategi penyelesaian yang fleksibel.

Seterusnya Parish (2010) turut membina tujuh tahap pemahaman dalam penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran. Beliau menamakan tahap sifar perkembangan penaakulan perkadaran sebagai *tidak jelas* yang berlaku apabila murid tidak dapat memahami matlamat atau kehendak tugasan. Tahap satu yang dikenali sebagai *visualisasi* atau *pengabaian* menjelaskan bahawa murid hanya menggunakan strategi sama ada secara visual atau mengabaikan nilai yang diberi. Di peringkat kedua murid tidak menyedari bahawa terdapat dua kuantiti yang terlibat dengan nisbah, oleh itu mereka hanya membuat tekaan. Tahap tiga, iaitu *penambahan* menunjukkan murid mula mengambil kira kuantiti yang terlibat dalam masalah dan cuba untuk menyatakan kuantiti dengan menaakul secara penambahan tanpa menggunakan hubungan pendaraban. Jika dilihat, tahap dua dan tahap tiga yang dicadangkan oleh Parish (2010) adalah sepadan dengan tahap pertama yang dikemukakan oleh Carpenter et al. (1999).

Parish menamakan tahap seterusnya sebagai *penaakulan praperkadaran* yang menunjukkan murid mengenal pasti pola dan membuat replikasi tanpa melibatkan struktur multiplikatif dan murid juga tidak berkeupayaan melakukan proses berbalik darab dan bahagi. Inhelder dan Piaget (1958, dalam Lamon, 1993b) menjelaskan penaakulan pra-perkadaran boleh dikenal pasti apabila murid hanya menambah berulang kali dan berhenti memperolehi jawapan yang betul tanpa menyedari terdapat persamaan antara struktur dua nisbah .

Tahap lima pula dikenali sebagai *membina nisbah* yang mana murid mengenal pasti nisbah sebagai satu unit komposit dan berkeupayaan untuk membina unit baru dengan cara membina nisbah secara penambahan berulang yang mengekalkan struktur relatif dalam nisbah dan boleh melakukan proses berbalik. Tahap ini menunjukkan murid telah mengalami peralihan daripada menaakul secara penambahan kepada menaakul secara pendaraban tetapi masih menggunakan kaedah primitif yang menggambarkan penaakulan penambahan.

Tahap enam yang dicadangkan oleh Parish (2010) melibatkan hubungan fungsi dan skalar, iaitu peralihan daripada unit komposit kepada membandingan secara pendaraban. Hubungan fungsi membolehkan murid menentukan faktor skala, manakala hubungan skalar melibatkan hubungan multiplikatif nisbah dalaman untuk menyelesaikan masalah. Pada tahap tujuh pula, penaakulan perkadaran murid adalah secara kuantitatif yang menyerupai algebra untuk mewakili dan menyelesaikan masalah yang lebih kompleks. Lamon (2012) berpendapat bahawa di tahap ini murid memberi fokus kepada angka dan hubungan antara angka dan tidak hanya bergantung kepada struktur konteks masalah untuk menentukan cara menaakul. Penggunaan algoritma untuk menyelesaikan masalah kadaran di tahap ini menekankan bahawa murid perlu memahami dengan makna dan bukan hanya menjalankan proses mekanikal sahaja.

Berbeza dengan Carpenter et al. (1999), Parish (2010), dan Lobato dan Ellis (2010) pula membahagikan tahap penaakulan perkadaran berdasarkan empat peralihan. Menurut mereka, perkembangan penaakulan perkadaran murid K-12 boleh diperhatikan melalui empat peringkat peralihan seperti berikut: (a) peralihan menaakul satu kuantiti kepada menaakul dua kuantiti, (b) peralihan menaakul secara penambahan kepada menaakul secara multiplikatif, (c) peralihan menaakul dengan unit komposit kepada menaakul secara perbandingan pendaraban, dan (d) peralihan daripada menaakul secara pengulangan unit komposit kepada menaakul beberapa set nisbah setara.

Peringkat peralihan daripada menaakul dengan satu kuantiti kepada dua kuantiti melibatkan peralihan daripada tumpuan terhadap satu kuantiti dalam sesuatu masalah kepada menyedari terdapat hubungan antara dua kuantiti. Murid sering terlepas pandang aspek penting dalam penaakulan perkadaran, iaitu mengenal pasti dua kuantiti bagi satu nisbah (Lobato & Ellis, 2010) dan merupakan cabaran selepas murid memberi fokus kepada satu kuantiti sahaja dalam masalah nisbah dan kadaran. Lamon (2012) yang menamakan peringkat peralihan ini sebagai perubahan penaakulan univariat kepada penaakulan multivariat menyatakan bahawa perubahan ini menunjukkan lonjakan kognitif murid. Peralihan daripada penaakulan univariat kepada penaakulan multivariat adalah penting dalam membangunkan penaakulan perkadaran kerana mengikut definisi, nisbah melibatkan penaakulan dengan dua atau lebih pembolehubah yang bergantung antara satu sama lain. Peringkat pertama Lobato dan Ellis (2010) adalah sama seperti yang digambarkan oleh Parish (2010) di tahap satu dan dua.

Peringkat kedua pula dikenali sebagai peralihan daripada menaakul secara penambahan kepada menaakul secara multiplikatif. Peralihan di peringkat ini memerlukan perbandingan multiplikatif antara dua kuantiti atau menggabungkan dua kuantiti tetapi masih mengekalkan hubungan multiplikatif. Perbandingan secara multiplikatif dapat menjawab persoalan seperti "berapa kali lebih besar" atau "berapa bahagian pecahan daripada satu bahagian berbanding bahagian yang lain?" (Lobato & Ellis, 2010, h. 18). Sebaliknya, perbandingan secara penambahan menjawab persoalan "berapa banyak perbezaan sesuatu itu lebih besar atau lebih kecil daripada yang lain?" (Lobato & Ellis, 2010, h. 18). Lobato dan Ellis juga mendakwa bahawa kebanyakan kurikulum sekolah hanya melihat nisbah sebagai satu tugas yang perlu diselesaikan secara bertulis walaupun sebenarnya melibatkan kognitif murid. Apabila murid mula mengenal pasti hubungan pendaraban antara kuantiti, mereka mula melanjutkan penaakulan nisbah mereka kepada penaakulan perkadaran secara formal. Pengkaji mendapati peringkat kedua yang dikemukakan oleh Lobato dan Ellis (2010) sepadan dengan gabungan tahap tiga, empat, dan lima yang dicadangkan oleh Parish (2010) dengan lebih terperinci.

Peringkat seterusnya adalah peralihan menaakul dengan menggunakan unit komposit kepada menaakul secara perbandingan pendaraban dan merupakan satu langkah ke arah penaakulan perkadaran yang lebih abstrak. Unit komposit merupakan penggabungan dua atau lebih kuantiti untuk mewujudkan satu unit baru. Satu kaedah untuk membentuk nisbah adalah dengan mewujudkan perbandingan multiplikatif antara dua kuantiti untuk menjawab persoalan seperti, berapa kali lebih besar sesuatu daripada yang lain? Penaakulan pra-nisbah melibatkan bagaimana murid mewujudkan nisbah setara berdasarkan pengulangan dan pembahagian unit komposit bagi menghasilkan satu set nisbah setara. Sebagai contoh, $2 : 3 \rightarrow 4 : 6 \rightarrow 8 : 12$. Murid yang tidak mempunyai kemahiran menaakul secara multiplikatif akan membina unit komposit untuk menyelesaikan masalah dan ini sering dilihat sebagai lanjutan daripada menaakul secara penambahan.

Walau bagaimanapun, apabila murid berhadapan dengan masalah yang lebih rumit, mereka perlu peka mengenal pasti nisbah yang mewakili hubungan multiplikatif yang boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah. Dalam kes ini, penaakulan murid beralih daripada mengulangi unit komposit kepada beberapa kumpulan ramalan yang dijangkakan. Hubungan perkadaran melibatkan mendarab atau membahagi setiap kuantiti oleh faktor yang sama memanjangkan pemahaman murid dalam nisbah. Peralihan ini mewakili peralihan kepada pemahaman kadaran secara formal yang mana murid boleh mengenal pasti invarians dalam nisbah dan dapat membezakan antara situasi yang melibatkan penaakulan perkadaran dan sebaliknya.

Peringkat terakhir melibatkan peralihan daripada pengulangan unit komposit kepada mewujudkan satu set nisbah setara yang tak terhingga. Lobato dan Ellis (2010) membezakan istilah nisbah dan kadar bukan dari segi konteks keadaan (kadar sebagai perbandingan dua unit yang berbeza ukuran dan nisbah sebagai perbandingan dua nombor dengan unit yang sama ukuran) tetapi dari aspek cara individu membina konsep tersebut. Peralihan ini membolehkan murid menakul secara formal dalam kadaran dan mengaplikasi pemahaman mereka kepada konsep penting dalam matematik lebih tinggi.

Langrall dan Swafford (2000) turut membangunkan empat tahap (tahap 0, 1, 2, dan 3) skala penaakulan perkadaran berdasarkan respons yang ditunjukkan oleh murid semasa menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Tahap sifar atau *tahap bukan penaakulan perkadaran* adalah kategori yang mana murid tidak menunjukkan sebarang respons berkaitan menaakul sama seperti peringkat pertama yang dikemukakan oleh Carpenter et al. (1999) dan tahap sifar oleh Parish (2010). Pada tahap sifar murid bukan sahaja membuat tekaan malah menggunakan nilai yang diberi secara rambang tanpa mengenal pasti hubungan antara kuantiti. Tahap satu pula dikenali sebagai *penaakulan tidak formal* yang mana murid membuat perbandingan secara kualitatif sama ada secara lisan, rajah, jadual, atau model yang munasabah untuk menyelesaikan masalah nisbah dan kadaran.

Seterusnya pada tahap dua, iaitu *penaakulan kuantitatif* murid mula menggunakan nilai yang diberi dan menaakul secara penambahan serta menggunakan strategi mengkoordinasi nisbah dan strategi skalar yang melibatkan pendaraban dan pembahagian. Pada tahap dua juga murid dapat mengenal pasti dan memahami konsep unit komposit dan kadar unit untuk diaplikasikan dalam penyelesaian masalah.

Seterusnya pada tahap tiga yang dinamakan *penaakulan perkadaran secara formal* menunjukkan murid menggunakan penaakulan perkadaran yang lebih formal melibatkan strategi fungsi dan pemboleh ubah. Pada tahap ini murid juga berkeupayaan menjelaskan hubungan invarians dan kovarians dalam sesuatu masalah yang diberi.

Rumusan

Secara umum, himpunan kajian yang dibincangkan dapat membekalkan beberapa maklumat asas yang boleh dijadikan panduan bagi pelaksanaan kajian ini. Antara aspek yang dibekalkan daripada analisis dan perbincangan dalam bab ini ialah teori kajian yang menjelaskan tentang prinsip asas konstruktivisme radikal dan kerangka konseptual. Dalam perbincangan tersebut, konstruktivisme radikal didapati lebih sesuai dijadikan landasan kajian berbanding teori lain kerana dapat membantu dalam pengumpulan data bagi menjawab soalan kajian. Beberapa konsep dari perspektif matematik seperti konsep nisbah dan kadaran dan makna penaakulan perkadaran dari perspektif psikologi turut dijelaskan.

Selain itu, himpunan kajian juga membekalkan maklumat bahawa murid sekolah rendah mempunyai strategi dan tahap penaakulan perkadaran yang berbeza berkaitan nisbah dan kadaran. Namun, perkara asas yang belum jelas adalah idea penaakulan perkadaran yang dibina oleh murid dan bagaimana mereka membina idea tersebut dalam usaha memahami situasi masalah membabitkan nisbah dan kadaran. Oleh itu, adalah wajar kajian ini dijalankan bagi mengenal pasti pengetahuan penaaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran menurut perspektif murid itu sendiri, bukan makna penaakulan perkadaran secara formal seperti yang dinyatakan dalam buku rujukan atau penulisan ilmiah. Seterusnya, Bab Tiga membincangkan reka bentuk, peserta dan lokasi kajian, pengumpulan data, instrumentasi, kebolehyakinan, kajian rintis, dan analisis data.

Bab 3 Metodologi Kajian

Pengenalan

Kajian ini bertujuan untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Bab Tiga membincangkan metodologi bagi kajian ini. Bab ini mengandungi lapan bahagian utama. Bahagian pertama menerangkan tentang reka bentuk kajian yang digunakan serta rasional pemilihan reka bentuk tersebut. Seterusnya dalam bahagian peserta dan lokasi kajian, pemilihan peserta dan seting kajian diterangkan. Bahagian ketiga, iaitu teknik pengumpulan data menghuraikan prosedur bagi temu bual klinikal yang dijalankan. Dalam bahagian keempat pula, instrumentasi yang digunakan dalam kajian diterangkan secara terperinci. Bahagian kelima membincangkan pentadbiran temu bual klinikal, manakala bahagian keenam pula menjelaskan kebolehyakinan (*trustworthiness*) bagi data yang dikumpul. Seterusnya bahagian ketujuh mengandungi penerangan tentang kajian rintis. Bahagian terakhir menghuraikan tentang kaedah menganalisis data yang dikumpulkan bagi menjawab soalan kajian.

Reka Bentuk Kajian

Reka bentuk kajian merupakan satu rangka tindakan yang dirancang oleh pengkaji tentang bagaimana sesuatu kajian dijalankan bagi memperoleh jawapan kepada soalan kajian yang melibatkan proses pengumpulan data, teknik memproses dan menganalisis data, dan penulisan laporan (Creswell, 2012). Kajian ini menggunakan kajian kes sebagai reka bentuk kajian memandangkan tujuan kajian adalah untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran tentang nisbah dan kadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima dari perspektif mereka sendiri.

Menurut Creswell (2012), kajian kes merupakan satu reka bentuk yang membabitkan pengkaji melakukan penerokaan berkaitan program, peristiwa, aktiviti, atau individu melalui pengumpulan data secara terperinci yang melibatkan pelbagai sumber, seperti pemerhatian, temu bual, bahan audio visual, dokumen, dan laporan. Selain itu, Creswell menegaskan bahawa reka bentuk kajian kes kebiasaannya digunakan apabila pengkaji ingin menjawab persoalan penyelidikan seperti, "apa", "mengapa", dan "bagaimana" sesuatu kes itu berlaku. Menurut Merriam (2009), reka bentuk kajian kes menyediakan peluang untuk mendapatkan gambaran yang lebih mendalam dan menyeluruh tentang sesuatu fenomena yang dikaji kerana melibatkan pengkaji secara langsung dalam pengumpulan dan analisis data, sekaligus penjelasan interpretif peserta kajian boleh diterjemahkan dalam bentuk yang difahami oleh pembaca.

Reka bentuk kajian kes mempunyai kekuatan tertentu dengan beberapa ciri khusus seperti berikut: (a) kajian kes hanya memfokuskan kepada keadaan, acara, program dan fenomena tertentu bagi sesuatu kajian; (b) kajian kes adalah berbentuk huraian; dan (c) kajian kes membolehkan pembaca memahami dan mendapat gambaran yang jelas berkaitan hasil kajian yang diperoleh (Merriam, 2009). Bagi ciri pertama, kajian ini memfokuskan kepada fenomena tertentu, iaitu penaakulan perkadaran tentang nisbah dan kadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima dalam pelbagai konteks. Ciri kedua membolehkan pengkaji memperoleh maklumat yang kaya dan mendalam melalui teknik temu bual klinikal yang dapat menghuraikan penaakulan perkadaran tentang nisbah dan kadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima.

Selain itu, maklumat yang kaya dan terperinci dapat membantu pengkaji dalam menjawab beberapa persoalan tentang bagaimana dan mengapa murid Tahun Lima membanding, membuat hubung kait, memberi alasan, dan menyatakan implikasi dengan cara tertentu melibatkan nisbah dan kadaran. Oleh kerana kajian ini dapat memenuhi ketiga-tiga ciri bagi kajian kes, maka pengkaji memutuskan untuk memilih kajian kes sebagai reka bentuk kajian memandangkan reka bentuk ini dapat menjawab soalan kajian yang dibentuk. Satu lagi kekuatan reka bentuk kajian kes adalah kurangnya kawalan pengkaji ke atas tingkah laku sesuatu peristiwa atau kejadian, yang mana data yang dikumpulkan adalah melalui persekitaran semulajadi (Merriam, 2009) dan bukannya persekitaran yang terkawal. Ini memungkinkan pengkaji memperoleh penemuan idea baru dan kejadian yang tidak dijangka dalam kajian ini.

Selain beberapa kekuatan yang diterangkan di atas, kajian kes juga mempunyai beberapa limitasi yang telah dibincangkan dalam Bab Satu. Pertama, isu integriti dan sensitiviti pengkaji sepanjang mengendalikan kajian dipersoalkan memandangkan pengkaji merupakan salah satu instrumen utama semasa proses pengumpulan dan analisis data (Merriam, 2009). Kedua, pengkaji memerlukan masa yang panjang dan pengurusan data yang terlalu banyak untuk menjalankan kajian yang melibatkan beberapa siri temu bual (Stake, 2000). Seterusnya, kemungkinan berlakunya bias (Merriam, 2009) akibat ketidaktegasan pengkaji semasa proses pengumpulan dan analisis data. Selain itu, hasil kajian tidak boleh digeneralisasi daripada peserta kajian (sampel) kepada populasi yang ditetapkan. Bagi meminimumkan limitasi yang dikenal pasti, beberapa tindakan telah diambil untuk mengatasinya, antaranya: (a) pengkaji mengamalkan etika penyelidikan sepanjang kajian; (b) pengkaji membuat perancangan yang sistematik dari aspek masa dan pentadbiran data; dan (c) pengkaji membekalkan maklumat yang terperinci tentang kajian bagi memastikan pembaca boleh mengecam persamaan dengan kes yang diminati untuk membuat generalisasi naturalistik.

Sebagai kesimpulan, kajian kes merupakan satu reka bentuk kajian yang dapat membekalkan penjelasan yang mendalam dan terperinci tentang sesuatu fenomena dalam konteks yang khusus. Reka bentuk kajian kes juga membolehkan pengkaji mengumpul dan menganalisis data serta mentafsirkan hasil kajian yang membolehkan pemahaman yang lebih mendalam tentang situasi masalah khusus yang dikaji. Sehubungan itu, reka bentuk kajian kes digunakan untuk memahami tingkah laku lisan dan bukan lisan penaakulan perkadaran murid Tahun Lima tentang nisbah dan kadaran.

Peserta dan Lokasi Kajian

Kajian ini melibatkan murid Tahun Lima di sebuah sekolah rendah bantuan penuh kerajaan di Wilayah Persekutuan Kuala Lumpur. Sekolah yang terlibat merupakan sekolah harian campuran kategori Gred A terletak di pusat bandar Kuala Lumpur dan majoriti murid adalah berbangsa Melayu dengan peratusan 99%. Panitia matematik sekolah terdiri daripada sepuluh orang guru, yang mana empat orang merupakan guru matematik bagi Tahun Lima.

Kajian ini tidak melibatkan murid Tahun Enam kerana mereka akan menduduki peperiksaan awam, iaitu Ujian Penilaian Sekolah Rendah (UPSR). Oleh kerana topik nisbah dan kadaran baru diperkenalkan pada tahun 2014 kepada murid sekolah rendah bermula dari Tahun Empat, maka peserta kajian telah mempelajari topik nisbah dan kadaran semasa kajian dijalankan. Pengkaji membuat andaian bahawa peserta kajian yang mempunyai tahap kebolehan matematik yang berbeza mungkin mempamerkan corak pemikiran dalam menyelesaikan masalah berkaitan penaakulan perkadaran secara berbeza dan membantu menjawab soalan kajian.

Secara umumnya, terdapat dua kategori pensampelan, iaitu pensampelan kebarangkalian dan pensampelan bukan kebarangkalian. Oleh kerana kajian ini menggunakan reka bentuk kajian kes, maka pensampelan bukan kebarangkalian akan digunakan dalam pengumpulan data. Pengkaji menggunakan teknik pensampelan bertujuan bagi mendapatkan peserta dan lokasi kajian yang paling sesuai untuk membantu membentuk pemahaman yang terperinci tentang fenomena utama (Nik Azis, 2014). Menurut Merriam (2009), kaedah pensampelan bertujuan adalah berdasarkan andaian bahawa pengkaji ingin mengetahui, memahami, dan mendapatkan maklumat, maka pengkaji haruslah memilih peserta dan lokasi yang menepati kriteria kajian, iaitu *kaya maklumat*, yakni peserta dan lokasi yang membekalkan maklumat yang berguna bagi menjawab soalan kajian.

Pemilihan peserta kajian bermula dengan mendapatkan kebenaran bertulis daripada Fakulti Pendidikan, Universiti Malaya (Lampiran B) dan Bahagian Perancangan dan Penyelidikan (EPRD), Kementerian Pelajaran Malaysia bagi menjalankan kajian di sekolah awam. Selepas surat kebenaran EPRD (Lampiran C) diterima, pengkaji mengemukakan surat tersebut ke Jabatan Pelajaran Wilayah Persekutuan Kuala Lumpur bagi mendapatkan satu lagi surat kebenaran menjalankan kajian di sekolah awam sekitar Kuala Lumpur (Lampiran D). Kedua-dua surat tersebut diserahkan kepada guru besar bagi mendapat kebenaran pemilihan peserta kajian. Seterusnya, pemilihan peserta kajian melibatkan kerjasama pihak sekolah dan beberapa orang guru matematik Tahun Lima. Pengkaji pada mulanya berbincang dengan pihak sekolah dan guru tentang tujuan kajian, reka bentuk kajian, kaedah pengumpulan data, dan kriteria pemilihan peserta kajian. Sebelum pemilihan pada peringkat pertama dilakukan, pengkaji menetapkan dulu bilangan peserta kajian yang akan terlibat dalam kajian, iaitu seramai tujuh orang. Menurut Stake (1995), kajian kes hanya memerlukan bilangan sampel yang kecil memandangkan setiap kes adalah dikaji secara mendalam yang dapat membekalkan sejumlah besar maklumat. Seterusnya pengkaji menetapkan dua dimensi yang akan digunakan dalam pemilihan peringkat pertama, iaitu peserta kajian berumur 11 tahun dan peserta kajian telah menduduki Penilaian Kendalian Sekolah Rendah 2 (PKSR 2) pada bulan Oktober 2014 dan Ujian Bulanan Pertama pada Januari 2015.

Satu senarai nama murid yang telah menduduki PKSR 2 2014 dan Ujian Bulanan Pertama 2015 diperoleh daripada setiausaha peperiksaan sekolah. Pemilihan peringkat pertama dimulakan dengan memilih seramai 20 peserta kajian dalam kalangan murid Tahun Lima. Pemilihan peringkat kedua dijalankan dengan bantuan beberapa orang guru matematik Tahun Lima dan hanya tujuh daripada 20 orang peserta kajian dipilih berdasarkan beberapa kriteria seperti: (a) kesanggupan peserta kajian untuk ditemu bual sebanyak lima kali dalam tempoh lapan minggu; (b) peserta kajian bersetuju kesemua sesi temu bual dirakam menggunakan perakam video dan audio; (c) kepercayaan guru bahawa peserta kajian akan melibatkan diri secara aktif dalam sesi temu bual; dan (d) kepercayaan pengkaji bahawa peserta kajian dapat memberi penjelasan dan rasional terhadap respons mereka bagi soalan yang dikemukakan.

Pengkaji kemudiannya mengedarkan surat meminta kebenaran (Lampiran E) menjalankan temu bual daripada penjaga peserta kajian dan satu perjumpaan dengan kesemua peserta kajian dilakukan bagi memberi penerangan tentang kajian. Bagi memberi perlindungan kepada peserta kajian setiap peserta kajian diberi nama samaran, iaitu Lili, Wani, Danish, Herman, Sofia, Mona, dan Fikri selain maklumat peribadi dan maklumat sekolah dirahsiakan. Maklumat ringkas tentang peserta kajian yang terlibat dalam kajian ini dipaparkan dalam Jadual 3.1.

Jadual 3.1
Latar belakang peserta kajian

Peserta kajian	Umur (Tahun, Bulan)	Jantina
Lili	(11, 1)	Perempuan
Wani	(11, 0)	Perempuan
Danish	(11, 4)	Lelaki
Herman	(11, 3)	Lelaki
Sofia	(11, 2)	Perempuan
Mona	(11, 2)	Perempuan
Fikri	(11, 0)	Lelaki

Teknik Pengumpulan Data

Kajian ini menggunakan teknik temu bual klinikal bagi mengumpul data. Data bagi kajian ini merangkumi maklumat lisan dan maklumat bukan lisan. Maklumat lisan adalah apa saja yang dituturkan oleh peserta kajian sepanjang sesi temu bual berlangsung. Manakala maklumat bukan lisan merujuk lukisan, tulisan, atau lakaran peserta kajian, catatan pengkaji, catatan, dan tingkah laku peserta kajian. Transkripsi rakaman video temu bual klinikal merupakan data mentah bagi kajian ini. Pemilihan teknik temu bual klinikal adalah selari dengan tujuan kajian, iaitu mengenal pasti penaakulan perkadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima tentang nisbah dan kadaran dalam pelbagai konteks. Teknik ini membolehkan pengkaji merumus dan menguji andaiannya tentang corak pemikiran peserta kajian dalam penaakulan perkadaran dari perspektif peserta kajian itu sendiri (Steffe, 2007; Steffe & Cobb, 1983).

Teknik temu bual klinikal telah dimajukan oleh Piaget (dalam Nik Azis, 1999) dan digunakan secara meluas dalam pengumpulan data untuk mengenal pasti perkembangan kognitif individu tentang sesuatu konsep matematik. Piaget merujuk istilah “klinikal” sebagai pemerhatian secara langsung terhadap tingkah laku murid dalam konteks interaksi satu dengan satu. Teknik temu bual klinikal mengandungi tiga prosedur asas, iaitu pemerhatian tulen, penyoalan kritis, dan penilaian klinikal (Yackel, Cobb, & Wood, 1990; Nik Azis, 2014). Piaget (dalam Nik Azis, 1999) menegaskan bahawa semua kajian yang memberi tumpuan kepada pemikiran individu harus dimulakan dengan pemerhatian tulen kerana semua tingkah laku individu, sama ada dalam bentuk lisan atau bukan lisan merupakan data. Oleh itu, pengkaji sentiasa memerhatikan tingkah laku peserta kajian dengan teliti semasa temu bual berlangsung agar dapat membantu pengkaji mengawal corak interaksi dengan peserta kajian. Bagi memudahkan pemerhatian dan penganalisaan data, semua sesi temu bual dirakamkan dengan menggunakan alat rakaman video dan juga rakaman audio. Selain itu, catatan oleh pengkaji juga dapat membantu dalam menganalisis data.

Dalam teknik temu bual klinikal, penyoalan kritis membenarkan pengkaji membuat pernyoalan secara fleksibel bagi meneroka pemikiran setiap peserta kajian. Pengkaji memulakan sesi temu bual dengan mengemukakan satu soalan bermasalah berdasarkan rancangan aktiviti temu bual. Berdasarkan tindak balas yang ditunjukkan oleh peserta kajian, pengkaji menyoal dan mengemukakan soalan yang sama tetapi dalam bentuk yang berlainan atau mengemukakan soalan baru. Pengkaji juga menggunakan teknik *probing* semasa temu bual bagi mendapatkan penjelasan lanjut daripada peserta kajian tentang penaakulan perkadaran tentang nisbah dan kadaran.

Oleh kerana pengkaji perlu merumus andaian tentang penaakulan perkadaran peserta kajian bagi setiap aktiviti matematik yang ditunjukkan, maka pengkaji turut bertanya soalan tambahan atau soalan spontan. Bagi melicinkan perjalanan temu bual, soalan tambahan dirancang sebelum temu bual dijalankan. Penyediaan soalan tambahan dibuat berdasarkan respons yang diperoleh daripada aktiviti dalam kajian rintis dan juga bahan literatur tentang penaakulan perkadaran tentang nisbah dan kadaran dalam pelbagai konteks. Soalan spontan pula ditanya apabila pengkaji masih tidak dapat membuat andaian tentang penaakulan perkadaran yang dipunyai peserta kajian (Confrey,1980; Nik Azis, 1999). Soalan ini tidak terkandung dalam rancangan temu bual. Kebijaksanaan pengkaji dalam mengutarakan soalan spontan membolehkan peserta kajian menghuraikan rasional bagi respons yang diluar jangkaan pengkaji. Kedua-dua jenis soalan yang digunakan dalam temu bual membolehkan pengkaji mengumpul maklumat tambahan tentang penaakulan perkadaran dan justifikasi peserta kajian.

Prodesur penilaian klinikal pula membolehkan pengkaji menyemak respons yang diberi oleh peserta kajian, mendapat penjelasan lanjut tentang pernyataan kurang jelas, dan seterusnya membolehkan pengkaji mentafsir respons yang diberi oleh peserta kajian. Bagi melicinkan proses pemerhatian tulen, penyoalan kritis, dan penilaian klinikal, beberapa faktor yang perlu diambil kira oleh pengkaji semasa mengendalikan temu bual klinikal seperti berikut (Hunting & Sharpley, 1985; Nik Azis, 1999): (a) rancangan temu bual dibuat dengan mengambil kira seberapa banyak kemungkinan perlakuan murid dalam menyelesaikan sesuatu masalah; (b) masalah matematik dibentuk sedemikian rupa untuk memberi peluang kepada murid menggunakan pengetahuan pemikiran paling canggih; (c) masalah matematik dibentuk sedemikian rupa bagi meningkatkan daya motivasi murid agar berminat mencuba setiap masalah yang diberikan; dan (d) murid diberi peluang secukupnya untuk mencuba setiap masalah yang diberikan.

Walaupun rancangan temu bual disediakan dalam format berstruktur, penyoalan, bilangan soalan bermasalah dan urutan soalan yang dikemukakan adalah bergantung kepada respons yang diberikan oleh peserta kajian. Ini bertepatan dengan dua ciri penting bagi temu bual klinikal, iaitu fleksibiliti dalam penyoalan, dan kebebasan dalam menyoal secara spontan. Bagi memastikan setiap sesi temu bual berjaya mencapai matlamatnya, maka pengkaji haruslah mempunyai kemahiran dalam mengendalikan temu bual klinikal dengan jayanya. Pengkaji perlu mempunyai persediaan dan latihan secukupnya selain mahir dalam tajuk kajian (Ary, Jacobs, & Sorenson, 2010; Merriam, 2009). Selain itu, pengkaji perlu berkeyakinan dengan kebolehannya dalam menjalankan temu bual tanpa berlakunya bias, seperti mempunyai nada suara yang kurang sesuai, cenderung memberi pendapat sendiri, dan tidak menilai jawapan subjek. Bagi mengurangkan bias semasa berlangsungnya sesi temu bual klinikal, beberapa perkara yang telah diberi perhatian oleh pengkaji, seperti: (a) menyediakan satu pelan temu bual yang terperinci; (b) menerima semua respons yang diberi oleh peserta kajian tanpa membuat pertimbangan nilai; (c) mengelakkan mengeluarkan perkataan yang bias; dan (d) berbincang dengan penyelia dari masa ke semasa tentang rakaman kamera video yang telah dijalankan.

Instrumentasi

Kajian ini menggunakan temu bual klinikal berstruktur yang mana pengkaji menentukan lebih awal tugasan dan susunan tugasan yang dikemukakan semasa temu bual dengan peserta kajian. Menurut Gay dan Airasian (2003), temu bual berstruktur mempunyai keupayaan memperoleh maklumat yang lebih terperinci daripada peserta kajian. Instrumen kajian ini terdiri daripada soalan jenis terbuka (*open-ended*) yang digunakan dalam lima sesi temu bual. Soalan jenis terbuka membolehkan peserta kajian menyumbang sebanyak mungkin maklumat dan membolehkan pengkaji menggunakan teknik *probing* untuk soalan susulan (Gall, Gall, & Borg, 2003). Oleh kerana tujuan kajian ini adalah untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran murid, soalan jenis terbuka dianggap yang paling sesuai bagi instrumen ini.

Instrumen kajian ini mengandungi 18 tugasan, yang mana 15 daripadanya melibatkan masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran, manakala tiga lagi tugasan membabitkan pecahan yang dimodifikasi dan diadaptasi daripada beberapa kajian lepas (Tjoe, komunikasi personal, 30 Oktober 2014; Christou & Philippou, 2002; Harel, Behr, Lesh, & Post, 1994; Lamon, 1993b, 2012) bagi tujuan kajian (Lampiran A). Pengkaji telah berhubung melalui emel dan mendapat nasihat daripada pakar penaakulan perkadaran, iaitu Profesor Madya Dr. Hartono Tjoe daripada The Pennsylvania State University berkaitan instrumen yang digunakan. Beliau telah berkongsi 50 item penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran bagi murid Gred Enam hingga Gred Lapan (berumur 11 – 14 tahun) yang sesuai digunakan bagi murid Tahun Lima. Pengkaji mengadaptasi dan memodifikasi beberapa item yang relevan sebagai sebahagian daripada instrumen kajian ini. Instrumen kajian ini telah melalui beberapa kali semakan dan penambahbaikan daripada pakar penaakulan perkadaran dan penyelia agar bersesuaian dengan soalan kajian dan memenuhi tujuan kajian, iaitu mendapatkan maklumat tentang penaakulan perkadaran setiap peserta kajian.

Dua jenis masalah penaakulan perkadaran yang terlibat adalah *masalah menentukan nilai* dan *masalah membandingkan nisbah* dengan masing-masing melibatkan enam dan sembilan tugasan. Kajian lepas (Kaput & West, 1994; Lamon, 2012; Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002; Tourniaire & Pulos, 1985) membincangkan beberapa faktor mempengaruhi tahap kesukaran tugasan dan respons yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran seperti: (a) struktur konteks masalah; (b) struktur hubungan nombor; dan (c) jenis kuantiti. Dalam kajian ini, setiap satu daripada masalah penaakulan perkadaran membabitkan tiga struktur konteks masalah, iaitu nisbah, kadar, dan keserupaan. Faktor struktur hubungan nombor pula hanya melibatkan masalah menentukan nilai, manakala masalah membandingkan nisbah membabitkan tiga jenis kuantiti yang berbeza.

Masalah menentukan nilai. Kajian ini melibatkan enam tugasan berkaitan masalah menentukan nilai, iaitu Lolipop, Belon, Cat (a), Lukisan, Gambar, dan Warna. Dalam setiap tugasan membabitkan masalah menentukan nilai, tiga kuantiti dalam dua nisbah diberi dan peserta kajian perlu menentukan kuantiti keempat yang dikehendaki dalam nisbah kedua. Tugasan ini juga melibatkan tiga struktur konteks masalah yang berbeza, iaitu konteks nisbah, kadar, dan keserupaan. Perincian bagi setiap tugasan berdasarkan struktur hubungan nombor, iaitu *hubungan nisbah dalaman* dan *hubungan nisbah antara* yang terlibat adalah seperti berikut: (a) nombor bulat dan nombor bulat (NB-NB); (b) nombor bulat dan bukan nombor bulat (NB-BNB); (c) bukan nombor bulat dan nombor bulat (BNB-NB); dan (d) bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat (BNB-BNB).

Nombor bulat dan nombor bulat (NB-NB). Hanya satu tugasan yang membabitkan struktur hubungan nombor NB-NB, iaitu tugasan Lolipop yang dimodifikasi daripada idea Christou dan Philippou (2002) yang mana melibatkan konteks masalah kadar. Peserta kajian perlu menentukan harga bagi lapan lolipop berdasarkan maklumat yang diberi dalam tugasan, iaitu dua lolipop berharga 60 sen. Peserta kajian seterusnya diminta mencari harga bagi lapan lolipop. Dalam tugasan ini, kedua-dua hubungan *nisbah antara* (2 dan 60) dan hubungan *nisbah dalaman* (2 dan 8) membabitkan nombor bulat. Objektif tugasan ini adalah untuk mengetahui bagaimana peserta kajian membuat hubung kait antara kuantiti dalam dua nisbah apabila melibatkan hubungan nombor bulat.

Nombor bulat dan bukan nombor bulat (NB-BNB). Tugasan yang terlibat dalam struktur hubungan nombor NB-BNB ini adalah Belon yang dimodifikasi daripada idea Tjoe (komunikasi personal, 30 Oktober 2014) yang melibatkan konteks masalah kadar dan memerlukan peserta kajian menentukan harga bagi sembilan belon apabila diberi harga tiga belon bersamaan RM2. Tugasan ini dengan sengaja dibentuk sedemikian rupa agar hubungan *nisbah antara* (3 dan RM2) tidak membabitkan nombor bulat, manakala hubungan *nisbah dalam*an (3 dan 9) melibatkan nombor bulat. Tujuannya adalah untuk mengenal pasti bagaimana peserta kajian membuat hubung kait antara kuantiti dalam dua nisbah apabila melibatkan hubungan bukan nombor bulat.

Bukan nombor bulat dan nombor bulat (BNB-NB). Terdapat dua tugasan berbeza yang melibatkan struktur hubungan nombor BNB-NB, iaitu tugasan Cat (a) dan Lukisan. Tugasan Cat (a) melibatkan konteks masalah nisbah yang dimodifikasi daripada Tjoe (komunikasi personal, 30 Oktober 2014). Peserta kajian dikehendaki menentukan bilangan tin cat merah yang diperlukan untuk dibancuh dengan 10 tin cat hijau bagi mendapatkan warna yang sama dengan bancuhan 3 tin cat hijau dan 6 tin cat merah. Hubungan *nisbah dalaman* (3 dan 10) bagi tugasan Cat (a) melibatkan bukan nombor bulat, sebaliknya hubungan *nisbah antara* (3 dan 6) membabitkan nombor bulat.

Satu lagi tugasan adalah melibatkan konteks masalah keserupaan, iaitu tugasan Lukisan diadaptasi daripada idea Lamon (2012). Dalam tugasan ini, peserta kajian diberi dua lukisan segiempat yang sama bentuk namun berlainan saiz. Dalam segiempat pertama, lebar dan panjang sisi lukisan dinyatakan masing-masing 6 dan 24, begitu juga dengan lebar lukisan kedua, iaitu 15. Maka, peserta kajian perlu menentukan nilai panjang lukisan yang ingin diketahui. Dalam tugasan ini, hubungan *nisbah dalaman* (6 dan 15) dan hubungan nisbah antara (6 dan 24) masih kekal menggunakan struktur hubungan nombor yang sama seperti tugasan Cat (a), namun kali ini saiz nombor yang diberi lebih besar. Objektif dua tugasan ini adalah untuk mengenal pasti bagaimana peserta kajian membuat hubung kait antara kuantiti dalam dua nisbah apabila melibatkan hubungan bukan nombor bulat dalam dua konteks masalah yang berbeza.

Bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat (BNB-BNB). Berbanding dengan tugasan menentukan nilai yang lain, tugasan Warna dan Gambar yang kedua-duanya diadaptasi daripada Lamon (2012) mengemukakan struktur hubungan nombor yang lebih kompleks, yang mana kedua-dua hubungan *nisbah dalaman* dan hubungan *nisbah antara* tidak melibatkan nombor bulat. Tugasan Warna yang melibatkan konteks masalah nisbah mengkehendaki peserta kajian menentukan berapa sudu campuran warna hijau dan warna biru yang diperlukan untuk mendapatkan dua bancuhan warna lukisan yang sama. Dalam tugasan ini, hubungan *nisbah dalaman* (10 dan 35) dan hubungan *nisbah antara* (10 dan 4) membabitkan hubungan bukan nombor bulat.

Manakala tugasan Gambar pula membabitkan konteks masalah keserupaan. Walaupun mempunyai struktur hubungan nombor sama seperti tugasan Warna, namun kali ini pengkaji dengan sengaja melibatkan nombor perpuluhan, berbeza dengan tugasan terdahulu. Tugasan ini melibatkan pembesaran sekeping gambar, yang mana lebar dan panjang asal masing-masing adalah 2 dan 2.4 menjadi gambar baru yang bersaiz lebih besar dengan lebar 5. Sama seperti tugasan Warna, dalam tugasan ini, hubungan *nisbah dalaman* (2 dan 5) dan hubungan *nisbah antara* (2 dan 2.4) membabitkan bukan nombor bulat. Objektif kedua-dua tugasan ini adalah untuk mengetahui bagaimana peserta kajian membuat hubung kait antara kuantiti dalam dua nisbah melibatkan hubungan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat (BNB-BNB) yang lebih kompleks.

Pengkaji mengandaikan tugasan menentukan nilai boleh memberi petunjuk tentang penaakulan perkadaran peserta kajian dalam mengenal pasti hubungan kait antara dua kuantiti.

Masalah membandingkan nisbah. Instrumen ini juga membabitkan sepuluh tugasan berkaitan masalah membandingkan nisbah, iaitu Piza, Susunan Guli, Jus Oren 1, Jus Oren 2, Segiempat, Cermin, Khemah, Bersih Rumah, Pasu, dan Cat (b). Kesemua tugas berkaitan masalah membandingkan nisbah mengandungi dua atau lebih dua nisbah, yang mana peserta kajian perlu membandingkan situasi satu nisbah sama ada lebih daripada, kurang daripada, atau sama berbanding situasi satu nisbah lain dalam konteks masalah yang diberi. Tugasan ini juga melibatkan tiga struktur konteks masalah yang berbeza, iaitu konteks nisbah, kadar, dan keserupaan. Dalam setiap tugasan, jawapan berangka yang tepat bukanlah matlamat utama, tetapi cara peserta kajian membandingkan nisbah dan menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti menjadi keutamaan. Selain itu, kesemua tugasan membandingkan nisbah membabitkan tiga jenis kuantiti berbeza setiap satu: (a) diskrit; (b) selanjar; dan (c) diskrit-selanjar.

Kuantiti diskrit. Dua tugasan membandingkan nisbah yang melibatkan kuantiti diskrit adalah Piza dan Susunan Guli. Tugasan Piza melibatkan konteks masalah nisbah diadaptasi daripada Lamon (1993b) mempunyai dua objektif. Pertama, tugasan ini bertujuan untuk mengenal pasti bagaimana peserta kajian membuat perbandingan antara dua nisbah yang diberi. Peserta kajian dikehendaki membandingkan sama ada bahagian piza yang dimakan oleh budak lelaki lebih banyak, lebih kecil, atau sama banyak berbanding budak perempuan. Objektif kedua adalah untuk mengenal pasti bagaimana peserta kajian menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti dalam nisbah. Peserta kajian diminta menyatakan kesan yang berlaku sekiranya salah satu kuantiti dalam nisbah diubah dan memberi alasan bagi setiap pernyataan yang dikemukakan.

Sama seperti tugas Piza, tugasan Susunan Guli turut melibatkan konteks masalah nisbah dan diadaptasi daripada Lamon (2012). Tugasan ini bertujuan mengenal pasti bagaimana peserta kajian menyatakan implikasi terhadap perubahan satu kuantiti dalam nisbah. Dalam tugasan ini, peserta kajian membuat perbandingan antara dua nisbah, sama ada mengenal pasti persamaan, perbezaan, atau perubahan dalam kedua-dua susunan guli.

Kuantiti selanjar. Terdapat empat tugasan yang melibatkan kuantiti selanjar dalam konteks masalah yang berbeza. Tugasan Jus Oren 1 dan Jus Oren 2 yang membabitkan konteks masalah nisbah masing-masing diadaptasi daripada Harel et al. (1994) dan Tjoe (komunikasi personal, 30 Oktober 2014). Bagi tugasan Jus Oren 1, matlamat tugasan adalah untuk mengetahui bagaimana peserta kajian membuat perbandingan antara dua nisbah yang diberi dan bagaimana mereka menyatakan implikasi apabila salah satu kuantiti dalam nisbah mengalami perubahan. Tugasan Jus Oren 1 memerlukan peserta kajian membandingkan rasa dua resepi jus oren, sama ada mempunyai lebih rasa oren, kurang rasa oren, atau rasa yang sama.

Berbeza dengan tugasan Jus Oren 1, tugasan Jus Oren 2 membabitkan perbandingan antara empat resepi jus oren. Objektif tugasan ini adalah untuk mengenal pasti bagaimana peserta kajian membuat perbandingan antara empat nisbah yang diberi dan kemudiannya menyusun nisbah tersebut mengikut urutan menaik atau menurun.

Dua lagi tugasan membandingkan nisbah melibatkan kuantiti selanjar adalah Segiempat dan Cermin dimodifikasi daripada Tjoe (komunikasi personal, 30 Oktober 2014). Kedua-dua tugasan ini melibatkan konteks masalah keserupaan. Tugas Segiempat mempunyai dua matlamat, iaitu bagi mengenal pasti bagaimana peserta kajian membuat perbandingan antara dua nisbah yang diberi dan cara mereka menyatakan implikasi apabila salah satu kuantiti dalam nisbah yang mengalami perubahan. Tugasan ini memerlukan peserta kajian membandingkan dua segiempat yang sama bentuk namun berbeza saiz dan mengenal pasti menyatakan kesan terhadap perubahan satu kuantiti dalam nisbah. Tugasan Cermin pula melibatkan tiga keping cermin sama bentuk tetapi berlainan saiz bertujuan mengenal pasti bagaimana peserta kajian menyatakan implikasi terhadap perubahan satu kuantiti dalam nisbah. Dalam tugasan ini, peserta kajian membuat perbandingan antara tiga nisbah, sama ada mengenal pasti persamaan, perbezaan, atau perubahan dalam ketiga-tiga cermin.

Kuantiti diskrit-selanjar. Empat tugasan membandingkan nisbah membabitkan gabungan satu kuantiti berbentuk diskrit dan satu lagi kuantiti selanjar. Kesemua tugasan Khemah, Pasu Bunga, Cat (b), dan Bersih Rumah melibatkan konteks masalah kadar. Dua tugasan, iaitu Khemah dan Pasu Bunga masing-masing dimodifikasi dan diadaptasi daripada (Lamon, 2012), bertujuan untuk mengenal pasti bagaimana peserta kajian membuat perbandingan antara dua nisbah (Khemah) dan empat nisbah (Pasu Bunga) yang diberi. Oleh kerana tugasan Pasu Bunga melibatkan lebih daripada dua nisbah, maka satu lagi matlamat tugasan adalah bagi mengenal pasti bagaimana peserta kajian tentang menyusun nisbah secara urutan menaik atau menurun. Dalam kedua-dua tugasan, peserta kajian diminta membandingkan kepadatan ruang, sama ada mempunyai ruang lebih sempit, ruang lebih besar, atau ruang yang sama. Tugasan Pasu Bunga turut mengkehendaki peserta kajian menyusun pasu bunga mengikut urutan menaik atau menurun.

Dua lagi tugasan, iaitu Cat (b) dan Bersih Rumah juga dimodifikasi daripada idea Lamon (2012) adalah berbeza dengan tugasan yang lain kerana melibatkan kadaran songsang. Tujuan tugasan ini adalah untuk mengenal pasti cara peserta kajian menyatakan implikasi terhadap perubahan satu kuantiti dalam nisbah yang melibatkan kadaran songsang. Dalam kedua-dua tugasan, peserta kajian diminta menyatakan kesan terhadap masa apabila bilangan pekerja bertambah. Melalui tugasan membanding nisbah, pengkaji mengharapkan tingkah laku yang dipamerkan oleh peserta kajian membolehkan pengkaji mengenal pasti cara peserta kajian membuat perbandingan antara dua nisbah dan menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti dalam nisbah.

Pecahan. Selain daripada tugasan berkaitan masalah penaakulan perkadaran, instrumen kajian ini juga melibatkan tiga tugasan tentang pecahan. Tugasan ini hanya membabitkan pecahan wajar tanpa melibatkan sebarang konteks masalah. Objektif tugasan ini adalah untuk mengenal pasti profisiensi matematik peserta kajian dalam membanding pecahan (Lamon, 2012; Tjoe & de la Torre, 2014) yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah nisbah, kadar, dan keserupaan, selain membekalkan maklumat tentang kesukaran yang dihadapi peserta kajian. Tiga aktiviti yang terlibat dalam tugasan membabitkan pecahan adalah: (a) membandingkan nilai pecahan; (b) nilai antara pecahan; dan (c) menyusun pecahan yang kesemuanya diadaptasi dan dimodifikasi daripada Tjoe (komunikasi personal, 30 Oktober 2014).

Aktiviti membandingkan pecahan bertujuan untuk melihat bagaimana peserta kajian membandingkan dua pecahan dan menentukan sama ada nilai salah satu pecahan tersebut lebih kecil, sama, atau lebih besar berbanding nilai satu lagi pecahan. Terdapat tiga subtugasan berbeza dalam aktiviti membanding pecahan, iaitu pecahan sama penyebut, pecahan sama pengangka, dan pecahan berbeza penyebut dan pengangka. Dalam aktiviti kedua yang melibatkan dua subtugasan, peserta kajian diminta menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan. Seterusnya, bagi aktiviti menyusun pecahan yang melibatkan hanya satu tugasan, peserta kajian diminta menyusun lebih daripada dua pecahan sama ada secara urutan menaik atau menurun. Bagi menyusun pecahan mengikut urutan, peserta kajian mestilah menentukan nilai pecahan tersebut terlebih dahulu sebelum menyusunnya, maka aktiviti membanding pecahan merupakan prasyarat bagi aktiviti menyusun pecahan. Jadual 3.2 menunjukkan taburan tugasan pecahan dan tugasan penaakulan perkadaran berdasarkan tiga struktur: (a) struktur konteks masalah; (b) struktur hubungan nombor; dan (c) struktur kuantiti bagi lima temu bual.

Jadual 3.2

Taburan tugasan pecahan dan penaakulan perkadaran

Temubual	Tugasan		Soalan kajian	Pecahan	Penaakulan perkadaran								
					Struktur konteks masalah			Struktur hubungan nombor			Struktur kuantiti		
					Nisbah	Kadar	Keserupaan	NB-NB	NB-BNB/ BNB-NB	BNB-BNB	Diskrit	Selanjar	Diskrit-selanjar
1	1.1	Membanding pecahan	1	/									
	1.2	Nilai antara pecahan	1	/									
	1.3	Menyusun pecahan	1	/									

Temubual		Tugasan	Soalan kajian	Pecahan	Penaakulan perkadaran								
					Struktur konteks masalah			Struktur hubungan nombor			Struktur kuantiti		
					Nisbah	Kadar	Keserupaan	NB-NB	NB-BNB/ BNB-NB	BNB-BNB	Diskrit	Selanjar	Diskrit-selanjar
2	2.1	Piza	2		/						/		
	2.2	Jus Oren 1	2, 4		/						/		
	2.3	Jus Oren 2	2		/						/		
3	3.1	Khemah	2			/							/
	3.2	Pasu Bunga	2			/							/
	3.3	Segiempat	2, 4				/					/	
4	4.1	Lolipop	3			/		/					
	4.2	Belon	3			/			/				
	4.3	Cat (a) (b)	3, 4		/				/				/
	4.4	Warna	3		/					/			
5	5.1	Lukisan	3				/		/				
	5.2	Gambar	3				/			/			
	5.3	Bersih Rumah	4			/							/
	5.4	Susunan Guli	4		/						/		
	5.5	Cermin	4				/					/	

Nota:

1. “NB” dan “BNB” dalam lajur struktur hubungan nombor masing-masing merujuk nombor bulat dan bukan nombor bulat.
2. Simbol “/” menunjukkan tugasan yang terlibat dalam pecahan dan penaakulan perkadaran.

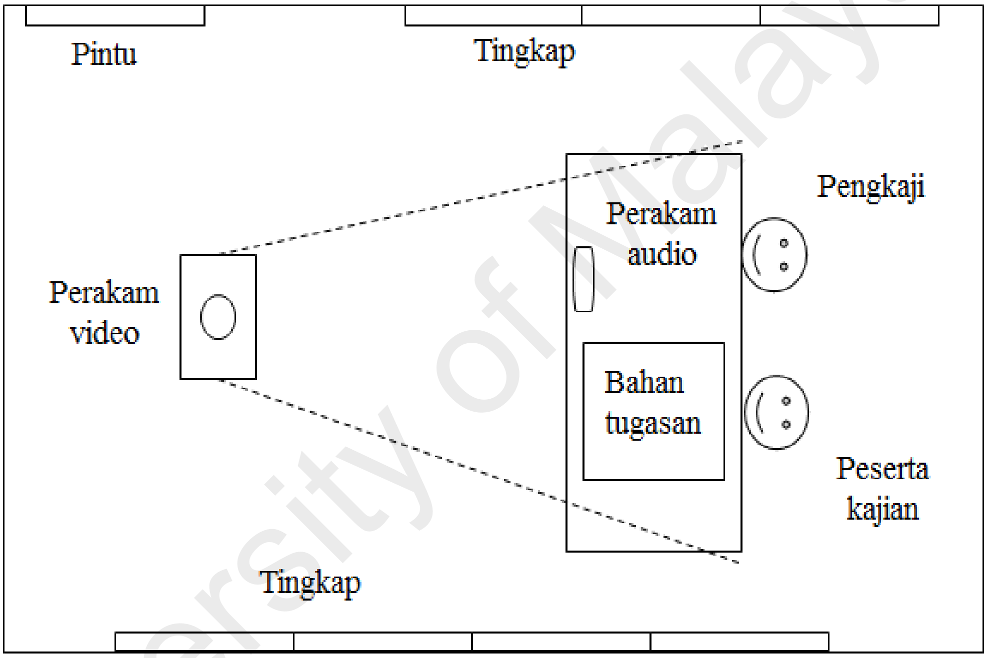
Jadual 3.2 juga meringkaskan tugasan temu bual bagi menjawab soalan kajian yang dibina. Temu bual pertama melibatkan tiga tugasan berkaitan pecahan yang merangkumi tiga aktiviti berbeza, iaitu membanding pecahan, nilai antara dua pecahan, dan menyusun pecahan. Kesemua aktiviti ini adalah bertujuan untuk menjawab soalan kajian pertama: Bagaimanakah murid Tahun Lima membanding dan menyusun pecahan? Temu bual kedua juga terdiri daripada tiga tugasan, namun membabitkan masalah membanding nisbah, iaitu Piza, Jus Oren 1, dan Jus Oren 2 yang digunakan bagi menjawab soalan kajian kedua: Bagaimanakah murid Tahun Lima membandingkan nisbah membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan? Tugasan Piza dan Jus Oren 1 dalam temu bual kedua turut bertujuan menjawab soalan kajian keempat: Bagaimanakah murid Tahun Lima menyatakan implikasi tentang perubahan kuantiti dalam nisbah dan kadaran membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan?

Dalam temu bual ketiga, tiga tugasan melibatkan masalah membanding nisbah, iaitu tugasan Khemah, Pasu Bunga, dan Segiempat bagi menjawab soalan kajian kedua. Tugasan Segiempat dalam temu bual ketiga ini juga bertujuan menjawab soalan kajian keempat. Seterusnya, temu bual keempat terdiri daripada empat tugasan berkaitan masalah menentukan nilai, iaitu tugasan Lolipop, Belon, Cat, dan Warna. Kesemua tugasan ini adalah untuk menjawab soalan kajian ketiga: Bagaimanakah murid Tahun Lima membuat hubung kait antara kuantiti dalam nisbah dan kadaran membabitkan konteks masalah nisbah, kadar, dan keserupaan?

Tugasan Cat turut digunakan untuk menjawab soalan kajian ketiga. Dan akhir sekali, temu bual kelima membabitkan lima tugasan, dua dan tiga tugasan masing-masing melibatkan masalah membanding nisbah dan menentukan nilai. Kedua-dua tugasan membanding nisbah, iaitu Lukisan dan Gambar bertujuan menjawab soalan kajian ketiga, manakala tugasan berkaitan masalah menentukan nilai, iaitu Bersih Rumah, Susunan Guli, dan Cermin adalah bertujuan menjawab soalan kajian keempat: Bagaimanakah murid Tahun Lima menyatakan implikasi tentang perubahan kuantiti dalam nisbah dan kadaran melibatkan konteks nisbah, kadar, dan keserupaan?

Pentadbiran Temu Bual Klinikal

Temu bual klinikal telah dilakukan semasa waktu persekolahan, iaitu pada sesi pagi berdasarkan jadual yang dipersetujui oleh guru matematik. Pihak sekolah telah menyediakan sebuah bilik berhawa dingin yang selesa bagi tujuan pelaksanaan temu bual, yang mana lokasi bilik jauh dari laluan murid dan gangguan persekitaran. Temu bual klinikal melibatkan tujuh peserta kajian telah dijalankan pada bulan Mac 2015 hingga Mei 2015 membabitkan lima siri temu bual bagi setiap peserta kajian. Setiap temu bual mengambil masa antara 30 minit sehingga 40 minit yang melibatkan tiga sehingga lima tugasan atau subtugasan. Jangka masa temu bual bergantung pada respons yang diberi oleh peserta kajian dan keperluan pengkaji untuk mendapatkan maklumat. Pada asasnya, bilik temu bual dilengkapi dengan satu meja, dua kerusi, perakam audio, dan perakam video. Rajah 3.1 menunjukkan pelan bilik temu bual.



Rajah 3.1. Pelan bilik temu bual klinikal

Oleh kerana pengkaji berperanan sebagai penemu bual, maka beberapa inisiatif diambil untuk mengenali peserta kajian sebelum temu bual pertama dijalankan dengan mendapatkan maklumat peribadi peserta kajian, seperti tarikh lahir, bilangan adik beradik, dan pekerjaan ibu bapa daripada pihak sekolah. Pengkaji juga melakukan perbualan bersama guru kelas bagi mendapatkan maklumat terperinci tentang sikap dan minat setiap peserta kajian. Semasa sesi pengenalan ini, pengkaji berbual dengan peserta kajian secara santai tentang minat dan hobinya supaya peserta kajian selesa dan mesra sekaligus tidak berasa kekok untuk ditemu bual. Dalam sesi pengenalan, peserta kajian terlebih dahulu diberi penerangan tentang tujuan kajian, gerak balas yang diperlukan, dan penggunaan kamera video.

Sepanjang sesi temu bual, soalan susulan dengan laras bahasa yang mudah difahami akan dilontarkan kepada peserta kajian bagi mendapatkan penjelasan yang terperinci tentang setiap aktiviti yang dilakukan. Pengkaji menggunakan gaya penyoalan yang berbeza mengikut respons yang ditunjukkan oleh setiap peserta kajian. Peserta kajian juga sentiasa diberi galakan dan dorongan, yang mana pengkaji mengajukan soalan seperti "Mungkin kamu ada cara lain?" dan "Kamu pasti dengan apa yang kamu buat?". Ini membolehkan pengkaji mengumpul seberapa banyak maklumat tentang pengetahuan yang dimiliki peserta kajian.

Kebolehyakinan (*Trustworthiness*)

Kajian ini menggunakan empat kriteria bagi kebolehyakinan (*trustworthiness*) seperti berikut: (a) kredibiliti; (b) kebolehpindaan (*transferability*); (c) keboleharapan (*dependability*); dan (d) kebolehpastian (*confirmability*).

Kredibiliti. Istilah kredibiliti dalam kajian kualitatif ini adalah secocok dengan kesahan dalaman. Kredibiliti memberi tumpuan antara pandangan peserta kajian dan dengan pandangan yang dianggap oleh pengkaji sebagai dimiliki oleh peserta kajian (Lincoln & Guba, 1985; Nik Azis, 2014). Secara khusus, kredibiliti merujuk setakat mana hasil kajian menjelaskan fenomena yang dikaji. Pengkaji memberi beberapa penekanan terhadap beberapa perkara bagi meningkatkan kredibiliti kajian ini. Pertama, pengumpulan data untuk lima sesi temu bual bagi setiap peserta kajian memakan masa di antara lima sehingga lapan minggu. Ini memberi peluang kepada pengkaji untuk menganalisis, membanding, dan menghalusi konstruk untuk memastikan pemadanan antara teori, iaitu konstruktivisme radikal dan realiti peserta kajian.

Selain itu, pengkaji juga menggunakan triangulasi data dari pelbagai sumber bagi meningkatkan kredibiliti hasil kajian. Pengkaji melakukan kesahan silang, iaitu data yang diperoleh daripada temu bual secara lisan disilang periksa dengan data yang diperoleh melalui pemerhatian secara langsung yang juga disilang dengan hasil kerja bertulis seperti langkah penyelesaian, lakaran, atau simbol yang dibuat oleh peserta kajian. Ini dapat memastikan data yang diperolehi bersifat objektif dan konsisten.

Kebolehpindaan (*transferability*). Kajian ini hanya melibatkan saiz sampel yang kecil, maka dapatan kajian ini tidak dapat digeneralisasikan. Oleh kerana kajian ini bertujuan mengenal pasti penaakulan perkadaran peserta kajian berkaitan nisbah dan kadaran, maka kesahan luaran lebih merujuk kepada kebolehpindaan atau duplikasi kaedah yang digunakan (Merriam, 2009). Pengkaji membuat deskripsi terperinci tentang penaakulan perkadaran peserta kajian untuk membolehkan pengkaji lain memahami dan mendapat gambaran situasi tersebut. Seperkara lagi, kesemua komponen kajian seperti seting kajian, peserta kajian, instrumentasi, pengumpulan data, dan analisis data turut dijelaskan agar pengkaji lain atau pembaca boleh membuat pertimbangan tentang aplikasi maklumat tersebut dalam kajian lanjut.

Keboleharapan (*dependability*). Keboleharapan yang sepadan dengan kebolehpercayaan merujuk setakat mana pengkaji boleh dipercayai oleh orang lain berhubung integriti, kejujuran, dan personaliti yang ditunjukkan. Bagi meningkatkan keboleharapan, pengkaji memastikan semua data mentah daripada rakaman video ditranskripsikan secara *verbatim,* iaitu betul-betul apa yang dituturkan, ditulis, dan isyarat badan seperti gerakan jari untuk mengira dan mimik muka.

Kebolehpastian (*confirmability*). Kebolehpastian membabitkan penentuan bahawa hasil kajian membekalkan penjelasan yang mencukupi dan munasabah daripada data yang dikumpulkan (Patton, 2002), bukan khayalan dan imaginasi pengkaji semata-mata. Bagi meningkatkan kebolehpastian kajian ini, pengkaji mengambil beberapa langkah seperti membuat dokumentasi secara sistematik bagi tujuan menyemak dan menyemak semula data sepanjang kajian, mentafsir hasil kajian peserta kajian mengikut tema bagi membentuk kategori tertentu, dan memberikan penjelasan yang terperinci tentang metodologi kajian untuk membolehkan penelitian dibuat terhadap integriti hasil kajian.

Kajian Rintis

Kajian rintis adalah kajian yang dibuat sebelum kajian sebenar dijalankan bertujuan untuk memastikan instrumen kajian mempunyai kredibiliti yang tinggi serta dapat menyelesaikan masalah yang mungkin berlaku semasa proses kajian sebenar dijalankan (Yin, 2014). Kajian ini turut menjalankan dua sesi kajian rintis, iaitu dua bulan sebelum kajian sebenar dijalankan dengan melibatkan dua murid Tahun Lima dari sebuah sekolah rendah di Wilayah Persekutuan Kuala Lumpur.

Terdapat beberapa tujuan kajian rintis dijalankan, antaranya: (a) meningkatkan kemahiran dan membiasakan pengkaji dengan teknik temu bual klinikal; (b) memberi maklumat tentang bagaimana respons yang mungkin diberikan oleh peserta kajian terhadap soalan yang dikemukakan yang mana maklumat dan respons tersebut dapat membantu memurnikan penyediaan soalan tambahan yang telah dirancang; (c) melihat kesesuaian soalan bermasalah yang disediakan dari segi istilah, struktur ayat yang digunakan sama ada mengelirukan dan cara menyoal peserta kajian; (d) membantu pengkaji menganggarkan jangka masa yang diambil bagi setiap satu sesi temu bual klinikal; dan (e) membantu pengkaji mengetahui kekangan yang mungkin timbul dalam proses pengumpulan data dan mengemaskan pelan temu bual.

Kajian rintis sesi pertama melibatkan seorang orang murid Tahun Lima dijalankan pada 5 sehingga 7 Januari 2015. Selepas kajian rintis pertama tamat dijalankan, pengkaji menyemak semula pelan temu bual dan rakaman video ditunjukkan kepada penyelia bagi membuat penambahbaikan kepada kesesuaian instrumen kajian dari aspek kandungan dan pengendalian temu bual berdasarkan respons yang diberi. Antara kelemahan yang dikenal pasti ialah tempoh bagi temu bual dengan kedua-dua peserta kajian adalah terlalu lama, iaitu melebihi 50 minit. Maka, pengkaji telah mengubahsuai tiga sesi temu bual dengan menambah bilangan sesi temu bual menjadi lima sesi. Ini bertujuan agar setiap sesi temu bual mengambil masa di antara 30 hingga 40 minit, selain dapat mengelakkan daripada peserta kajian hilang fokus. Pengkaji membuat refleksi dengan memberi perhatian kepada beberapa aspek yang lemah dalam kajian rintis pertama seperti kelancaran pengendalian temu bual dan kemahiran menyoal agar sesi kajian rintis kedua lebih terancang dan lancar.

Seterusnya, kajian rintis kedua dijalankan pada 8 sehingga 9 Januari 2015 di sekolah yang sama, juga melibatkan seorang murid Tahun Lima. Pengkaji berasa lebih yakin dalam kajian rintis kedua selepas mengendalikan tiga sesi temu bual dalam kajian rintis pertama. Setelah temu bual klinikal kajian rintis kedua dijalankan, beberapa perubahan telah dilakukan bagi tujuan pemurnian. Antara kelemahan yang dikenal pasti adalah respons dan jawapan yang diberikan oleh kesemua peserta kajian masih terhad dan terdapat beberapa struktur ayat yang kurang difahami. Bagi mengatasi kelemahan tersebut, beberapa perubahan telah dilakukan selepas perbincangan dan mengambil kira pendapat dan idea daripada penyelia. Jadual 3.3 menunjukkan perubahan penambahbaikan yang dilakukan.

Jadual 3.3

Tindakan penambahbaikan kajian rintis

Kelemahan yang dikenal pasti	Perkara yang diubahsuai
1. Masa setiap sesi temu bual terlalu lama, melebihi 50 minit	• Mengubah tiga sesi temu bual kepada lima sesi temu bual membolehkan setiap sesi mengambil masa 30 sehingga 40 minit.
2. Tidak mahir dalam teknik penyoalan.	• Pengkaji melihat beberapa kali rakaman video untuk memperbaiki kelemahan dalam teknik penyoalan dan mendapat nasihat penyelia.

Kelemahan yang dikenal pasti	Perkara yang diubahsuai
3. Kedudukan perakam video agak jauh.	• Menggunakan khidmat pembantu bertujuan dapat merakam semua tingkah laku lisan dan bukan lisan peserta kajian.
4. Peserta kajian berfikir terlalu lama.	• Pengkaji memberi galakan kepada peserta kajian untuk terus memberi respons.
5. Struktur ayat kurang difahami peserta kajian.	• Menstruktur semula ayat menggunakan laras bahasa yang mudah difahami.

Kaedah Analisis Data

Kajian ini menggunakan analisis protokol bertulis bagi menganalisis data. Analisis protokol bertulis merupakan satu kaedah menganalisis data yang melibatkan lima peringkat utama: (a) transkripsi data; (b) pembersihan data; (c) analisis kajian kes; (d) pengekodan dan tema; dan (e) analisis merentas kes. Melalui kaedah ini, pengkaji bukan sahaja menganalisis data daripada tingkah laku lisan, tingkah laku bukan lisan, dan tekstual daripada temu bual klinikal membabitkan makna pada tahap permukaan yang boleh dikenal pasti melalui penggunaan kod atau pencarian perkataan utama, malah dapat mengenal pasti makna yang tersirat atau makna pada tahap yang mendalam (Nik Azis, 2014).

Peringkat transkripsi data. Peringkat pertama ini melibatkan data rakaman video dan audio daripada lima temu bual klinikal membabitkan 18 tugasan ditranskripsi dalam bentuk bertulis bagi setiap peserta kajian. Data rakaman video dan audio merangkumi semua tingkah laku lisan dan bukan lisan tujuh peserta kajian, termasuklah: pertuturan; catatan sama ada lukisan atau tulisan; mimik muka; dan isyarat tangan. Selain itu, interaksi lisan dan bukan lisan antara pengkaji dan peserta kajian semasa temu bual juga ditranskripsi. Setiap interaksi lisan ditranskripsi secara verbatim tanpa membuat sebarang perubahan. Bagi komunikasi bukan lisan pula hanya jawapan bukan lisan yang bermakna ditranskripsikan dalam data.

Peringkat pembersihan data. Di peringkat kedua, pengkaji menyusun data mentah mengikut soalan kajian yang membabitkan membanding pecahan, membanding nisbah, menghubung kait antara kuantiti, dan menyatakan implikasi perubahan kuantiti. Pengkaji kemudian membaca dan menyemak data transkripsi bagi tujuan pembersihan data transkripsi yang tidak berkaitan.

Peringkat analisis kajian kes. Bahagian seterusnya, kajian kes bagi setiap peserta kajian berkaitan penaakulan perkadaran murid Tahun Lima dibentuk secara berasingan berdasarkan maklumat daripada protokol bertulis. Kajian kes ini dapat menjawab empat soalan kajian yang dibentuk dengan menganalisis dan menerangkan dengan jelas tentang penaakulan perkadaran tujuh peserta kajian menyelesaikan setiap tugasan.

Peringkat pengekodan dan tema. Di peringkat keempat, pengkaji membaca data mentah yang telah ditranskripsi beberapa kali untuk mendapatkan gambaran pemikiran peserta kajian sebelum dikoding dan disusun bagi membentuk tema tertentu supaya dapat menjelaskan penaakulan perkadaran murid Tahun Lima. Tema yang dibentuk bagi setiap protokol adalah berpandukan soalan kajian. Dalam proses pengekodan, pengkaji membentuk kod yang terdiri daripada empat lajur. Penjelasan tentang setiap lajur bermula dari lajur kiri ke kanan adalah seperti berikut: (a) peserta kajian yang terlibat dilabelkan dengan abjad pertama nama mereka; (b) soalan kajian, iaitu membanding pecahan (BP), membanding nisbah (BN), menghubung kait antara kuantiti (HK), dan implikasi perubahan kuantiti (IK); (c) konteks masalah, iaitu nisbah (N), kadar (K), dan keserupaan (KE); dan (d) sama ada struktur hubungan nombor, iaitu nombor bulat-nombor bulat (NB-NB), nombor bulat-bukan nombor bulat (NB-BNB), bukan nombor bulat-nombor bulat (BNB-NB), dan bukan nombor bulat-bukan nombor bulat (BNB-BNB) atau jenis kuantiti, iaitu selanjar (S), diskrit (D), dan diskrit-selanjar (D-S). Misalnya, bagi kod LBNKD-S, “L” mewakili peserta kajian bernama

Lili, “BN” merujuk persoalan kajian berkaitan membandingkan nisbah, “K” mewakili konteks masalah kadar, dan “D-S” merujuk jenis kuantiti diskrit-selanjar.

Peringkat analisis merentas kes. Analisis merentas kes boleh menyediakan penerangan secara mendalam dan kaya dengan maklumat bagi kajian kes dan fenomena yang sedang disiasat (Merriam, 2009). Analisis di peringkat ini dilakukan bagi membandingkan setiap kajian kes mengikut tema untuk mengenal pasti kategori yang menggambarkan ciri persamaan dan perbezaan pola pemikiran peserta kajian. Interpretasi bagi setiap kategori yang dibentuk turut dijelaskan berdasarkan soalan kajian.

Rumusan

Keseluruhan Bab Tiga telah membincangkan metodologi yang digunakan dalam kajian ini, iaitu penjelasan tentang reka bentuk yang membabitkan kaedah dan prosedur bagi mengumpul dan menganalisis data. Penerangan terperinci tentang lokasi dan sampel, dan kaedah pensampelan turut dinyatakan. Seterusnya kaedah pengumpulan data yang menggunakan teknik temu bual klinikal diperjelaskan, diikuti dengan instrumen kajian dan pentadbiran temu bual klinikal. Kebolehyakinan (*trustworthiness*) bagi data kajian turut diterangkan. Sebelum kajian sebenar dijalankan, kajian rintis telah dibuat bagi menentukan kredibiliti instrumen kajian. Di akhir bab ini turut dihuraikan tentang peringkat dalam menganalisis data. Bab ini menjadi panduan kepada pengkaji bagi pengumpulan data dan seterusnya dapat menjawab soalan kajian yang dibina. Bab seterusnya, iaitu Bab Empat membentangkan rumusan respons peserta kajian dan analisis merentas tujuh peserta kajian bagi mengenal pasti pola dalam himpunan data dan persamaan dan perbezaan dalam respons yang diberi.

Bab 4 Hasil Kajian

Pengenalan

Fokus kajian ini adalah untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Bab ini membentangkan rumusan kajian kes terhadap tujuh peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Herman, Danish, Sofia, Mona, dan Fikri. Seterusnya analisis merentas tujuh peserta kajian dan penjelasan tentang tingkah laku murid Tahun Lima semasa menyelesaikan 18 tugasan berkaitan penaakulan perkadaran sepanjang temu bual klinikal dilakukan. Lima bahagian utama dalam bab ini adalah rumusan kajian kes, membandingkan dan menyusun nilai pecahan, membanding nisbah, hubung kait antara kuantiti, dan implikasi perubahan kuantiti.

Rumusan Kajian Kes

Lili. Lili berumur 11 tahun 1 bulan semasa temu bual dijalankan. Lili dikategorikan oleh guru matematik sebagai seorang yang aktif dan sederhana prestasi matematiknya. Beliau memperoleh markah 78 peratus dalam ujian bulanan pertama 2015, manakala dalam peperiksaan PKSR2 2014, Lili mendapat gred B bagi matematik. Menurut Lili, matematik merupakan mata pelajaran kegemarannya dan beliau sering bersaing dengan rakan sekelas apabila diberi tugasan matematik. Berikut adalah rumusan tingkah laku Lili berkaitan penaakulan perkadaran melibatkan nisbah dan kadaran.

1. Lili boleh membandingkan dua pecahan sama penyebut. Beliau membandingkan nilai pengangka dua pecahan secara lisan bagi menentukan pecahan mana yang lebih besar.
2. Lili boleh membandingkan dua pecahan sama pengangka secara membentuk pecahan yang sama nilai dengan pecahan asal dengan melakukan pendaraban terhadap pengangka dan penyebut kedua-dua pecahan bagi memperoleh

penyebut yang sama sebelum membandingkan nilai pengangka untuk menentukan pecahan mana yang lebih besar.

3. Lili boleh membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka. Beliau secara lisan menyatakan satu pecahan lebih besar berbanding satu lagi pecahan dengan membandingkan nilai penyebut kedua-dua pecahan. Lili juga membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal dengan melakukan operasi pendaraban terhadap pengangka dan penyebut sebelum membandingkan pengangka bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
4. Lili boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan dengan menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara dan menyenaraikan semua pecahan yang terletak antara kedua-dua pecahan tersebut dengan betul. Lili turut menegaskan tiada pecahan lain yang terletak antara dua pecahan tersebut selain yang dinyatakan.
5. Lili boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan dengan menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara sebelum menyusun kesemua pecahan mengikut urutan menurun dengan membandingkan nilai pengangka setiap pecahan.
6. Lili boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit secara perbandingan lisan dengan mengemukakan perkataan dan pernyataan seperti “lebih besar” dan “lebih banyak” yang menggambarkan perbezaan dalam dua situasi. Beliau juga boleh memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan. Beliau kemudian membandingkan penyebut pecahan tersebut bagi menentukan perbezaan dua situasi.

7. Lili pada mulanya tidak boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar. Beliau mencari beza antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah dan kemudian menganggap dua nisbah tersebut adalah sama. Namun, Lili kemudian boleh membuat perbandingan dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain secara pembahagian panjang dan membandingkan hasil bahagi dalam bentuk nombor perpuluhan. Beliau menganggap dua nisbah tersebut berbeza.
8. Lili pada mulanya tidak boleh membanding lebih dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar. Beliau membuat perbandingan meneka secara lisan dengan mengemukakan perkataan yang menggambarkan perbezaan dalam dua situasi. Namun, beliau boleh membanding lebih dua nisbah dengan membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal secara operasi darab terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal. Beliau kemudian menganggap semua nisbah berbeza, sebelum membandingkan dan menyusun nisbah setara mengikut urutan menurun.
9. Lili boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar. Beliau secara lisan mengemukakan beberapa perkatan yang menggambarkan perbandingan antara dua situasi, sebelum melukis dua rajah segiempat yang mewakili nisbah dan membahagikan rajah satu segiempat kepada bahagian yang mewakili satu kuantiti. Selain itu, Lili juga dapat menentukan berapa kali kepadatan ruang satu segiempat berbanding satu lagi segiempat dengan melakukan operasi bahagi bukan sahaja bagi dua nisbah, malah bagi membanding lebih dua nisbah. Beliau juga boleh membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal dengan melakukan operasi bahagi terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal bagi menyamakan salah satu

kuantiti dalam nisbah tersebut dengan satu lagi nisbah sebelum menganggap dua nisbah tersebut adalah setara.

10. Lili tidak boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah keserupaan melibatkan kuantiti selanjar. Beliau mencuba beberapa kali untuk menentukan berapa kali besar satu objek berbanding objek lain dengan melakukan operasi darab secara bertulis, namun tidak berjaya menentukan dengan tepat. Walau bagaimanapun, beliau tahu julat pembesaran antara dua objek tersebut. Lili juga mencuba membina nisbah yang lain dalam bentuk jadual secara menambah berulang untuk membandingkan dua objek, namun beliau keliru dan tidak meneruskannya.
11. Lili boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua. Selain itu, Lili turut melukis anak panah yang menghubungkan antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah dan mengenal pasti hubungan pendaraban antara kuantiti tersebut.
12. Lili pada mulanya tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti melibatkan konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal, tetapi hasil bahagi berbaki menyebabkan beliau memikirkan cara lain. Lili kemudian dapat menentukan kuantiti yang dikehendaki dengan menambah nisbah asal beberapa kali hingga

mencapai kuantiti yang dikehendaki. Beliau juga tahu kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal boleh didarab dengan tiga.

13. Lili boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
14. Lili tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti melibatkan konteks nisbah bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan melakukan operasi tolak antara dua kuantiti.
15. Lili pada mulanya tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan nombor bulat kerana melakukan operasi tolak antara dua kuantiti. Namun, beliau kemudian dapat menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mengenal pasti hubungan berapa kali panjang antara dua kuantiti dalam nisbah asal secara pendaraban dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
16. Lili tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti melibatkan konteks keserupaan bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan melakukan operasi tolak antara dua kuantiti.

17. Lili boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit dengan mengemukakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti, selain mengenal pasti hubungan kesetaraan antara lebih daripada dua nisbah berubah dalam arah yang sama dengan skala tertentu melibatkan operasi pembahagian.
18. Lili boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti.
19. Lili boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menjelaskan secara lisan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Namun, beliau keliru dan tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui.
20. Lili boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti melibatkan konteks masalah keserupaan dan kuantiti selanjar dengan mengemukakan perkataan menggambarkan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang sama. Beliau juga mengenal pasti hubungan kesetaraan antara tiga nisbah dengan skala tertentu melibatkan operasi pendaraban dan pembahagian.

Wani. Wani adalah seorang murid Tahun Lima yang berumur 11 tahun semasa temu bual dijalankan. Guru matematik menyifatkan Wani sebagai salah seorang murid yang rajin dan sederhana dalam mata pelajaran matematik. Dalam peperiksaan PKSR2

2014, Wani mendapat gred B bagi matematik. Manakala dalam ujian bulanan pertama 2015 pula, beliau mendapat markah 66 peratus dalam matematik. Menurut Wani, walaupun matematik merupakan mata pelajaran yang beliau minati tetapi beliau sering keliru dan tidak faham bagi sesetengah topik. Berikut adalah rumusan tingkah laku Wani berkaitan penaakulan perkadaran melibatkan nisbah dan kadaran.

1. Wani boleh membandingkan dua pecahan sama penyebut. Beliau membandingkan nilai pengangka dua pecahan secara lisan bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar. Beliau turut membuat perbandingan dengan melukis garisan yang membahagikan setiap satu daripada dua cip kertas kepada beberapa bahagian sama besar sebelum melorek bahagian tertentu bagi mewakilkan pecahan dan kemudian membandingkan kawasan berlorek bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
2. Wani boleh membandingkan dua pecahan sama pengangka. Beliau melukis garisan membahagikan setiap satu daripada dua jalur kertas kepada beberapa bahagian sama besar sebelum melorek bahagian tertentu bagi mewakilkan pecahan. Beliau kemudian membandingkan kawasan berlorek bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
3. Wani boleh membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka. Beliau secara lisan menyatakan satu pecahan lebih besar berbanding satu lagi pecahan dengan membandingkan nilai penyebut kedua-dua pecahan.
4. Wani boleh menentukan sebahagian nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan. Beliau menganggap tugasan tersebut sukar dan hanya meneka secara spontan dengan menyebut beberapa pecahan yang terletak di antara dua pecahan, yang mana tidak semua pecahan yang disebut adalah betul.
5. Wani boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Beliau melukis empat segiempat secara selari dan membahagikan setiap segiempat

kepada beberapa bahagian berdasarkan nilai penyebut setiap pecahan, sebelum melorek bahagian mengikut nilai pengangka setiap pecahan. Beliau kemudiannya membandingkan keluasan kawasan yang berlorek dan menyusun pecahan bermula dengan pecahan paling besar. Walaupun tidak yakin, Wani menganggap kawasan berlorek yang besar menggambarkan nilai pecahan yang besar.

6. Wani pada mulanya boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Beliau membuat perbandingan secara lisan dengan mengemukakan perkataan dan pernyataan seperti lebih besar, lebih banyak yang menggambarkan perbezaan dalam dua situasi. Namun, ketika beliau menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan membahagikan satu kuantiti dengan kuantiti lain dalam nisbah yang sama secara pembahagian panjang, Wani tidak dapat membandingkan hasil bahagi dalam bentuk pecahan dengan betul kerana menganggap kedua-dua hasil bahagi nisbah adalah sama.
7. Wani tidak boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar. Beliau mencari beza antara kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah, sebelum membandingkan dua hasil tolak. Oleh kerana hasil tolak dua kuantiti adalah sama, maka Wani menganggap dua nisbah tersebut sama. Namun, dalam membanding lebih dua nisbah, beliau memetak satu keseluruhan setiap benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan. Wani kemudian membandingkan dan menyusun pecahan mengikut urutan menaik.
8. Wani boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar. Beliau secara lisan mengemukakan beberapa

perkataan yang menggambarkan perbandingan antara dua situasi. Beliau juga boleh membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal dengan melakukan operasi bahagi terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal bagi menyamakan salah satu kuantiti dalam nisbah tersebut dengan satu lagi nisbah sebelum menganggap dua nisbah tersebut adalah setara.

9. Wani tidak boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar. Beliau mencuba membina nisbah yang lain dalam bentuk jadual secara menambah berulang kali untuk membandingkan dua objek, namun beliau keliru dan tidak meneruskannya.
10. Wani boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
11. Wani pada mulanya tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal, tetapi hasil bahagi berbaki menyebabkan beliau memikirkan cara lain. Wani kemudian dapat menentukan kuantiti yang dikehendaki kerana tahu kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal boleh didarab dengan tiga.
12. Wani tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau mencari beza antara dua

kuantiti dalam nisbah sebelum membandingkan dengan hasil tolak dua kuantiti dalam nisbah lain.

13. Wani tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan melakukan operasi tolak antara dua kuantiti.
14. Wani tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat kerana melakukan operasi tolak antara dua kuantiti.
15. Wani tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan melakukan operasi tolak antara dua kuantiti.
16. Wani boleh menyatakan implikasi perubahan kuaniti dua melibatkan konteks masalah nisbah dan kadar masing-masing bagi kuantiti diskrit dan selanjar dengan menggunakan perkataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama.
17. Wani boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menjelaskan secara lisan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Namun, beliau keliru dan tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

18. Wani tidak boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar. Beliau mencari beza antara dua kuantiti membabitkan operasi tolak antara dua kuantiti dalam satu nisbah sebelum membandingkan dua hasil tolak dengan mengemukakan perkataan menggambarkan perubahan. Namun, Wani boleh mengenal pasti perubahan arah kuantiti dalam satu nisbah bertambah bergantung kepada pertambahan dalam satu lagi kuantiti.

Danish. Danish adalah seorang murid Tahun Lima yang berumur 11 tahun 4 bulan semasa temu bual dijalankan. Guru matematik menggambarkan beliau seorang murid yang disenangi rakan dan guru bukan sahaja kerana perwatakan yang peramah, malahan sangat rajin dan sentiasa menunjukkan minat dalam mata pelajaran matematik. Beliau memperolehi gred A bagi matematik dalam peperiksaan PKSR2 2014, manakala dalam ujian bulanan pertama 2015 pula, beliau mendapat markah 82 peratus dalam matematik. Guru matematik mengkategorikan Danish sebagai seorang murid yang cemerlang dalam pembelajaran matematik. Berikut adalah rumusan tingkah laku Danish berkaitan penaakulan perkadaran melibatkan nisbah dan kadaran.

1. Danish boleh membandingkan dua pecahan sama penyebut. Beliau membandingkan nilai pengangka dua pecahan secara lisan bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
2. Danish boleh membandingkan dua pecahan sama pengangka. Beliau membentuk pecahan yang sama nilai dengan pecahan asal dengan melakukan pendaraban terhadap pengangka dan penyebut kedua-dua pecahan bagi memperoleh penyebut yang sama. Danish kemudian membandingkan nilai pengangka untuk menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
3. Danish boleh membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka. Beliau membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal dengan

melakukan operasi pendaraban terhadap pengangka dan penyebut sebelum membandingkan pengangka bagi menentukan nilai pecahan yang besar.

4. Danish boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan dengan menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara sebelum menyenaraikan semua pecahan yang terletak antaranya dengan betul. Beliau turut menegaskan terdapat pecahan lain yang terletak antara dua pecahan tersebut selain yang dinyatakan dengan mendarab atau membahagi pengangka dan penyebut dengan nombor yang lain.
5. Danish boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Beliau membanding nilai setiap pecahan yang diberi dengan satu pecahan rujukan yang difikirkannya, sebelum menyusun kesemua pecahan secara urutan menurun berserta justifikasi.
6. Danish boleh membanding dua nisbah membabitkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Beliau memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan. Beliau kemudian membandingkan penyebut pecahan tersebut bagi menentukan perbezaan dua situasi. Selain itu, beliau juga boleh menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara sebelum membandingkan pengangka dua pecahan tersebut.
7. Danish boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar dengan membanding dua nisbah dengan memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan. Beliau turut mengenal pasti hubungan kesetaraan antara lebih daripada dua nisbah yang

berubah dalam arah yang sama dengan skala tertentu melibatkan operasi pembahagian.

8. Danish boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar secara membanding dua nisbah dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan melakukan pembahagian panjang sebelum membandingkan kedua-dua hasil bahagi. Bagi membanding lebih daripada dua nisbah, beliau membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal dengan melakukan operasi darab terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal bagi menyamakan salah satu kuantiti dalam nisbah tersebut dengan satu lagi nisbah sebelum menganggap dua nisbah tersebut adalah setara.
9. Danish boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar dengan menentukan berapa kali besar satu objek berbanding objek lain dengan melakukan menulis nisbah dalam bentuk pecahan sebelum menjelaskan secara kaedah pemansuhan.
10. Danish boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat secara mencongak untuk mengenal pasti hubungan berapa kali ganda antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah secara pendaraban. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua. Selain itu, Danish melakukan menambah secara berulang kedua-dua kuantiti dalam nisbah secara serentak dan berhenti apabila mencapai kuantiti yang disasarkan.

11. Danish boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau mengenal pasti hubungan berapa kali ganda antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah secara pendaraban.
12. Danish pada mulanya tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat kerana membuat penambahan berulang secara serentak bagi dua kuantiti. Namun, beliau kemudian dapat menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
13. Danish boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan meringkaskan nisbah kepada sebutan terendah menggunakan kaedah pemansuhan. Beliau turut menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua. Danish hanya menunjukkan satu langkah, iaitu langkah pembahagian kerana menganggap pendaraban hasil bahagi melibatkan nombor perpuluhan adalah sukar.
14. Danish boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi dua struktur hubungan nombor, iaitu bukan nombor bulat dan nombor bulat dan bukan

nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan mengenal pasti hubungan berapa kali panjang antara dua kuantiti dalam nisbah asal secara pendaraban dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.

15. Danish boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti. Selain itu, beliau turut mengenal pasti hubungan kesetaraan antara lebih daripada dua nisbah berubah dalam arah yang sama dengan skala tertentu melibatkan operasi pembahagian.
16. Danish boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti.
17. Danish boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menjelaskan secara lisan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Namun, beliau keliru dan tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui.
18. Danish boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah keserupaan dan kuantiti selanjar dengan mengemukakan perkataan dan simbol menggambarkan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang sama. Beliau juga mengenal pasti hubungan

kesetaraan antara tiga nisbah dengan skala tertentu melibatkan operasi pendaraban dan pembahagian.

Herman. Herman adalah seorang murid Tahun Lima yang berumur 11 tahun 3 bulan semasa temu bual dijalankan. Menurut Herman, matematik merupakan mata pelajaran yang adakalanya sukar dan adakalanya mudah. Dalam peperiksaan PKSR2 2014, Herman mendapat gred A bagi matematik. Manakala dalam ujian bulanan pertama 2015 pula, beliau mendapat markah 80 peratus dalam matematik. Menurut guru matematik, walaupun Herman memperoleh gred A, namun prestasi matematik beliau adalah sederhana dan tidak konsisten semasa dalam Tahun Empat. Berikut adalah rumusan tingkah laku Herman berkaitan penaakulan perkadaran melibatkan nisbah dan kadaran.

1. Herman boleh membandingkan dua pecahan sama penyebut. Beliau membandingkan nilai pengangka dua pecahan secara lisan bagi menentukan pecahan yang lebih besar.
2. Herman boleh membandingkan dua pecahan sama pengangka. Beliau membentuk pecahan yang sama nilai dengan pecahan asal dengan melakukan pendaraban terhadap pengangka dan penyebut kedua-dua pecahan bagi memperoleh penyebut yang sama sebelum membandingkan nilai pengangka untuk menentukan nilai pecahan yang lebih besar. Beliau juga membahagikan pengangka dengan penyebut bagi setiap pecahan sebelum membandingkan hasil bahagi tersebut dalam menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
3. Herman boleh membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka. Beliau membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal dengan melakukan operasi pendaraban terhadap pengangka dan penyebut sebelum membandingkan pengangka bagi menentukan nilai pecahan yang besar.

4. Herman tidak boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan. Beliau cuba menggunakan garis nombor untuk mewakilkan dua pecahan yang diberi, namun tidak tahu untuk meletakkan kedudukan dua pecahan tersebut dan beralih kepada meneka secara lisan.
5. Herman boleh menentukan sebahagian nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan. Beliau meneka secara spontan dengan menyebut dua pecahan yang terletak masing-masing sebelum dan selepas dua pecahan yang diberi, yang mana dua pecahan yang disebut adalah betul.
6. Herman boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Beliau mempermudahkan satu daripada pecahan asal kepada pecahan unit secara membahagi pengangka dan penyebut dengan angka yang sama sebelum membandingkan penyebut semua pecahan unit. Beliau kemudian menyusun pecahan mengikut urutan menaik dan mengemukakan alasan bahawa semakin kecil penyebut pecahan unit, maka nilai pecahan semakin besar.
7. Herman boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Beliau membuat perbandingan secara lisan dengan mengemukakan perkataan dan pernyataan seperti lebih besar dan lebih banyak yang menggambarkan perbezaan dalam dua situasi. Beliau juga boleh menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan membahagikan satu kuantiti dengan kuantiti lain dalam nisbah yang sama secara pembahagian panjang. Beliau kemudian membandingkan hasil bahagi dalam bentuk nombor perpuluhan bagi menentukan perbezaan dua situasi.
8. Herman boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar. Beliau membuat perbandingan dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain secara

pembahagian panjang dan membandingkan hasil bahagi dalam bentuk nombor perpuluhan. Beliau menganggap dua nisbah tersebut berbeza. Herman juga boleh membanding dua nisbah dengan memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan.

9. Herman pada mulanya tidak boleh membanding lebih daripada dua nisbah konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar, yang mana beliau meneka secara lisan dan kemudian mencari beza antara kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah sebelum membandingkan dua hasil tolak. Namun, Herman beralih kepada cara lain dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain secara pembahagian panjang sebelum membandingkan dan menyusun hasil bahagi dalam bentuk nombor perpuluhan dengan betul dan menganggap semua nisbah berbeza.
10. Herman boleh membanding dua nisbah konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan melakukan pembahagian panjang sebelum membandingkan kedua-dua hasil bahagi. Namun, Herman tidak boleh membanding lebih daripada dua nisbah, yang mana beliau hanya meneka dengan mengemukakan beberapa perkataan yang menggambarkan perbandingan situasi berbeza.
11. Herman boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan melakukan pembahagian panjang sebelum membandingkan kedua-dua hasil bahagi dalam bentuk nombor

perpuluhan dan menganggapnya berapa kali besar satu objek berbanding satu lagi objek lain.

12. Herman pada mulanya tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat kerana mencari nilai bagi satu unit secara tanpa memahami makna hasil bahagi yang tidak munasabah. Beliau kemudian dapat menentukan kuantiti yang dikehendaki dengan mendarab dua kuantiti dalam nisbah dengan nombor yang sama.
13. Herman tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau hanya menggandakan setiap kuantiti dalam nisbah secara menambah dan berhenti menambah kerana sedar hasil tambah seterusnya akan melebihi kuantiti yang disasarkan. Beliau kemudian menambah bilangan yang secukupnya untuk memperoleh kuantiti yang disasarkan.
14. Herman boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan membina jadual menggunakan kuantiti dalam nisbah asal. Beliau kemudian meringkaskan nisbah asal kepada sebutan terendah dengan membahagi secara mencongak. Beliau seterusnya menggandakan nisbah yang diringkaskan secara menambah bagi memperoleh kuantiti yang disasarkan dan mengulangi langkah yang sama terhadap satu lagi kuantiti.
15. Herman boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat dengan melakukan operasi

bahagi antara kuantiti dalam nisbah asal sebelum mendarab hasil bahagi bagi memperoleh kuantiti yang disasarkan.

19. Herman boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan mengenal pasti hubungan berapa kali panjang antara dua kuantiti dalam dua nisbah secara pembahagian panjang dan menganggap hasil bahagi sebagai hubungan "kali panjang". Beliau kemudiannya mendarab hasil bahagi tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah asal.
20. Herman boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks berkaitan masalah nisbah bagi kuantiti diskrit dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti, selain mengenal pasti hubungan kesetaraan antara lebih daripada dua nisbah berubah dalam arah yang sama dengan skala tertentu melibatkan operasi pembahagian.
21. Herman boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama.
22. Herman boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menjelaskan secara lisan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Namun, beliau keliru dan tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui.
23. Herman boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar dengan mengemukakan perkataan

menggambarkan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang sama. Beliau juga boleh mengenal pasti hubungan kesetaraan antara tiga nisbah dengan skala tertentu melibatkan operasi pendaraban dan pembahagian.

Mona. Mona berumur 11 tahun 2 bulan semasa temu bual dijalankan. Mona merupakan seorang penolong ketua pengawas dan sentiasa menunjukkan prestasi cemerlang dalam semua mata pelajaran, terutamanya matematik. Beliau memperoleh markah 93 peratus dalam ujian bulanan pertama 2015, manakala dalam peperiksaan PKSR2 2014, Mona mendapat gred A bagi matematik. Menurut Mona, matematik merupakan mata pelajaran kegemarannya dan beliau sering bersaing dengan rakan sekelas apabila diberi tugasan matematik. Berikut adalah rumusan tingkah laku Mona berkaitan penaakulan perkadaran melibatkan nisbah dan kadaran.

1. Mona boleh membandingkan dua pecahan sama penyebut. Beliau membandingkan nilai pengangka dua pecahan secara lisan bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
2. Mona boleh membandingkan dua pecahan sama pengangka dengan membandingkan nilai penyebut dua pecahan secara lisan bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar. Beliau menganggap pecahan yang mempunyai nilai penyebut yang kecil berbanding dengan satu lagi pecahan adalah pecahan yang besar.
3. Mona boleh membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka. Beliau membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal dengan melakukan operasi pendaraban terhadap pengangka dan penyebut sebelum membandingkan pengangka bagi menentukan nilai pecahan yang besar.
4. Mona boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan dengan mempermudahkan satu daripada pecahan secara kaedah pemansuhan

sebelum menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara. Beliau kemudian melukis satu garis nombor bersenggatan dan melabelkan senggatan pertama dan terakhir masing-masing dengan dua pecahan diberi, sebelum menyatakan semua pecahan yang terletak antaranya dengan betul.

5. Mona boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan. Beliau sedar terdapat pecahan lain di antara dua pecahan diberi. Menurutnya, semakin besar nombor yang didarab, maka semakin banyak pecahan yang diperoleh dengan memberi alasan saiz senggatan semakin mengecil.
6. Mona boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Beliau menyamakan penyebut semua pecahan dengan melakukan pendaraban secara mencongak. Beliau kemudian menyusun kesemua pecahan mengikut urutan menurun dengan membandingkan nilai pengangka setiap pecahan. Mona menganggap semakin besar nilai pengangka, maka semakin besar nilai sesuatu pecahan. Beliau juga sedar bahawa pecahan baru yang dibentuk dan pecahan asal adalah "sama" jika dipermudahkan. Selain itu, beliau juga boleh mempermudahkan satu daripada pecahan asal kepada pecahan unit secara membahagi pengangka dan penyebut dengan nombor yang sama sebelum membandingkan penyebut semua pecahan unit dan menyusun mengikut urutan menaik. Beliau memberi alasan semakin kecil penyebut pecahan unit, maka nilai pecahan semakin besar.
7. Mona boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit dengan membuat perbandingan secara lisan, iaitu mengemukakan perkataan dan pernyataan seperti "lebih besar" dan "lebih banyak" yang menggambarkan perbezaan dalam dua situasi. Selain itu, beliau juga boleh memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang

sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan sebelum membandingkan penyebut pecahan tersebut dan menganggap dua situasi adalah berbeza. Mona juga boleh membanding dua nisbah konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit dengan menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara, sebelum membandingkan pengangka dua pecahan tersebut.

8. Mona pada mulanya tidak boleh membanding lebih dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar, yang mana beliau mencari beza antara kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah, sebelum membandingkan dua hasil tolak. Namun, beliau boleh membanding dua nisbah dengan memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan.
9. Mona pada mulanya tidak boleh membanding lebih daripada dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar, yang mana beliau membandingkan nisbah secara lisan dengan hanya mengambil kira satu kuantiti sahaja. Namun, beliau boleh membanding lebih daripada dua nisbah secara membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal melalui operasi darab terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal dan menganggap semua nisbah berbeza, sebelum membandingkan dan menyusun nisbah setara mengikut urutan menurun.
10. Mona boleh membanding dua atau lebih daripada dua nisbah melibatkan konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan membanding secara lisan, iaitu mengemukakan pernyataan sebelum membentuk nisbah unit secara membahagi dan membuat perbandingan. Beliau juga boleh membentuk

nisbah setara dengan mendarab dan membahagi bagi membandingkan dua nisbah. Dalam membanding lebih daripada dua nisbah, Mona sekali lagi membentuk nisbah unit secara membahagi sebelum membanding dan menyusun mengikut urutan menaik. Beliau turut membandingkan skala pembesaran antara setiap nisbah dengan melakukan operasi bahagi dan darab.

11. Mona boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan melakukan pembahagian panjang sebelum membandingkan kedua-dua hasil bahagi dalam bentuk nombor perpuluhan.
12. Mona boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat dengan menggandakan kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah secara mencongak. Beliau turut menjelaskan kaedah yang diajar di sekolah, iaitu menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua. Selain itu, Mona juga sedar terdapat hubungan pendaraban antara kuantiti dalam nisbah.
13. Mona boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan mengenal pasti hubungan berapa kali ganda antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah secara mencongak.
14. Mona boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti

yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.

15. Mona boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan meringkaskan nisbah kepada sebutan terendah, iaitu membahagi secara mencongak. Beliau kemudian mendarab satu kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi memperoleh kuantiti yang disasarkan sebelum mendarab nombor yang sama terhadap satu lagi kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.
16. Mona boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat dengan mengenal pasti hubungan pendaraban antara dua kuantiti dalam nisbah asal dan menggunakan hubungan tersebut kepada nisbah kedua.
17. Mona boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor, iaitu bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan meringkaskan nisbah asal kepada sebutan terendah, iaitu membahagi secara mencongak dengan alasan memudahkan beliau melakukan pendaraban antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah. Beliau kemudian mendarab nombor yang sama terhadap satu kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi memperoleh kuantiti yang disasarkan.
18. Mona boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit dengan menggunakan pernyataan dan simbol anak panah

yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti. Selain itu, beliau juga mengenal pasti hubungan kesetaraan antara lebih daripada dua nisbah berubah dalam arah yang sama dengan skala tertentu melibatkan operasi pembahagian.

19. Mona boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti.
20. Mona boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menjelaskan secara lisan dan menggunakan simbol anak panah bagi menggambarkan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Beliau juga boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan menganggap jika satu kuantiti didarab dengan faktor skala tertentu, maka satu lagi kuantiti perlu dibahagi dengan faktor skala yang sama.
21. Mona boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti melibatkan konteks masalah keserupaan dan kuantiti selanjar dengan mengemukakan perkataan yang menggambarkan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang sama. Beliau juga boleh mengenal pasti hubungan kesetaraan antara tiga nisbah dengan skala tertentu melibatkan operasi pendaraban dan pembahagian.

Sofia. Sofia adalah seorang murid Tahun Lima yang berumur 11 tahun 2 bulan semasa temu bual dijalankan. Sofia mengatakan bahawa beliau kurang berminat dalam mata pelajaran matematik kerana terlalu banyak pengiraan dan kerap kali tidak dapat menyelesaikan masalah matematik. Guru matematik mengkategorikan Sofia sebagai murid yang sederhana dalam pembelajaran matematik. Dalam peperiksaan PKSR2 2014, Sofia mendapat gred B bagi matematik. Manakala dalam ujian bulanan pertama 2015 pula, beliau mendapat markah 72 peratus dalam matematik. Berikut adalah rumusan tingkah laku Sofia berkaitan penaakulan perkadaran melibatkan nisbah dan kadaran.

1. Sofia boleh membandingkan dua pecahan sama penyebut. Beliau melukis garisan membahagikan setiap satu daripada dua cip kertas kepada beberapa bahagian sama besar sebelum melorek bahagian tertentu bagi mewakilkan pecahan. Beliau kemudian membandingkan kawasan berlorek bagi menentukan nilai pecahan mana yang lebih besar.
2. Sofia boleh membandingkan dua pecahan sama pengangka. Beliau melukis garisan membahagikan setiap satu daripada dua jalur kertas kepada beberapa bahagian sama besar sebelum melorek bahagian tertentu bagi mewakilkan pecahan. Beliau kemudian membandingkan kawasan berlorek bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
3. Sofia boleh membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka secara lisan dengan menyatakan nilai satu pecahan lebih besar berbanding satu lagi pecahan dengan membandingkan nilai penyebut kedua-dua pecahan. Beliau juga membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal dengan melakukan operasi pendaraban terhadap pengangka dan penyebut sebelum membandingkan pengangka bagi menentukan nilai pecahan yang besar.
4. Sofia boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan dengan menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara. Beliau melukis satu garis nombor bersenggatan dan melabelkan senggatan pertama dan terakhir masing-masing dengan dua pecahan setara,

sebelum menyatakan semua pecahan yang terletak antaranya dengan betul. Selain itu, Sofia juga boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan dengan menyenaraikan sifir bagi dua penyebut pecahan bertujuan mencari faktor yang sama dalam kedua-dua sifir untuk membentuk pecahan setara secara pendaraban. Beliau kemudian menyebut secara lisan semua pecahan yang terletak antaranya dengan betul.

5. Sofia boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Beliau membanding nilai setiap pecahan yang diberi dengan satu pecahan rujukan yang difikirkannya, sebelum menyusun kesemua pecahan mengikut urutan menurun berserta justifikasi.
6. Sofia boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Beliau menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara sebelum menyusun kesemua pecahan dengan urutan menurun dengan membandingkan nilai pengangka setiap pecahan.
7. Sofia boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Beliau membuat perbandingan secara lisan dengan mengemukakan perkataan dan pernyataan seperti "lebih besar" dan "lebih banyak" yang menggambarkan perbezaan dalam dua situasi.
8. Sofia boleh membanding dua nisbah konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Beliau mencuba beberapa kali memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan. Beliau kemudian membandingkan penyebut pecahan tersebut dan menganggap dua nisbah tersebut berbeza.
9. Sofia tidak boleh membanding dua atau lebih dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar. Beliau mencari beza antara kuantiti yang

sepadan dalam dua nisbah sebelum membandingkan dua hasil tolak. Oleh kerana hasil tolak dua kuantiti adalah sama, maka Sofia menganggap dua nisbah tersebut sama.

10. Sofia pada mulanya boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar secara lisan dan dapat menyatakan “kali sempit” satu ruang berbanding ruang lain. Namun, beliau tidak dapat membandingkan dan menyusun semua nisbah mengikut urutan. Sofia hanya boleh membanding bagi kuantiti nisbah yang mempunyai gandaan yang sama.
11. Sofia boleh membanding dua nisbah konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan membina jadual menggunakan nisbah asal. Sofia turut menjadikan salah satu nisbah separuh dalam jadual bagi menentukan “kali besar” satu objek berbanding objek lain.
12. Sofia boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua. Namun, Sofia kemudian sedar hubungan antara dua kuantiti sepadan dalam dua nisbah secara pendaraban.
13. Sofia pada mulanya tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu, namun beliau tidak meneruskan penyelesaian kerana menganggap pembahagian yang melibatkan baki adalah sesuatu yang menyukarkan. Sofia kemudian membentuk tiga kumpulan bertiga dan

menambah secara berulang kali kumpulan tersebut hingga mencapai kuantiti yang dikehendaki.

14. Sofia pada mulanya tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat. Beliau hanya menggandakan setiap kuantiti dalam nisbah secara menambah berulang kali dan berhenti menambah kerana sedar hasil tambah seterusnya akan melebihi kuantiti yang disasarkan. Beliau kemudian menambah bilangan yang secukupnya untuk memperoleh kuantiti yang disasarkan. Namun, Sofia beralih kepada cara berbeza dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mengkoordinasi dua kuantiti secara menambah berulang kali dalam bentuk jadual.
15. Sofia boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau hanya menggandakan secara menambah berulang kali setiap kuantiti dalam nisbah asal yang ditulis dalam bentuk pasangan nombor dan dan berhenti menambah kerana sedar hasil tambah seterusnya akan melebihi kuantiti yang disasarkan. Beliau kemudian menambah separuh daripada kuantiti asal untuk memperoleh kuantiti yang disasarkan.
16. Sofia tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat kerana beliau yang pada mulanya menggandakan kuantiti dalam nisbah asal secara menambah, kemudiannya berhenti menambah kerana gandaan tersebut tidak mencapai

kuantiti yang disasarkan. Beliau kemudian tidak lagi membuat ulangan gandaan tetapi menambah nombor yang memberi kuantiti yang disasarkan.

17. Sofia tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan melakukan operasi tolak antara dua kuantiti.
18. Sofia boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti.
19. Sofia boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menjelaskan secara lisan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Namun, beliau keliru dan tidak boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui.
20. Sofia tidak boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar. Beliau mencari beza antara dua kuantiti membabitkan operasi tolak antara dua kuantiti dalam satu nisbah sebelum membandingkan dua hasil tolak dengan mengemukakan perkataan yang menggambarkan perubahan. Namun, Wani boleh mengenal pasti perubahan arah kuantiti dalam satu nisbah bertambah bergantung kepada pertambahan dalam satu lagi kuantiti.

Fikri. Fikri adalah seorang murid Tahun Lima yang berumur 11 tahun semasa temu bual dijalankan. Beliau merupakan murid yang cemerlang dalam semua mata pelajaran dan memperolehi gred A bagi matematik dalam peperiksaan PKSR2 2014. Dalam ujian bulanan pertama 2015 pula, beliau mendapat markah 85 peratus dalam matematik. Sepanjang temu bual, beliau memberi kerjasama yang baik dan menjawab semua soalan yang dikemukakan. Berikut adalah rumusan tentang tingkah laku berkaitan pengetahuan beliau tentang penaakulan perkadaran dalam nisbah dan kadaran.

1. Fikri boleh membandingkan dua pecahan sama penyebut. Beliau membandingkan nilai pengangka dua pecahan secara lisan bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar.
2. Fikri boleh membandingkan dua pecahan sama pengangka. Beliau membandingkan nilai penyebut dua pecahan secara lisan bagi menentukan pecahan yang lebih besar. Beliau menganggap pecahan yang mempunyai nilai penyebut yang kecil berbanding dengan satu lagi pecahan adalah pecahan yang besar.
3. Fikri boleh membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka. Beliau membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal melalui operasi pendaraban terhadap pengangka dan penyebut sebelum membandingkan pengangka bagi menentukan nilai pecahan yang besar.
4. Fikri boleh menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan. Beliau menyamakan penyebut dua pecahan secara pendaraban membentuk pecahan setara dan menyenaraikan semua pecahan yang terletak antaranya dengan betul. Fikri turut menegaskan tiada pecahan lain yang terletak antara dua pecahan tersebut selain yang dinyatakan.
5. Fikri boleh membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Beliau mempermudahkan satu daripada pecahan asal kepada pecahan unit secara membahagi pengangka dan penyebut dengan angka yang sama sebelum

membandingkan penyebut semua pecahan unit dan menyusun mengikut urutan menaik. Beliau memberi alasan semakin kecil penyebut pecahan unit, maka nilai pecahan semakin besar.

6. Fikri boleh membanding dua nisbah melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Beliau menganggap satu daripada nisbah asal sebagai satu kumpulan sebelum melukis kumpulan yang sama dalam nisbah kedua. Beliau kemudian membandingkan lebihan kuantiti dalam nisbah kedua dan menganggap dua nisbah tersebut adalah berbeza.
7. Fikri boleh membanding dua atau lebih daripada dua nisbah dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar. Beliau membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal melalui operasi darab terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal bagi menyamakan salah satu kuantiti dalam nisbah tersebut dengan nisbah yang lain. Fikri kemudian membandingkan satu kuantiti dalam setiap nisbah setara dan menganggap dua nisbah tersebut berbeza. Dalam membandingkan lebih daripada dua nisbah, Fikri menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain secara pembahagian panjang dan membandingkan dan menyusun hasil bahagi dalam bentuk nombor perpuluhan dan menganggap semua nisbah berbeza.
8. Fikri boleh membanding dua dan lebih nisbah dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar. Beliau menentukan skala pembesaran dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah dengan melakukan operasi bahagi secara mencongak sebelum membandingkan dua nisbah dengan mengemukakan pernyataan "kali sempit". Beliau juga boleh membanding lebih daripada dua nisbah secara menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan meringkaskan nisbah asal kepada nisbah unit.

9. Fikri boleh membanding dua nisbah dalam konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar dengan menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan membahagi secara kaedah pemansuhan sebelum membandingkan hasil yang diringkaskan dalam bentuk nombor perpuluhan dan membuat perbandingan dua objek berdasarkan "kali ganda".
10. Fikri boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat dengan menggandakan nisbah asal secara mencongak. Beliau turut menjelaskan kaedah yang diajar di sekolah, iaitu menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mencari nilai bagi satu unit dahulu secara membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
11. Fikri boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan menggandakan kuantiti dalam nisbah secara menambah hingga mencapai kuantiti yang disasarkan. Beliau juga cuba mencari nilai bagi satu kuantiti, namun berhenti dengan alasan hasil bahagi yang diperoleh tidak munasabah.
12. Fikri boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat dengan meringkaskan nisbah asal kepada sebutan terendah sebelum menentukan hubungan antara dua kuantiti dalam nisbah yang sama secara pendaraban. Beliau kemudian turut mengaplikasikan hubungan pendaraban yang sama terhadap nisbah lain bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui. Selain itu, Fikri juga sedar terdapat hubungan pendaraban antara dua kuantiti yang sepadan.

13. Fikri boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan meringkaskan nisbah kepada sebutan terendah, iaitu membahagi secara mencongak. Beliau kemudian mendarab satu kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi memperoleh kuantiti yang disasarkan sebelum mendarab nombor yang sama terhadap satu lagi kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.
14. Fikri boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat dengan mengenal pasti hubungan "kali panjang" antara dua kuantiti dalam nisbah asal dan menggunakan hubungan tersebut kepada nisbah kedua. Beliau turut mengemukakan cara penyelesaian lain dengan meringkaskan nisbah asal secara pembahagian sebelum melakukan operasi darab terhadap kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.
15. Fikri boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui semasa membuat hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dengan mengenal pasti hubungan berapa "kali panjang" antara dua kuantiti dalam nisbah asal secara pendaraban dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
16. Fikri boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit dengan menggunakan perkataan dan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama. Beliau juga dapat mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara

serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti, selain mengenal pasti hubungan kesetaraan antara lebih daripada dua nisbah berubah dalam arah yang sama dengan skala tertentu melibatkan operasi pembahagian.

17. Fikri boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar dengan menggunakan pernyataan yang menggambarkan perubahan arah kuantiti dalam arah yang sama.
18. Fikri boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar dengan menjelaskan secara lisan dan menggunakan simbol anak panah bagi menggambarkan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Beliau juga boleh menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan menganggap jika satu kuantiti didarab dengan faktor skala tertentu, maka satu lagi kuantiti perlu dibahagi dengan faktor skala yang sama.
19. Fikri boleh menyatakan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah keserupaan dan kuantiti selanjar dengan mengemukakan perkataan yang menggambarkan perubahan arah bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang sama. Beliau juga boleh mengenal pasti hubungan kesetaraan antara tiga nisbah dengan skala tertentu melibatkan operasi pendaraban dan pembahagian.

Membanding dan Menyusun Nilai Pecahan

Bahagian ini membentangkan hasil kajian tentang pengetahuan membanding dan menyusun nilai pecahan peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan berkaitan pecahan yang melibatkan beberapa komponen. Jadual 4.1 menunjukkan komponen yang terlibat dalam membanding nilai pecahan.

Jadual 4.1

Komponen dalam membanding dan menyusun nilai pecahan

Komponen Pecahan	Komponen membanding nilai pecahan
Membanding dan menyusun nilai pecahan	1. Membanding pecahan sama penyebut 2. Membanding pecahan sama pengangka 3. Membanding pecahan berlainan penyebut dan pengangka 4. Nilai antara pecahan 5. Menyusun pecahan

Cara peserta kajian membandingkan dan menyusun nilai pecahan boleh dibahagikan kepada lapan kategori, iaitu penentuan secara kualitatif, penentuan berdasarkan nilai, penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, penentuan berdasarkan hasil bahagi, penentuan berdasarkan pecahan setara, penentuan berdasarkan garis nombor, penentuan berdasarkan rujukan, dan penentuan berdasarkan pecahan unit.

Membanding Pecahan Sama Penyebut. Dalam membandingkan pecahan sama penyebut, peserta kajian menggunakan dua kategori, iaitu penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan. Penerangan setiap kategori adalah seperti berikut:

i. *Penentuan berdasarkan nilai*. Peserta kajian membandingkan nilai pengangka dan/atau penyebut dua pecahan secara lisan bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar, lebih kecil, atau sama.

ii. *Penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan*. Peserta kajian melukis rajah atau menggunakan bahan separa konkrit sama ada cip kertas atau jalur kertas yang dibahagikan kepada beberapa bahagian sama besar sebelum melorek bahagian tertentu bagi mewakilkan pecahan. Peserta kajian kemudian membandingkan kawasan bahagian berlorek bagi menentukan nilai pecahan mana yang lebih besar, lebih kecil, atau sama.

Jadual 4.2 merumuskan kategori penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan oleh peserta kajian semasa membandingkan pecahan membabitkan pecahan sama penyebut.

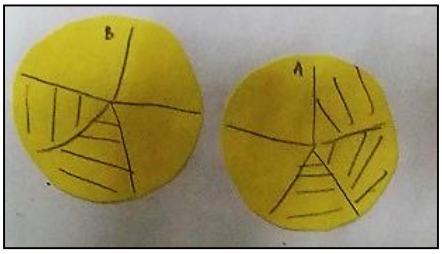
Jadual 4.2

Kategori membanding pecahan sama penyebut

Kategori	Peserta kajian
Penentuan berdasarkan nilai	Lili, Wani, Danish, Herman, Mona, Fikri
Penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan	Wani, Sofia

Berdasarkan Jadual 4.2, enam peserta kajian menggunakan kategori penentuan berdasarkan nilai dan hanya dua peserta kajian yang menggunakan kategori penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan. Berikut dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Wani dan Mona yang menggambarkan dua kategori tersebut.

Wani. Apabila Wani diminta membandingkan dua pecahan yang sama penyebutnya, beliau menggunakan cip kertas yang dibekalkan. Rajah 4.1 menunjukkan lorekan pada cip kertas, manakala Petikan BP1 memaparkan penjelasan tentang langkah kerja yang dibuat.



Rajah 4.1. Langkah kerja Wani bagi tugasan pecahan sama penyebut

Petikan BP1

P: Boleh jelaskan apa yang kamu buat?
S: Saya potong bulatan A dan B ini jadi 5 bahagian. Lepas itu saya lorek ikut pecahan 2/5 dan 3/5. 3/5 lebih besar daripada 2/5.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Sebab ini (menunjuk cip kertas A) kawasan yang berlorek lebih besar daripada ini (menunjuk cip kertas B).
P: Selain bandingkan kawasan berlorek, ada cara lain tak?
S: (Diam seketika). Sebenarnya saya tak perlu lukis (tersenyum).
P: Apa maksud kamu?

S: Bandingkan saja atas ini (menunjuk pengangka). Mana yang besar maknanya pecahan itu besar.
P: Kenapa bandingkan atas sahaja?
S: Sebab bawah dah sama.
P: Apa maksud “3” dan “2” ini (menunjuk pengangka).
S: (Diam seketika). Satu kek potong 5. Ini (menunjuk cip kertas A), 3 potong kek dan ini (menunjuk cip kertas B) 2 potong kek.

Berdasarkan Petikan BP1, Wani menggunakan dua cip kertas yang setiap satu dibahagikan kepada 5 bahagian sama besar. Beliau kemudian mewakilkan pecahan 2/5 dan 3/5 masing-masing dengan melorek 2 dan 3 bahagian daripada keseluruhan 5 bahagian. Beliau kemudiannya menganggap 3/5 lebih besar daripada 2/5 dengan membandingkan kawasan berlorek kedua-dua cip kertas. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa Wani menggunakan kategori penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan dalam membandingkan pecahan dengan penyebut sama. Selain itu, Wani juga membandingkan pecahan tersebut menggunakan satu lagi kategori, iaitu penentuan berdasarkan nilai. Ketika diminta mengemukakan cara yang berbeza, Wani sedar bahawa beliau tidak perlu menggunakan cip kertas, sebaliknya hanya membandingkan nilai pengangka. Menurut beliau sekiranya penyebut kedua-dua pecahan tersebut adalah sama, maka pengangka yang lebih besar menggambarkan pecahan tersebut lebih besar berbanding satu lagi pecahan.

Mona. Dalam membandingkan pecahan yang sama penyebut, Mona hanya menggunakan kategori penentuan berdasarkan nilai. Petikan BP2 memaparkan respons beliau.

Petikan BP2

S: 3/5 lebih besar.
P: Bagaimana kamu tahu?
S: 3 besar daripada 2, lagipun tolak 3 dengan 2 ada lebih satu bahagian daripada 2/5.
P: Apa maksud kamu “lebih satu bahagian”?
S: 3/5 lebih 1/5 daripada 2/5.

Berdasarkan Petikan BP2, Mona membandingkan pecahan 3/5 dan 2/5 dengan mempertimbangkan nilai pengangka kedua-dua pecahan. Beliau menyatakan 3 lebih besar daripada 2 dan menganggap 3/5 lebih besar berbanding 2/5. Mona juga sedar 3/5 mempunyai 1/5 bahagian lebih banyak daripada 2/5. Tindakan ini menggambarkan bahawa beliau membandingkan pecahan dengan menggunakan kategori penentuan berdasarkan nilai.

Kesimpulan. Hanya Wani menggunakan dua kategori semasa membandingkan pecahan sama penyebut, iaitu penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, manakala peserta kajian yang lain, iaitu Lili, Danish, Herman, Mona, Sofia, dan Fikri hanya mengemukakan satu kategori penentuan sahaja.

Membanding Pecahan Sama Pengangka. Dalam membandingkan pecahan sama pengangka, peserta kajian menggunakan empat kategori, iaitu penentuan berdasarkan nilai, penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, penentuan berdasarkan hasil bahagi, dan penentuan berdasarkan pecahan setara. Kesemua kategori tersebut diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa membandingkan pecahan sama pengangka. Penerangan bagi kategori penentuan berdasarkan hasil bahagi dan penentuan berdasarkan pecahan setara adalah seperti berikut:

i. *Penentuan berdasarkan hasil bahagi*. Peserta kajian melakukan operasi pembahagian antara pengangka dan penyebut bagi setiap pecahan sebelum membandingkan hasil bahagi tersebut untuk menentukan nilai pecahan mana yang lebih besar, lebih kecil, atau sama.

ii. *Penentuan berdasarkan pecahan setara*. Peserta kajian menyamakan penyebut dua atau lebih daripada dua pecahan dengan membentuk pecahan yang sama nilai dengan pecahan asal melalui operasi darab terhadap pengangka dan penyebut dengan angka yang sama atau melakukan kaedah pemansuhan. Peserta kajian kemudian membandingkan pengangka pecahan bagi menentukan nilai pecahan yang lebih besar, lebih kecil, atau sama.

Jadual 4.3 merumuskan kategori penentuan berdasarkan nilai, penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, penentuan berdasarkan hasil bahagi, dan penentuan berdasarkan pecahan setara oleh peserta kajian semasa membandingkan pecahan membabitkan pecahan sama pengangka.

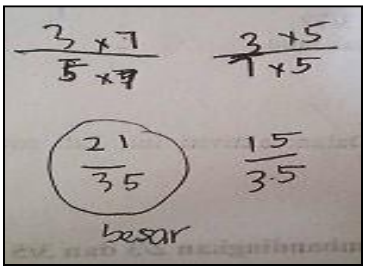
Jadual 4.3

Kategori membanding pecahan sama pengangka

Kategori	Peserta kajian
Penentuan berdasarkan nilai	Mona, Fikri
Penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan	Wani, Sofia
Penentuan berdasarkan hasil bahagi	Herman
Penentuan berdasarkan pecahan setara	Lili, Danish, Herman

Berdasarkan Jadual 4.3, dua peserta kajian menggunakan kategori penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan. Bagi kategori penentuan berdasarkan pecahan setara pula, tiga peserta kajian menggunakannya. Manakala, hanya seorang peserta kajian yang menggunakan kategori penentuan berdasarkan hasil bahagi. Berikut dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Herman, Fikri, dan Sofia yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Herman. Herman menunjukkan dua cara dalam membandingkan pecahan sama pengangka yang dikategorikan sebagai penentuan berdasarkan pecahan setara dan penentuan berdasarkan hasil bahagi. Rajah 4.2 menunjukkan langkah kerja pertama beliau.



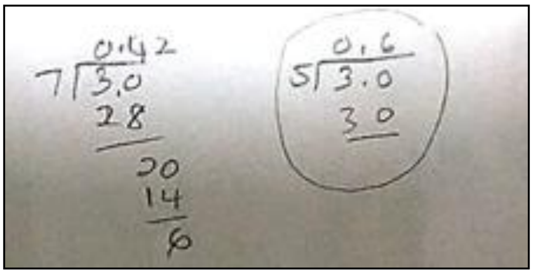
Rajah 4.2. Langkah kerja (1) Herman bagi tugasan pecahan sama pengangka

Dalam Rajah 4.2, Herman mendarab kedua-dua pengangka dan penyebut pecahan 3/5 dan 3/7 masing-masing dengan 7 dan 5 menghasilkan 21/35 dan 15/35. Beliau turut membulatkan pecahan 21/35 dan menulis "besar" di bawahnya. Penjelasan tentang langkah kerja tersebut di paparkan dalam Petikan BP3.

Petikan BP3

P: Boleh jelaskan apa yang kamu buat?
S: 3/5 saya darab dengan 7 dan 3/7 darab 5.
P: Mengapa kamu darab 7, darab 5?
S: Nak bawah sama. Bila bawah dah sama 35, baru boleh banding atas. 21 besar daripada 15, jadi 3/5 lebih besar.

Berdasarkan Petikan BP3, Herman membentuk pecahan yang sama nilai dengan pecahan asal dengan melakukan pendaraban terhadap pengangka dan penyebut kedua-dua pecahan bagi memperoleh penyebut yang sama, iaitu 35. Menurutnya, perbandingan hanya boleh dilakukan apabila kedua-dua pecahan mempunyai sama penyebut. Herman seterusnya menganggap pecahan 3/5 lebih besar berbanding pecahan 2/5 dengan membandingkan nilai pengangka. Tindakan ini mencadangkan bahawa beliau membandingkan pecahan berdasarkan pecahan setara. Herman turut mengemukakan satu lagi cara membanding seperti dalam Rajah 4.3 dan penjelasan tentang langkah kerja tersebut dipaparkan dalam Petikan BP4.



Rajah 4.3. Langkah kerja (2) Herman bagi tugasan pecahan sama pengangka

Petikan BP4

P: Boleh kamu terangkan dengan lebih lanjut apa yang kamu buat?
S: Saya bahagi tapi jawapan saya dalam nombor perpuluhan la bukan macam yang tadi, pecahan. Lepas bahagi, 3/5 dapat 0.6 dan 3/7 dapat 0.42. Ini (menunjuk 0.42) ada baki tapi saya buat sampai 0.42 saja. Jadi 3/5 lagi besar.
P: Bagaimana kamu tahu 3/5 lagi besar?
S: 0.6 besar daripada 0.42.

Dalam Rajah 4.3, Herman membahagikan pengangka dengan penyebut bagi pecahan 3/5 dan 3/7 masing-masing memberikan hasil bahagi 0.6 dan 0.42. Berdasarkan penjelasannya dalam Petikan BP4, beliau membandingkan hasil bahagi kedua-dua pecahan dengan menganggap 0.6 lebih besar daripada 0.42 dan seterusnya menyatakan 3/5 lebih besar berbanding 3/7. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Herman menggunakan kategori penentuan berdasarkan hasil bahagi dalam membandingkan pecahan sama pengangka.

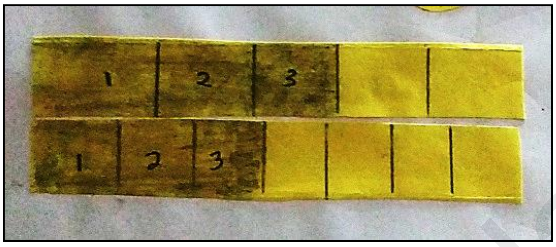
Fikri. Fikri menggunakan kategori penentuan berdasarkan nilai dalam membandingkan dua pecahan sama pengangka. Petikan BP5 memaparkan penjelasan beliau.

Petikan BP5

P: Boleh kamu bandingkan kedua-dua pecahan?
S: (Diam seketika). Ini (menunjuk 3/5) lagi besar.
P: Bagaimana kamu tahu dengan cepat?
S: Kat sekolah dah belajar. Kalau atas sama, bandingkan bawah saja.
P: Apa maksud kamu?
S: 3 ini (menunjuk pengangka kedua-dua pecahan) sama, jadi saya tengok yang bawah. Kalau bawah kecil, itu maknanya pecahan itu besar dan kalau bawah itu besar maknanya pecahan itu kecil.
P: Kenapa kalau bawah kecil, pecahan itu besar?
S: (Menggaru kepala dan diam seketika). Saya rasa sebab kalau 5, maknanya ada 5 petak coklat. Kalau 3/7 pula ada 7 petak coklat. Satu petak dalam 5 petak lebih besar daripada satu1 petak dalam 7 petak.

Berdasarkan Petikan BP5, Fikri dengan cepat menyatakan 3/5 lebih besar daripada 3/7 dengan membandingkan penyebut kedua-dua pecahan. Menurut beliau, sekiranya pengangka kedua-dua pecahan adalah sama, maka beliau hanya perlu membandingkan nilai penyebut. Fikri menyatakan bahawa pecahan yang mempunyai nilai penyebut yang kecil berbanding dengan satu lagi pecahan adalah dianggap pecahan yang besar. Beliau turut memberi justifikasi terhadap jawapannya dengan menyatakan penyebut bagi 3/5 dan 3/7 masing-masing mewakili 5 dan 7 petak coklat, yang mana satu petak dalam pecahan 3/5 lebih besar berbanding satu petak dalam pecahan 3/7. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Fikri membuat penentuan berdasarkan nilai, iaitu membandingkan nilai penyebut.

Sofia. Dalam membandingkan dua pecahan sama pengangka, Sofia menggunakan kategori perbandingan berdasarkan bahagian keseluruhan seperti dalam Rajah 4.4.



Rajah 4.4. Langkah kerja Sofia bagi tugasan pecahan sama pengangka

Dalam Rajah 4.4, Sofia dan melukis garisan membahagikan setiap satu daripada dua jalur kertas kepada beberapa bahagian dan melabelkan dengan nombor 1, 2, dan 3. Kedua-dua jalur kertas tersebut disusun secara selari.

Petikan BP6

P: Boleh kamu jelaskan?
S: Yang ini (menunjuk jalur kertas baris pertama) saya potong kepada 5 bahagian dan yang ini (menunjuk jalur kertas baris kedua) saya potong 7 bahagian. Bila saya lorek, nampak ini (menunjuk jalur kertas baris pertama) lagi besar dari ini (menunjuk jalur kertas baris kedua).
P: Apa maksud kamu lagi besar?
S: Kawasan berlorek lebih besar walaupun saya lorek sama 3 bahagian.
P: Kenapa 3 bahagian dalam dua-dua jalur kertas ini tidak sama?
S: (Tersenyum dan diam seketika). Memang tak sama, sebab satu saya potong 5 bahagian dan satu lagi saya potong 7 bahagian. Potong 5, kotak ini (menunjuk satu bahagian daripada 5 bahagian) besar sikit dari ini (menunjuk satu bahagian daripada 5 bahagian).

Berdasarkan Petikan BP6, Sofia membahagikan jalur kertas pertama dan jalur kertas kedua masing-masing kepada 5 dan 7 bahagian. Beliau kemudiannya mewakilkan pecahan 3/5 dan 3/7 dengan melorek 3 bahagian daripada keseluruhan bagi setiap jalur kertas dan membandingkan keluasan kawasan yang berlorek. Sofia seterusnya menganggap 3/5 lebih besar daripada 3/7 dengan mengemukakan alasan bahawa walaupun terdapat 3 bahagian berlorek bagi setiap jalur kertas, namun satu bahagian daripada 5 keseluruhan adalah lebih besar berbanding satu bahagian daripada 7 keseluruhan. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa Sofia menggunakan kategori penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan dalam membandingkan pecahan dengan penyebut sama.

Kesimpulan. Hanya Herman menggunakan dua kategori semasa membandingkan pecahan sama pengangka, iaitu penentuan berdasarkan hasil bahagi dan penentuan berdasarkan pecahan setara, manakala enam peserta kajian yang lain, iaitu Lili, Danish, Wani, Mona, Sofia, dan Fikri hanya mengemukakan satu kategori perbandingan sahaja.

Membanding Pecahan Berlainan Penyebut dan Pengangka. Dalam membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka, peserta kajian menggunakan dua kategori, iaitu penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan pecahan setara seperti dirumuskan dalam Jadual 4.4. Kesemua kategori tersebut diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan.

Jadual 4.4
Kategori membanding pecahan berlainan penyebut dan pengangka

Kategori	Peserta kajian
Penentuan berdasarkan nilai	Lili, Wani, Sofia
Penentuan berdasarkan pecahan setara	Lili, Danish, Herman, Mona, Sofia, Fikri

Berdasarkan Jadual 4.4, tiga dan enam peserta kajian menggunakan masing-masing kategori penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan pecahan setara. Berikut dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Sofia dan Fikri yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Sofia. Sofia menggunakan dua kategori, iaitu penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan pecahan setara dalam membandingkan pecahan berlainan pengangka dan penyebut. Petikan BP7 berikut memaparkan respons beliau.

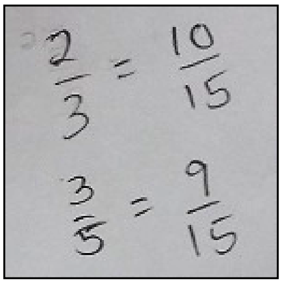
Petikan BP7

S:	Ini susah sebab lain penyebut.
P:	Boleh kamu cuba bandingkan?
S:	(Diam seketika). Saya rasa 2/3 lebih besar daripada 3/5.
P:	Mengapa kamu kata begitu?
S:	Saya tengok ini (menunjuk penyebut pecahan 2/3).
P:	Apa maksud kamu tengok 3?
S:	Macam satu piza potong 3 dan satu piza potong 5. Tentulah potong 3 lagi dapat lebih besar. Tapi kalau nak pastikan saya kena kira.
P:	Boleh kamu tunjukkan?
S:	(Mencongak perlahan "darab 5", "darab 3"). 10/15 dengan 9/15, maknanya betul la yang saya cakap tadi 2/3 lebih besar daripada 3/5.
P:	Boleh jelaskan apa yang cakap perlahan tadi?
S:	Saya darab atas dan bawah ini (menunjuk 2/3) dengan 5. Yang ini (menunjuk 3/5) pula saya darab atas dan bawah dengan 3.
P:	Mengapa kena darab?
S:	Samakan bawah. Nanti saya bandingkan atas sahaja.

Berdasarkan Petikan BP7, Sofia secara lisan menyatakan pecahan 2/3 lebih besar berbanding 3/5 dengan mempertimbangkan nilai penyebut kedua-dua pecahan. Beliau menyatakan piza yang terdiri daripada 3 potongan "lebih besar" berbanding piza yang terdiri daripada 5 potongan tanpa mengambil kira nilai pengangka. Tindakan ini menggambarkan bahawa beliau membandingkan pecahan dengan menggunakan kategori perbandingan berdasarkan nilai. Namun Sofia sendiri kurang yakin dengan jawapannya dan mencadangkan untuk melakukan pengiraan.

Ketika diminta menunjukkan langkah pengiraan, Sofia hanya mencongak dan menjelaskan secara lisan. Beliau membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal, iaitu 10/15 dan 9/15 dengan melakukan operasi pendaraban angka yang sama terhadap pengangka dan penyebut. Menurutnya, perbandingan hanya boleh dilakukan apabila kedua-dua pecahan mempunyai penyebut yang sama. Sofia kemudian menganggap pecahan 2/3 lebih besar berbanding pecahan 3/5, mengesahkan perbandingan yang dibuatnya terdahulu. Tindakan ini mencadangkan bahawa beliau membandingkan pecahan berdasarkan pecahan setara.

Fikri. Dalam membandingkan pecahan berlainan pengangka dan penyebut, Fikri menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan setara seperti dalam Rajah 4.5. Petikan BP8 memaparkan penjelasan tentang langkah kerja beliau.



Rajah 4.5. Langkah kerja Fikri bagi tugasan pecahan berlainan penyebut dan pengangka

Petikan BP8

P: Apa yang kamu tulis ini?
S: Saya cari pecahan setara.
P: Apa itu pecahan setara?
S: Macam kalau saya nak besarkan atau nak kecilkan satu pecahan. Kena darab atau bahagi.
P: Apa maksud ini (menunjuk 10/15 dan 9/15)?
S: Pecahan setara untuk 2/3 dan 3/5.
P: Mengapa kamu perlu cari pecahan setara?
S: Untuk banding pecahan mana lebih besar.
P: Bagaimana kamu banding?
S: Tengok atas (merujuk pengangka). Mana lagi besar, pecahan itu yang lebih besar. Sebenarnya 2/3 sama dengan 10/15 dan 9/15 sama dengan 3/15. Maksudnya 2/3 lagi besar sebab 10 besar daripada 9.
P: Apa makna 9 dan 10 ini (menunjuk kedua-dua pengangka).
S: Ada 9 potong piza dan ada 10 potong piza.

Dalam Rajah 4.5, Fikri menulis simbol “=” bagi menyatakan pecahan 2/3 dan 3/5 masing-masing adalah setara dengan 10/15 dan 9/15. Beliau membentuk pecahan setara bagi menyamakan penyebut kedua-dua pecahan sebelum melakukan perbandingan. Oleh kerana pengangka pecahan 10/15 lebih besar berbanding pengangka pecahan 9/15, maka Fikri menyatakan 10/15 atau 2/3 merupakan pecahan yang besar. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Fikri menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan setara dalam membandingkan pecahan berlainan pengangka dan penyebut.

Kesimpulan. Dua peserta kajian, iaitu Lili dan Sofia menggunakan dua kategori semasa membandingkan pecahan berlainan pengangka dan penyebut, iaitu penentuan berdasarkan nilai dan penentuan berdasarkan pecahan setara, manakala lima peserta kajian yang lain, iaitu Wani, Danish, Herman, Mona, dan Fikri hanya mengemukakan satu kategori perbandingan sahaja.

Nilai antara dua pecahan. Dalam menentukan nilai antara dua pecahan, peserta kajian menggunakan tiga kategori, iaitu penentuan secara kualitatif, penentuan berdasarkan garis nombor, dan penentuan berdasarkan pecahan setara. Kesemua kategori tersebut diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan. Penerangan bagi semua kategori adalah seperti berikut:

i. *Penentuan secara kualitatif*. Peserta kajian secara lisan menyatakan pecahan yang terletak antara dua pecahan secara spontan dengan mengemukakan justifikasi terhadap jawapan yang dinyatakan.

ii. *Penentuan berdasarkan garis nombor*. Peserta kajian melukis satu garis nombor secara melintang dan membahagikan kepada beberapa senggatan sama saiz, yang mana setiap satu bahagian diwakili oleh nilai pecahan tertentu. Peserta kajian kemudian menentukan pecahan yang terletak antara dua dua pecahan yang diberi berpandukan garis nombor tersebut.

Jadual 4.5 merumuskan kategori menentukan nilai antara dua pecahan, iaitu penentuan secara tekaan, penentuan berdasarkan garis nombor, dan penentuan berdasarkan pecahan setara oleh peserta kajian semasa menentukan nilai antara dua pecahan.

Jadual 4.5

Kategori penentuan nilai antara dua pecahan

Kategori	Peserta kajian
Penentuan secara kualitatif	Wani, Herman
Penentuan berdasarkan garis nombor	Herman, Mona, Sofia
Penentuan berdasarkan pecahan setara	Lili, Danish, Mona, Sofia, Fikri

Berdasarkan Jadual 4.5, dua dan tiga peserta kajian menggunakan masing-masing kategori penentuan berdasarkan kualitatif dan penentuan berdasarkan garis nombor. Manakala lima peserta kajian menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan setara. Berikut dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Wani, Danish, dan Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Wani. Dalam menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan, Wani menggunakan kategori penentuan secara kualitatif. Respons beliau dipaparkan dalam Petikan BP9.

Petikan BP9

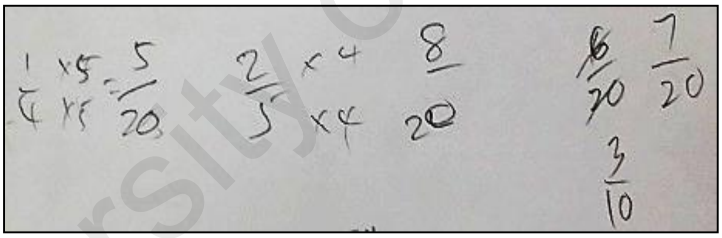
P: Boleh kamu nyatakan pecahan yang terletak antara pecahan yang tertulis dalam kedua-dua kad ini?

$\boxed{1/4}$ $\boxed{6/9}$

S: (Tersenyum). Yang ini susah la. Saya memang tak pandai sangat buat ini.
P: Mengapa kamu kata "susah"?
S: Sebab saya tak pernah buat.
P: Ok tidak apa. Boleh kamu cuba?
S: (Mengetap bibir dan selepas seketika). Saya rasa 2/4, ¾, 4/4, dan 1/9, 2/9…5/9.
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Sebab ¼ lebih kecil daripada 6/9. Jadi selepas ¼ mesti 2/4, ¾ dan 4/4. Sebelum 6/9 ada pecahan lain 5/9, 4/9, 3/9, 2/9, dan 1/9.
P: Bagaimana kamu tahu ¼ lebih kecil daripada 6/9?
S: (Tersenyum). Saya memang tahu.
P: Ada lagi tak pecahan lain yang terletak antara ¼ dan 6/9 selain daripada yang kamu sebut tadi?
S: (Menggeleng).

Dalam Petikan BP9, Wani menganggap menentukan nilai pecahan antara dua pecahan adalah sukar dengan alasan beliau tidak pernah menyelesaikan tugasan sedemikian. Namun beliau turut mencuba dengan menyebut beberapa pecahan yang terletak di antara ¼ dan 6/9. Menurut Wani, oleh kerana ¼ lebih kecil berbanding 6/9, maka beliau menganggap pecahan “selepas” ¼, iaitu 2/4, ¾, dan 4/4 sebagai pecahan yang lebih besar daripada ¼, manakala pecahan 5/9, 4/9, 3/9, 2/9, dan 1/9 sebagai pecahan “sebelum” 6/9. Beliau kemudian menganggap kesemua pecahan tersebut terletak di antara ¼ dan 6/9. Apabila diminta menyatakan pecahan lain yang terletak di antara pecahan ¼ dan 6/9, beliau menggelengkan kepala. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Wani menggunakan kategori penentuan secara kualitatif dalam menentukan pecahan yang terletak antara dua pecahan.

Danish. Danish menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan setara dalam menentukan pecahan yang terletak antara ¼ dan 2/5. Rajah 4.6 menunjukkan langkah kerja beliau.



Rajah 4.6. Langkah kerja Danish bagi tugasan nilai antara dua pecahan

Dalam Rajah 4.6, Danish melakukan pendaraban terhadap pengangka dan penyebut pecahan asal. Petikan BP10 memaparkan penjelasan beliau tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan BP10

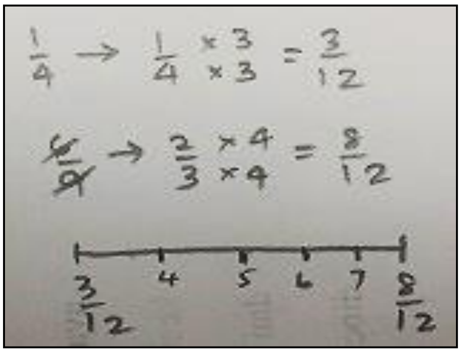
P: Boleh jelaskan apa yang kamu buat ini?
S: Saya samakan nombor bawah.
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Senang nak tengok pecahan yang terletak antara dua pecahan ini kalau bawah (merujuk penyebut sama) mereka sama.
P: Apa maksud kamu?
S: Kalau dah darab dapat 5/20 dan 8/20, maksudnya selepas 5/20 ada 6/20, ada 7/20, baru 8/20. Sebab itu ada dua saja pecahan (menunjuk 6/20 dan 7/20). Senang kalau bawah sama. Kalau bawah tak sama, macam mana nak cari pecahan antara ¼ dan 2/5.
P: Memang ada dua pecahan saja ke?

S: (Diam lama sambil merenung langkah kerja yang ditulis. Menulis 3/10 di bawah 6/20).
P: Apa yang kamu fikir?
S: 6/20 boleh kecilkan jadi 3/10. Oo tak boleh (menggeleng kepala). Sebenarnya 6/20 dan 3/10 sama. Jadi ada dua saja pecahan antara ¼ dan 2/5.
P: Mengapa kamu kata 6/20 dan 3/10 sama?
S: Sebab pecahan setara kita boleh jadikan besar atau kecil dengan darab dan bahagi macam ini (menunjuk ¼ dan 5/20).
P: Ada lagi pecahan antara ¼ dan 2/5?
S: (Menggeleng kepala).

Berdasarkan Petikan BP10, Danish menyamakan kedua-dua penyebut pecahan ¼ dan 2/5 menjadi 20 secara mendarab pengangka dan penyebut setiap pecahan membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal. Menurut beliau, pecahan yang mempunyai penyebut yang sama memudahkannya dalam menentukan pecahan yang terletak antara dua pecahan. Danish menyebut secara urutan menaik nilai pecahan bermula dengan 5/20, 6/20, 7/20, dan 8/20 sebelum menganggap terdapat dua pecahan, iaitu 6/20 dan 7/20 yang terletak antara pecahan ¼ dan 2/5. Ketika diminta memberi pecahan selain yang dinyatakan, Danish meringkaskan pecahan 6/20 menjadi 3/10 secara kaedah pemansuhan yang dianggapnya sabagai satu lagi nilai pecahan antara pecahan ¼ dan 2/5. Namun beliau sedar bahawa kedua-dua pecahan 6/20 dan 3/10 adalah setara, yang mana pecahan tersebut boleh membentuk pecahan lain secara pendaraban atau pembahagian.

Danish seterusnya tetap menganggap hanya dua pecahan, iaitu 6/20 dan 7/20 yang terletak antara pecahan ¼ dan 2/5. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Danish menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan setara dalam menentukan pecahan yang terletak antara dua pecahan.

Mona. Dalam menentukan nilai pecahan yang terletak antara dua pecahan, Mona menggunakan kategori penentuan berdasarkan garis nombor dan penentuan berdasarkan pecahan setara. Rajah 4.7 menunjukkan langkah kerja beliau, manakala Petikan BP11 memaparkan respons berkait langkah kerja teresebut.



Rajah 4.7. Langkah kerja Mona bagi tugasan nilai antara dua pecahan

Petikan BP11

P: Boleh terangkan apa kamu buat?
S: Mula-mula saya kecilkan 6/9 jadi 2/3. Lepas tu baru saya samakan pembawah. Ini (menunjuk ¼) darab 3 atas dan bawah. Ini (menunjuk 2/3) darab 4. Bila penyebut sama (menunjuk 3/12 dan 8/12), saya cari nombor antara 3 dan 8 kat garisan ini.
P: Apa maksud garisan ini?
S: Saya nak tunjuk ada berapa pecahan antara 3/12 dan 8/12. Ini (menunjuk 4, 5, 6, dan 7) ialah 4/12, 5/12, 6/12, 7/12, pecahan yang ada antara ini (menunjuk 3/12 dan 8/12).
P: Ada lagi tak pecahan lain?
S: (Diam lama). Ada. Sebab saya boleh darab ¼ dan 2/3 dengan nombor lain asalkan pembawah dapat sama. Contoh saya nak jadikan pembawah dua-dua jadi 24. Mestilah pecahan antara itu dah jadi lain.
P: Mungkin kamu boleh tunjukkan?
S: (Merenung lama kertas dan menulis). Ada banyak la.
P: Apa maksud kamu "banyak"? Jadi semua ada berapa pecahan antara ¼ dan 6/9?
S: Ada banyak sebenarnya. Tengok kita darab dengan apa.
P: Boleh kamu jelaskan?
S: Lagi besar nombor kita darab, lagi banyak pecahan kita dapat tapi kecil-kecil.
P: Apa maksud kamu "kecil-kecil"?
S: Garisan ini (menunjuk senggatan di garis nombor).

Berdasarkan Rajah 4.7 dan Petikan BP11, Mona mempermudahkan pecahan 6/9 kepada 2/3 secara kaedah pemansuhan sebelum menyamakan penyebut pecahan ¼ dan 2/3 secara pendaraban membentuk pecahan setara masing-masing 3/12 dan 8/12. Selanjutnya, beliau melukis satu garis nombor bersenggatan dan melabelkan senggatan pertama dan terakhir masing-masing sebagai 3/12 dan 8/12. Mona kemudian menganggap 4/12, 5/12, 6/12, dan 7/12 sebagai pecahan yang terletak di antara 3/12 dan 8/12 berdasarkan garis nombor yang dilukis.

Selain itu, Mona sedar terdapat banyak pecahan lain di antara pecahan ¼ dan 2/3, yang mana menurutnya sekiranya pengangka dan penyebut kedua-dua pecahan tersebut didarab dengan nombor yang berbeza, maka akan menghasilkan penyebut yang berbeza. Menurutnya lagi, semakin besar nombor yang didarab, maka semakin banyak pecahan yang diperoleh dengan memberi alasan saiz senggatan semakin mengecil. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Mona menggunakan kategori penentuan berdasarkan garis nombor dan penentuan berdasarkan pecahan setara dalam mencari pecahan yang terletak antara dua pecahan.

Kesimpulan. Tiga daripada tujuh peserta kajian, iaitu Herman, Mona, dan Sofia menggunakan lebih daipada satu kategori semasa menentukan pecahan anatara dua pecahan. Misalnya, Mona dan Sofia menggunakan kategori penentuan berdasarkan garis nombor dan penentuan berdasarkan pecahan setara. Lili, Danish, Wani, dan Fikri hanya mengemukakan satu kategori.

Membanding dan Menyusun Pecahan. Dalam membanding dan menyusun pecahan, peserta kajian menggunakan empat kategori, iaitu penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, penentuan berdasarkan pecahan setara, penentuan berdasarkan rujukan, dan penentuan berdasarkan pecahan unit. Kesemua kategori tersebut diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan. Penerangan kategori penentuan berdasarkan rujukan dan penentuan berdasarkan pecahan unit adalah seperti berikut:

i. *Penentuan berdasarkan rujukan*. Peserta kajian membanding setiap pecahan yang diberi dalam tugasan dengan sebarang satu pecahan wajar yang difikirkannya, sebelum menyusun kesemua pecahan secara urutan menaik atau menurun berserta justifikasi.

ii. *Penentuan berdasarkan pecahan unit*. Peserta kajian mempermudahkan setiap satu daripada pecahan asal kepada pecahan unit secara membahagi pengangka dan penyebut dengan angka yang sama sebelum membandingkan penyebut semua pecahan unit dan menyusun mengikut urutan menaik. Peserta kajian turut memberi justifikasi terhadap susunan pecahan yang dibuat berdasarkan nilai penyebut.

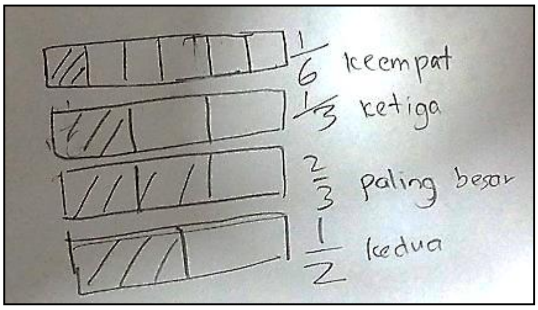
Jadual 4.6 merumuskan kategori berdasarkan penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, penentuan berdasarkan pecahan setara, penentuan berdasarkan rujukan, dan penentuan berdasarkan pecahan unit oleh peserta kajian semasa membanding dan menyusun pecahan.

Jadual 4.6
Kategori membanding dan menyusun pecahan

Kategori	Peserta kajian
Penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan	Wani
Penentuan berdasarkan pecahan setara	Lili, Mona, Sofia
Penentuan berdasarkan rujukan	Sofia, Danish
Penentuan berdasarkan pecahan unit	Herman, Mona, Fikri

Berdasarkan Jadual 4.6, kategori penentuan berdasarkan pecahan setara dan penentuan berdasarkan pecahan unit digunakan oleh tiga peserta kajian. Bagi kategori penentuan berdasarkan pecahan setara pula, tiga peserta kajian menggunakannya. Manakala, hanya seorang peserta kajian yang menggunakan kategori penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan. Berikut dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Wani, Sofia, Fikri, dan Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Wani. Wani menggunakan kategori penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan dalam membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan. Rajah 4.8 menunjukkan langkah kerja yang dibuat, manakala Petikan BP12 memaparkan penjelasan beliau tentang langkah kerja tersebut.



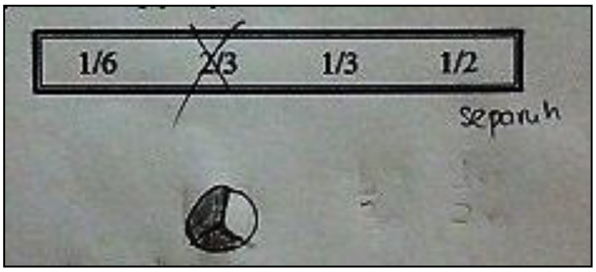
Rajah 4.8. Langkah kerja Wani bagi tugasan membanding dan menyusun pecahan

Petikan BP12

P: Boleh kamu terangkan?
S: (Nampak tidak yakin). Saya tak tahu betul ke tak. Saya lukis empat ini (menunjuk empat segiempat yang dilukis secara melintang dan selari) ikut pecahan yang diberi dan lorekkan. Bila saya tengok, 2/3 paling besar, yang kedua besar ½, yang ketiga 1/3 dan yang paling kecil 1/6.
P: Apa yang kamu tengok?
S: Saya tengok kawasan yang berlorek paling besar.
P: Apa maksud kawasan berlorek bagi kamu?
S: Maksudnya (diam seketika), nak tunjuk banyak mana bahagian pecahan 1/6, 1/3, 2/3, ½.
P: Boleh kamu fikirkan cara lain untuk susun pecahan ini?
S: Saya hanya tahu cara ini saja sebab nak susun banyak pecahan saya tak tahu..

Berdasarkan Petikan BP12, Wani dengan tidak yakin menjelaskan bahawa beliau melukis empat segiempat secara selari dan membahagikan setiap segiempat kepada beberapa bahagian berdasarkan nilai penyebut setiap pecahan sebelum melorek bahagian mengikut nilai pengangka setiap pecahan. Beliau kemudiannya membandingkan keluasan kawasan yang berlorek dan menyusun pecahan bermula dengan pecahan paling besar, iaitu 2/3, ½, 1/3, daan 1/6. Wani menganggap kawasan berlorek yang besar menggambarkan nilai pecahan yang besar. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa Wani menggunakan kategori penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan dalam membandingkan dan menyusun pecahan. Beliau juga tidak dapat menunjukkan cara lain dengan alasan membandingkan empat pecahan adalah sukar.

Sofia. Sofia menunjukkan dua cara berbeza dalam membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan yang dikategorikan sebagai penentuan berdasarkan pecahan setara dan penentuan berdasarkan rujukan. Rajah 4.9 menunjukkan langkah kerja pertama beliau, manakala Petikan BP13 memaparkan respons tentang langkah kerja.



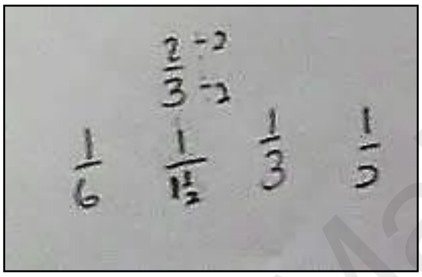
Rajah 4.9. Langkah kerja Sofia bagi tugasan membanding dan menyusun pecahan

Petikan BP13

P: Mengapa kamu pangkah 2/3?
S: Sebab 2/3 paling besar.
P: Bagaimana kamu tahu paling besar?
S: Lebih daripada separuh.
P: Apa maksud kamu "lebih daripada separuh"?
S: Inikan (menunjuk bulatan yang dilorek 2 daripada 3 bahagian) nampak lebih daripada separuh.
P: Kemudian apa yang kamu buat?
S: Umm…saya rasa yang kedua besar ialah ½.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Sebab ½ itu sama macam separuh. 1/3 dan 1/6 tak sampai separuh.
P: Boleh kamu susun semua pecahan ini mengikut turutan?
S: (Diam lama dan menggeleng kepala).
P: Mungkin kamu boleh cuba?
S: Yang pertama besar 2/3, kedua ½. (Diam lama). 1/6 dan 1/3, 1/3 lagi besar sebab kalau lukis pun kawasan dia lagi besar. 1/6 kawasan kecil. Jadi yang ketiga besar 1/3 dan keempat besar 1/6.

Rajah 4.9 menunjukkan Sofia memangkah 2/3 dan melukis satu bulatan yang dilorek dua daripada tiga bahagian. Dalam Petikan BP13, beliau menyatakan 2/3 merupakan pecahan paling besar dengan alasan nilainya lebih daripada "separuh". Sofia turut menggambarkan 2/3 lebih daripada "separuh" dengan merujuk kawasan berlorek yang mewakili 2/3 adalah lebih daripada separuh. Seterusnya, Sofia meneka pecahan kedua terbesar ialah ½ dengan memberi justifikasi bahawa ½ adalah sama seperti "separuh". Beliau juga membandingkan 1/3 dan 1/6 dengan 1/2, sebelum menganggap kedua-dua pecahan tersebut kecil daripada ½. Berikutnya, Sofia turut menganggap 1/3 lebih besar daripada 1/6 dengan alasan kawasan yang diwakili 1/3 adalah lebih besar. Tingkah laku yang ditunjukkan oleh Sofia mencadangkan bahawa beliau menggunakan penentuan berdasarkan rujukan dalam membanding dan menyusun lebih daripada dua pecahan.

Fikri. Fikri menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan unit dalam dalam menyusun lebih daripada dua pecahan. Rajah 4.10 dan Petikan BP14 menunjukkan langkah kerja dan penerangan beliau.



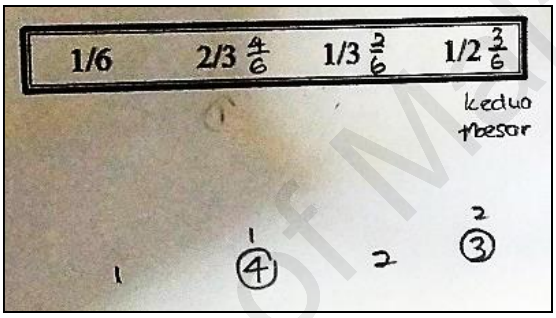
Rajah 4.10. Langkah kerja Fikri bagi tugasan membanding dan menyusun pecahan

Petikan BP14

S: Sebab semua nombor atas (merujuk pengangka) adalah 1, jadi saya akan jadikan nombor atas 2/3 pun 1. Kalau 2 bahagi 2 dapat 1 dan 3 bahagi 2 dapat 1 ½. Saya tak tahu boleh ke tulis macam ini (menunjuk 1/1 ½).
P: Mengapa kamu kena jadikan semua nombor atas (merujuk pengangka) 1?
S: Senang nak susun. Kalau tengok 1/1 ½ paling besar sebab bawah dia paling kecil dan yang kedua besar ½, lepas itu 1/3, dan 1/6.
P: Mengapa kamu kata kalau bawah (merujuk penyebut) kecil, pecahan itu paling besar.
S: (Diam lama). Contohnya 1/6 macam 1 potong piza daripada 6 potong semuanya. Kalau ½ pula ada 1 potong piza daripada 2 potong semuanya. Mestilah ½ piza lagi besar.

Berdasarkan Petikan BP14, Fikri menukar pecahan asal 2/3 kepada 1/1½ dengan membahagi pengangka dan penyebut dengan 2. Beliau menganggap adalah mudah untuk membanding dan menyusun pecahan sekiranya semua pecahan dalam bentuk pecahan unit, iaitu nilai pengangkanya adalah satu. Fikri seterusnya menyusun kesemua pecahan mengikut urutan menurun bermula dengan nilai pecahan yang paling besar, iaitu 1/1½, ½, 1/3, dan 1/6. Beliau turut menyatakan justifikasi terhadap susunan pecahan yang dibuat, iaitu semakin kecil penyebut pecahan unit, maka nilai pecahan semakin besar dan memberi contoh potongan piza bagi menggambarkan perbandingan pecahan yang besar. Tingkah laku ini menggambarkan Fikri membanding dan menyusun pecahan menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan unit.

Mona. Mona mengemukakan dua kategori, iaitu penentuan berdasarkan pecahan setara dan penentuan berdasarkan pecahan unit dalam menentukan urutan pecahan. Langkah kerja bagi kategori penentuan berdasarkan pecahan unit Mona adalah sama seperti yang ditunjukkan oleh Fikri. Rajah 4.11 dan Petikan BP15 menunjukkan langkah kerja beserta penjelasan tentang penentuan berdasarkan pecahan setara oleh beliau.



Rajah 4.11. Langkah kerja Mona bagi tugasan membanding dan menyusun pecahan

Petikan BP15

S: Pecahan kedua terbesar ini (menunjuk ½).
P: Cepatnya kamu dapat. Boleh jelaskan bagaimana kamu buat?
S: Saya buat semua bawah ini (merujuk penyebut semua pecahan) supaya sama 6. Saya darab dalam kepala saja.
P: Bagaimana kamu tahu ½ kedua besar?
S: Bandingkan nombor atas ini (menunjuk semua pengangka 1/6, 4/6, 2/6, 3/6). Makin besar (merujuk pengangka) makin besar pecahan. Pecahan 4/6 yang paling besar dan 3/6 yang kedua besar, ketiga dan keempat ini (menunjuk label nombor dalam bulatan).
P: Sama ke pecahan yang mula-mula dengan yang kamu buat ini?
S: (Dengan cepat). Sama sebab kalau kecilkan dapat balik.

Berdasarkan Petikan BP15, Mona menyamakan penyebut semua pecahan menjadi “6” dengan melakukan pendaraban secara mencongak sebelum menyatakan ½ adalah pecahan kedua terbesar. Beliau turut menyusun kesemua pecahan dengan urutan menurun dengan membandingkan nilai pengangka setiap pecahan. Mona menganggap semakin besar nilai pengangka, maka semakin besar nilai sesuatu pecahan. Selain itu, beliau juga sedar bahawa pecahan yang dibentuk dan pecahan asal adalah “sama” jika dipermudahkan. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Mona menggunakan kategori penentuan berdasarkan berdasarkan pecahan setara dalam membanding dan menyusun lebih dua pecahan.

Kesimpulan. Dua daripada tujuh peserta kajian, iaitu Mona dan Sofia menggunakan lebih daipada satu kategori semasa menyusun lebih daripada dua pecahan. Misalnya, Mona menggunakan kategori penentuan berdasarkan pecahan setara dan penentuan berdasarkan pecahan unit. Lima lagi peserta kajina, iaitu Lili, Wani, Herman, Danish, dan Fikri hanya mengemukakan satu kategori.

Membanding Nisbah

Bahagian ini membentangkan hasil kajian tentang cara peserta kajian membandingkan nisbah semasa menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran. Jadual 4.7 menunjukkan struktur konteks masalah dan jenis kuantiti yang terlibat dalam komponen membanding nisbah.

Jadual 4.7

Struktur konteks masalah dan jenis kuantiti dalam membanding nisbah

Komponen Penaakulan Perkadaran	Struktur Konteks Masalah	Jenis Kuantiti
Membanding nisbah	i. Konteks masalah nisbah	• Kuantiti diskrit • kuantiti selanjar
	ii. Konteks masalah kadar	• Kuantiti diskrit-selanjar
	iii. Konteks masalah keserupaan	• Kuantiti selanjar

Konteks masalah nisbah. Membandingkan nisbah bagi konteks masalah nisbah melibatkan dua jenis kuantiti, iaitu kuantiti diskrit dan kuantiti selanjar. Dalam membandingkan nisbah bagi konteks masalah nisbah, peserta kajian menggunakan enam kategori, iaitu perbandingan secara kualitatif, perbandingan secara pemetakan, perbandingan secara per unit, perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah, perbandingan secara pemadanan nisbah, dan perbandingan berdasarkan beza kuantiti. Penerangan semua kategori adalah seperti berikut:

i. *Perbandingan secara kualitatif*. Peserta kajian memberi justifikasi secara lisan bagi jawapan yang dinyatakan, iaitu membandingkan empat kuantiti yang diberi dengan mengemukakan perkataan atau pernyataan yang menggambarkan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi. Perkataan atau pernyataan boleh membabitkan saiz, rasa, dan bilangan objek, seperti banyak, sikit, sama, lebih besar, kurang pekat, sama sempit, lebih cair, dan lebih panjang.

ii. *Perbandingan secara pemetakan*. Peserta kajian memetak satu keseluruhan benda atau satu keseluruhan kumpulan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain sebelum melabelkan setiap bahagian yang diperoleh dalam bentuk pecahan. Peserta kajian kemudian membandingkan sama ada pengangka atau penyebut pecahan tersebut bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

iii. *Perbandingan secara per unit*. Peserta kajian menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain dengan melakukan salah satu daripada berikut: operasi pembahagian; membahagikan rajah satu objek kepada bahagian yang mewakili satu kuantiti; atau meringkaskan nisbah asal kepada nisbah unit. Peserta kajian kemudian membandingkan dua atau lebih daripada dua hasil bahagi atau kuantiti satu unit bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

iv. *Perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah*. Peserta kajian membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal dengan melakukan operasi darab atau bahagi terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah asal bagi menyamakan salah satu kuantiti dalam nisbah tersebut dengan nisbah yang lain. Peserta kajian kemudian membandingkan satu kuantiti dalam setiap nisbah setara bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

v. *Perbandingan secara pemadanan nisbah*. Peserta kajian menganggap satu daripada nisbah asal sebagai satu kumpulan atau satu unit komposit sebelum melukis kumpulan unit komposit yang sama dalam nisbah kedua. Peserta kajian kemudian membandingkan dua nisbah dengan mempertimbangkan lebihan kuantiti dalam nisbah kedua bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

vi. *Perbandingan berdasarkan beza kuantiti*. Peserta kajian mencari beza antara dua kuantiti membabitkan operasi tolak, sama ada dua kuantiti dalam satu nisbah atau dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah. Peserta kajian kemudian membandingkan dua hasil tolak bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

Kuantiti diskrit. Jadual 4.8 merumuskan kaedah membanding nisbah berdasarkan kategori perbandingan secara kualitatif, perbandingan secara pemetakan, perbandingan secara per unit, perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah, dan perbandingan secara pemadanan nisbah oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah nisbah dan kuantiti diskrit.

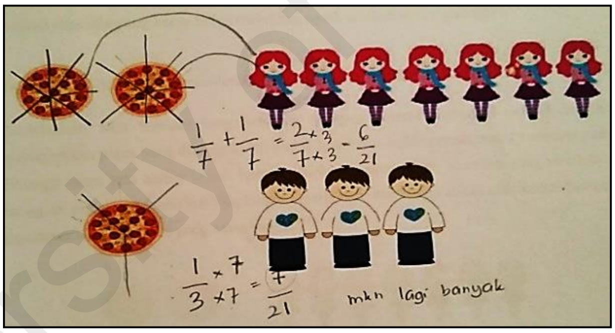
Jadual 4.8

Kategori membanding nisbah konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit

Kategori	Peserta kajian
Perbandingan secara kualitatif	Lili, Wani, Mona, Sofia, Herman
Perbandingan secara pemetakan	Lili, Danish, Mona, Sofia
Perbandingan secara per unit	Wani, Herman
Perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah	Mona, Danish
Perbandingan secara pemadanan nisbah	Fikri

Berdasarkan Jadual 4.8, dua peserta kajian menggunakan kategori perbandingan secara per unit dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah. Bagi kategori perbandingan secara kualitatif dan perbandingan secara pemetakan, masing-masing digunakan oleh lima dan empat peserta kajian. Hanya seorang peserta kajian yang menggunakan kategori perbandingan secara pemadanan nisbah. Berikut dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Mona, Herman, dan Fikri yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Mona. Mona menggunakan tiga kategori, iaitu perbandingan secara kualitatif, perbandingan secara pemetakan, dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah semasa membandingkan dua nisbah. Rajah 4.12 menunjukkan langkah kerja yang dibuat oleh beliau.



Rajah 4.12. Langkah kerja Mona bagi tugasan Piza

Dalam Rajah 4.12, Mona membandingkan kedua-dua nisbah 1 kepada 3 dan nisbah 2 kepada 7 dengan memetak sebiji piza budak lelaki kepada 3 bahagian yang sama saiz dan menganggap setiap satu bahagian yang dimakan oleh budak lelaki sebagai 1/3. Beliau juga memetak setiap satu daripada 2 biji piza budak perempuan kepada 7 bahagian yang sama saiz, yang mana setiap satu bahagian mewakili 1/7. Mona kemudian menganggap setiap budak perempuan menerima dua bahagian, iaitu satu bahagian daripada satu keseluruhan piza pertama dan satu bahagian lagi daripada satu keseluruhan piza kedua dan seterusnya melakukan operasi menambah pecahan menghasilkan 2/7.

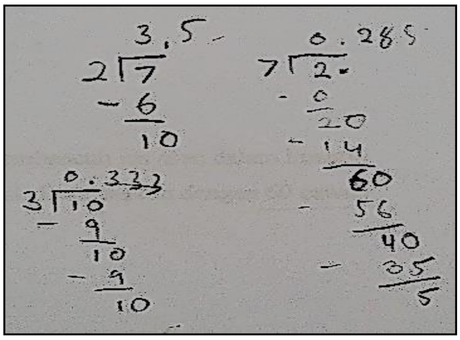
Beliau membuat perbandingan secara lisan dengan menyatakan 1/3 lebih besar berbanding 2/7, iaitu budak lelaki makan lebih banyak berbanding budak perempuan. Pernyataan "potong 3 dapat besar, potong 7 dapat sikit" menggambarkan beliau membanding kedua-dua penyebut pecahan bagi menentukan siapa yang makan lagi banyak piza. Tingkah laku ini menunjukkan Mona menggunakan kategori perbandingan secara kualitatif dan perbandingan berdasarkan pemetakan semasa membandingkan nisbah. Selain itu, beliau turut membandingkan nisbah tersebut dengan menggunakan kategori perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah seperti dipaparkan dalam Petikan BN16.

Petikan BN16

S: Tak boleh banding lagi sebab bawah ini (menunjuk penyebut 1/3 dan 2/7) tak sama. Bila saya dah darab untuk samakan macam ini (menunjuk 6/21 dan 7/21) baru tahu lelaki makan lagi banyak.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: 7 bahagian lebih besar dari 6 bahagian, jadi 7/21 lebih besar dari 6/21.

Dalam Petikan BN16, Mona menyamakan kedua-dua penyebut pecahan 1/7 dan 1/3 menjadi 21 secara mendarab pengangka dan penyebut setiap pecahan dengan nombor yang sama bagi menghasilkan pecahan setara. Beliau sekali lagi menganggap budak lelaki makan lebih banyak piza berbanding budak perempuan dengan membandingkan pengangka, iaitu 7 lebih besar daripada 6. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Mona membuat perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah.

Herman. Herman menggunakan kategori perbandingan secara kualitatif dan kategori perbandingan secara per unit dalam membandingkan dua nisbah. Rajah 4.13 menunjukkan langkah kerja yang dibuat, manakala Petikan BN17 memaparkan penjelasan beliau.



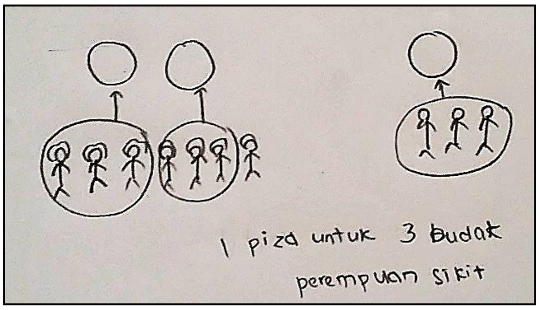
Rajah 4.13. Langkah kerja Herman bagi tugasan Piza

Petikan BN17

P:	Boleh kamu terangkan?
S:	Yang ini (menunjuk pembahagian panjang “7 ÷ 2”) silap bahagi, sepatutnya 2 bahagi 7 (menunjuk pembahagian panjang “2 ÷ 7”) macam ini. Dua piza saya bahagi dengan 7 orang dan satu piza saya bahagi 3 orang. Dapat perpuluhan ada baki tak berhenti.
P:	Boleh kamu jelaskan tentang pembahagian ini?
S:	Lelaki makan 0.333 dan perempuan makan 0.285 lelaki makan lebih banyak.
P:	Mengapa kamu kata begitu?
S:	Sebab hasil bahagi lelaki lebih besar dari perempuan.
P:	0.333 tu banyak mana ya?
S:	(Diam). Saya tak tahu besar mana. Tapi lelaki makan 0.333

Berdasarkan Petikan BN17, Herman membandingkan piza yang dimakan oleh budak perempuan dan budak lelaki dengan menentukan bahagian piza yang dimakan oleh setiap budak secara membahagi kuantiti dalam nisbah. Beliau membahagikan bilangan piza dengan bilangan budak secara pembahagian panjang menghasilkan 0.333 dan 0.285 masing-masing bagi budak lelaki dan budak perempuan. Herman kemudian membandingkan hasil bahagi dan membuat kesimpulan bahawa budak lelaki makan lebih banyak dengan alasan 0.333 lebih besar daripada 0.285. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan Herman membuat perbandingan secara per unit.

Fikri. Dalam membandingkan siapa yang makan lebih banyak piza, Fikri menggunakan kategori perbandingan secara pemadanan nisbah. Rajah 4.14 menunjukkan cara kerja beliau.



Rajah 4.14. Langkah kerja Fikri bagi tugasan Piza

Berdasarkan Rajah 4.14, Fikri membuat satu bulatan membentuk kumpulan bertiga budak lelaki dan memadankan kepada sebiji piza menggunakan anak panah. Beliau sekali lagi melakukan tindakan yang sama terhadap kumpulan budak perempuan, iaitu membentuk dua kumpulan bertiga, yang mana setiap kumpulan dipadankan kepada sebiji piza. Petikan BN18 memaparkan respons beliau.

Petikan BN18

P: Apa yang kamu buat ini?
S: Saya guna nisbah 1 kepada 3. Satu biji piza untuk tiga budak lelaki. Saya bulatkan juga 3 perempuan untuk satu piza. Kena buat dua kali sebab ada 6 budak perempuan. Budak lelaki makan lebih banyak, budak perempuan sikit.
P: Bagaimana kamu tahu lelaki makan lebih banyak piza?
S: Sebab ada seorang budak perempuan yang tak dapat makan piza (menunjuk budak perempuan yang ketujuh). Jadi setiap enam budak perempuan akan bagi sikit piza mereka kepada budak perempuan ini (menunjuk budak perempuan yang ketujuh). Jadi piza setiap budak perempuan yang enam orang tu dah jadi kurang piza daripada seorang budak lelaki.
P: Boleh kamu beritahu berapa bahagian piza yang budak lelaki makan?
S: 1/3
P: Bagaimana pula dengan budak perempuan?
S: Semua budak perempuan akan dapat piza kurang dari 1/3 sebab dah bagi sedikit pada seorang perempuan yang tak dapat.

Dalam Petikan BN18, Fikri menganggap nisbah 1 kepada 3 sebagai setiap sebiji piza untuk satu kumpulan bertiga budak lelaki, sebelum menggunakan nisbah tersebut untuk membentuk dua kumpulan bertiga budak perempuan, yng mana setiap kumpulan tersebut dipadankan kepada setiap sebiji piza. Seterusnya, oleh kerana terdapat baki seorang budak perempuan yang tidak mendapat piza, maka beliau menganggap setiap budak perempuan dalam dua kumpulan bertiga akan "bagi sikit piza" kepada budak perempuan yang ketujuh. Menurut Fikri, ini menyebabkan piza setiap budak perempuan dalam dua kumpulan bertiga tersebut akan berkurang berbanding kumpulan bertiga budak lelaki. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Fikri membandingkan secara pemadanan nisbah.

Kesimpulan. Enam daripada tujuh peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Danish, Mona, Herman, dan Sofia menggunakan lebih daripada satu kategori dalam membandingkan nisbah melibatkan kuantiti diskrit. Misalnya, Lili dan Sofia menggunakan perbandingan kualitatif dan perbandingan secara pemetakan. Hanya Fikri menggunakan satu kategori.

Kuantiti selanjar. Jadual 4.9 merumuskan kaedah membanding nisbah berdasarkan kategori perbandingan kualitatif, perbandingan berdasarkan beza kuantiti, perbandingan secara per unit, perbandingan secara pemetakan, dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar.

Jadual 4.9
Kategori membanding nisbah konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar

Kategori	Peserta kajian	
	Dua nisbah	Lebih dua nisbah
Perbandingan secara kualitatif	-	Lili, Herman, Mona, Sofia
Perbandingan berdasarkan beza kuantiti	Lili, Wani, Mona, Sofia	Herman, Sofia
Perbandingan secara per unit	Lili, Herman	Herman, Fikri
Perbandingan secara pemetakan	Danish, Herman, Mona	Wani
Perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah	Fikri	Lili, Mona, Danish

Berdasarkan Jadual 4.9, empat peserta kajian menggunakan kategori perbandingan secara kualitatif, perbandingan secara pemetakan, dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah. Bagi kategori perbandingan secara berdasarkan beza kuantiti, lima peserta kajian menggunakannya, manakala tiga peserta kajian menggunakan perbandingan secara per unit. Berikut dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Sofia, Fikri, Lili, dan Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

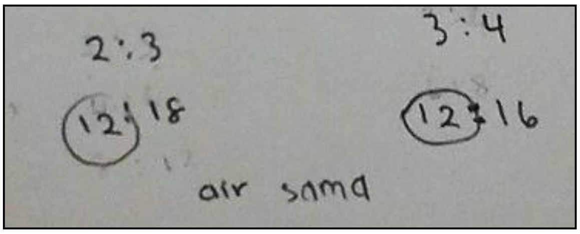
Sofia. Dalam membandingkan dua resepi, Sofia menggunakan kategori perbandingan berdasarkan beza kuantiti. Beliau melakukan operasi penolakan antara dua kuantiti seperti dipaparkan dalam Petikan BN19.

Petikan BN19

S: Saya rasa kedua-dua resepi mereka rasa sama oren.
P: Apa maksud kamu "sama"?
S: Walaupun bilangan cawan pekatan oren dan jag air Jojo dan Maria berbeza, tapi kalau saya tolakkan, dua-dua dapat satu.
P: Saya kurang faham. Boleh kamu jelaskan sekali lagi?
S: Beza 3 dan 4 (menunjuk 3 cawan pekatan oren Jojo dan 4 cawan pekatan oren Maria) dan beza 2 dan 3 (menunjuk 2 jag air Jojo dan 3 jag air Maria) adalah satu. Sebab itu rasa kedua-dua resepi ini sama saja.

Berdasarkan Petikan BN19, Sofia menyatakan rasa jus oren kedua-dua resepi adalah sama. Beliau secara lisan melakukan penolakan antara dua ruang ukuran yang sama, iaitu bilangan cawan pekatan oren Jojo dan Maria dan memperoleh "satu" sebagai hasil tolak. Beliau turut melakukan langkah yang sama terhadap satu lagi ruang ukuran, iaitu bilangan jag air yang hasil tolaknya juga adalah "satu". Oleh kerana hasil tolak dua kuantiti dalam dua ruang ukuran adalah sama, maka Sofia menganggap resepi Jojo dan Maria mempunyai rasa jus oren yang sama. Tingkah laku yang ditunjukkan menggambarkan bahawa Sofia membandingkan nisbah berdasarkan perbezaan dua kuantiti.

Fikri. Fikri menggunakan kategori perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah semasa membandingkan dua nisbah melibatkan kuantiti selanjar. Rajah 4.15 menunjukkan langkah kerja yang dibuat oleh beliau.



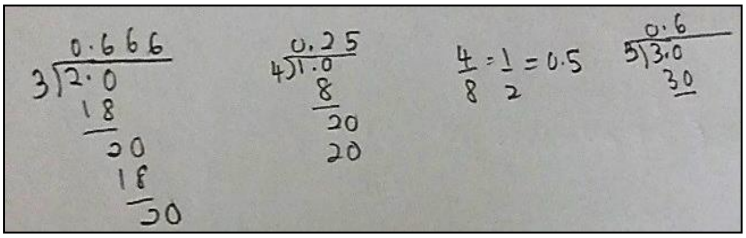
Rajah 4.15. Langkah kerja Fikri bagi tugasan Jus oren 1

Petikan BN20

P: Boleh jelaskan apa yang kamu tulis ini?
S: Ini (menunjuk 2 : 3 dan 3 : 4) adalah nisbah yang diberi. Saya darabkan jadi seperti ini (menunjuk 12 : 18 dan 12 : 16).
P: Mengapa kamu darab?
S: Untuk samakan bilangan jag air (menunjuk nombor 12 yang dibulatkan dan perkataan "air sama").
P: Apa maksud kamu "air sama"?
S: Kalau jag air sama, barulah senang nak bandingkan resepi mana yang lebih rasa oren.
P: Apa yang kamu buat seterusnya?
S: Saya bandingkan bilangan cawan pekatan oren Jojo dan Maria. Jojo punya lagi banyak (menunjuk 18), jadi resepi Jojo lebih rasa jus oren dan bukan Maria.

Berdasarkan Petikan BN20, Fikri melakukan operasi pendaraban terhadap kedua-dua nisbah asal menghasilkan nisbah 12 kepada 18 dan 12 kepada 16 dengan alasan bagi mendapatkan bilangan jag air yang sama. Beliau kemudian membandingkan bilangan cawan pekatan oren Jojo dan Maria dalam nisbah tersebut. Oleh kerana bilangan cawan pekatan oren Jojo lebih banyak berbanding Maria, maka beliau merumuskan resepi jus oren Jojo lebih rasa oren berbanding resepi Maria. Tindakan yang dilakukan Fikri menggambarkan bahawa beliau membandingkan dua nisbah berdasarkan kesetaraan nisbah.

Dalam membandingkan lebih daripada dua nisbah, Fikri menggunakan kategori perbandingan secara per unit. Rajah 4.16 menunjukkan langkah kerja yang dilakukannya.



Rajah 4.16. Langkah kerja Fikri bagi tugasan Jus oren 2

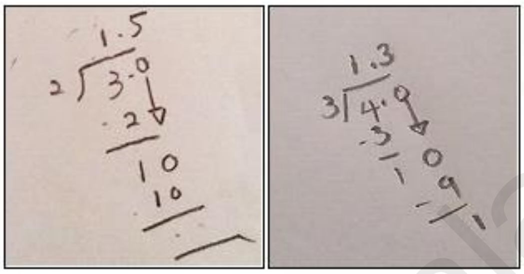
Dalam Rajah 4.16, Fikri membahagikan bilangan sudu pekatan oren dengan bilangan cawan air bagi jag A, jag B, dan jag D secara pembahagian panjang dan memperoleh hasil bahagi dalam bentuk nombor perpuluhan. Beliau turut meringkaskan nisbah bagi jag C kepada sebutan terendah sebelum menukarnya kepada bentuk nombor perpuluhan. Petikan BN21 memaparkan cara beliau membuat perbandingan.

Petikan BN21

P: Boleh jelaskan apa yang kamu buat ini?
S: Saya bahagikan pekatan oren dengan air untuk semua jag dapat ini (menunjuk semua hasil bahagi).
P: Apa maksud hasil bahagi ini?
S: Umm…berapa banyak pekatan oren dalam satu cawan air.
P: Kemudian apa yang kamu buat?
S: Saya boleh tahu yang paling kurang rasa oren dan yang paling kuat rasa oren. Jag A paling kuat rasa oren sebab ini (menunjuk hasil bahagi 0.666) yang paling besar. Yang paling kurang rasa oren jag B sebab paling sikit (menunjuk hasil bahagi 0.25).
P: Bagaimana pula dengan jag C dan jag D?
S: Jag D yang kedua dan jag C yang ketiga paling kuat rasa oren. Jadi A, D, C, B (merujuk kepada jag).

Berdasarkan Petikan BN21, Fikri membandingkan rasa jus oren dalam 4 jag dengan menentukan “berapa banyak pekatan oren dalam satu cawan air” secara membahagikan bilangan sudu pekatan oren dengan bilangan cawan air. Seterusnya Fikri membandingkan hasil bahagi 0.666, 0.25, 0.5, dan 0.6 masing-masing bagi jag A, jag B, jag C, dan jag D dan membuat kesimpulan bahawa jag A paling kuat rasa oren, manakala jag B paling kurang rasa oren. Beliau turut menyusun urutan jag yang paling kuat rasa oren bermula dengan jag A, jag D, jag C, dan jag B berdasarkan hasil bahagi yang paling besar hingga paling kecil. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan Fikri membuat perbandingan secara per unit.

Lili. Lili menggunakan kategori perbandingan secara per unit apabila diminta membandingkan dua nisbah bagi kuantiti selanjar. Beliau memulakan langkah pengiraan seperti ditunjuk dalam Rajah 4.17 sebelum memberi penjelasan.



Rajah 4.17: Langkah kerja Lili bagi tugasan Jus oren 1

Berdasarkan Rajah 4.17, Lili menggunakan nisbah 2 kepada 3 dan 3 kepada 4 untuk melakukan operasi bahagi. Beliau membahagikan 3 dengan 2 dan 4 dengan 3 secara pembahagian panjang dan memperoleh 1.5 dan 1.3 sebagai hasil bahagi. Petikan BN22 memaparkan respons beliau.

Petikan BN22

P: Boleh kamu jelaskan apa kamu kamu kira?
S: Resepi Jojo ada 3 cawan oren yang saya bahagi 2 jag air, dapat satu jag air guna 1.5 (menunjuk 1.5) cawan pekatan oren.
P: Seterusnya apa yang kamu nak buat?
S: Saya bahagi pula 4 dengan 3 untuk Maria. Ini (menunjuk 1.3) untuk satu jag Maria.
P: Ok teruskan.
S: Jojo guna 1.5 cawan oren, Maria guna 1.3 cawan oren. Jadi resepi Jojo lagi banyak rasa oren.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Kalau oren banyak, jus jadi pekat rasa oren.
P: Saya lihat kamu tak habis bahagi (menunjuk pembahagian panjang 4 dibahagi 3)?
S: Saya buat sampai 1.3 saja sebab nak bandingkan dengan 1.5. Sebenarnya kalau bahagi lagi akan sentiasa ada baki.

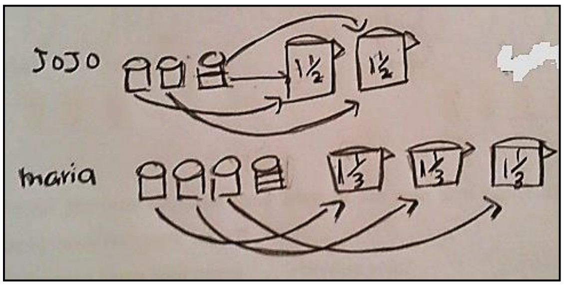
Dalam Petikan BN22, Lili membandingkan resepi jus oren Jojo dan Maria dengan membahagikan bilangan cawan pekatan oren dengan bilangan jag air bagi kedua-dua resepi secara pembahagian panjang. Beliau mentafsirkan makna hasil bahagi sebagai kuantiti pekatan oren yang diperlukan bagi satu jag air. Selanjutnya beliau membandingkan hasil bahagi kedua-dua resepi, iaitu 1.5 dan 1.3 sebelum merumuskan bahawa resepi jus oren Jojo lebih banyak rasa oren berbanding resepi jus oren Maria dengan memberi alasan bahawa semakin banyak pekatan oren, semakin pekat rasa oren bagi resepi tersebut. Tingkah laku Lili menentukan resepi yang mempunyai lebih rasa oren bergantung kepada kuantiti pekatan oren yang dicampur ke dalam satu jag air menunjukkan beliau membanding secara per unit.

Mona. Dalam membandingkan dua nisbah, Mona pada mulanya menggunakan kategori perbandingan berdasarkan beza kuantiti sebelum mengemukakan satu lagi penyelesaian yang dikategorikan sebagai perbandingan secara pemetakan. Beliau melakukan operasi penolakan antara dua kuantiti seperti dipaparkan dalam Petikan BN23.

Petikan BN23

S: (Diam lama). Sama rasa.
P: Boleh jelaskan mengapa kamu kata rasa resepi jus oren Maria dan Jojo "sama rasa"?
S: Sama rasa oren sebab bilangan cawan pekatan oren dan jag air Jojo, bezanya 1. Sama juga dengan Maria, bezanya 1.
P: Boleh terang sekali lagi, apa maksud kamu "bezanya 1"?
S: Bila saya tolakkan ini (menunjuk 3 cawan pekatan oren dan 2 jag air Jojo) dapat 1. Kalau saya tolak 4 dan 3 (menunjuk 4 cawan pekatan oren dan 3 jag air Maria) pun dapat 1. Samalah.

Berdasarkan Petikan BN23, Mona menyatakan rasa jus oren kedua-dua resepi adalah sama dengan alasan "beza" bilangan cawan pekatan oren dan bilangan jag air resepi Jojo dan Maria adalah sama. Beliau melakukan penolakan secara lisan antara dua kuantiti dalam kedua-dua nisbah dan kemudian membandingkan hasil penolakan. Oleh kerana hasil tolak antara dua kuantiti dalam dua nisbah adalah sama, maka Mona menganggap resepi Jojo dan Maria mempunyai rasa jus oren yang sama. Tingkah laku yang ditunjukkan menggambarkan bahawa Mona membandingkan nisbah berdasarkan perbezaan dua kuantiti. Seterusnya beliau turut membandingkan nisbah kedua-dua resepi dengan cara yang berbeza. Rajah 4.18 menunjukkan langkah kerja Mona.



Rajah 4.18. Langkah kerja Mona bagi tugasan Jus oren 1

Rajah 4.18 menunjukkan Mona memadankan cawan pekatan oren Jojo dan Maria kepada setiap jag air dan menulis 1 ½ dan 1 1/3 masing-masing bagi setiap jag air Jojo dan Maria. Petikan BN24 memaparkan penjelasan beliau tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan BN24

P: Boleh jelaskan?

S: Satu cawan ini (menunjuk cawan pertama pekatan oren Jojo) untuk jag air pertama, satu cawan ini (menunjuk cawan kedua pekatan oren Jojo) untuk jag air kedua, satu lagi cawan (menunjuk cawan ketiga pekatan oren Jojo) saya potong 2 dan masukkan separuh dalam jag ini (jag air pertama Jojo) dan separuh dalam jag ini (jag air kedua Jojo). Satu jag guna 1 ½ cawan pekatan oren.

P: Ok, bagaimana pula dengan Maria?

S: Yang ini sama macam Jojo. Semua jag dapat satu cawan pekatan oren, tapi ada lebih satu cawan jadi saya potong kepada 3 bahagian. Satu jag dapat 1 1/3 cawan pekatan oren.

P: Apa yang kamu boleh katakan selepas kamu lukis semua ini?

S: Resepi jus oren Jojo lebih kuat rasa oren daripada Maria.

P: Bagaimana kamu tahu?

S: Jus Jojo lagi kuat rasa oren sebab 1 ½ lagi banyak dari 1 1/3.

P: Boleh kamu tunjukkan bagaimana 1 ½ lebih banyak dari 1 1/3?

S: ½ lebih banyak bahagiannya daripada 1/3. Jadi resepi Jojo lebih kuat rasa oren.

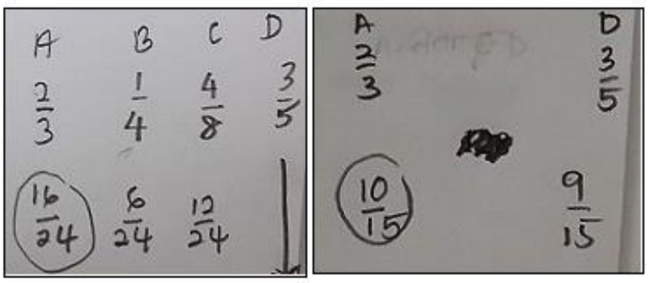
Berdasarkan Petikan BN24, Mona memadankan setiap satu cawan pekatan oren kepada setiap jag air dan memetak lebihan cawan pekatan oren kepada beberapa bahagian mengikut bilangan jag Jojo dan Maria. Beliau kemudiannya menganggap setiap jag Jojo dan Maria masing-masing mendapat 1 ½ dan 1 1/3 cawan pekatan oren dan membuat perbandingan dengan menyatakan resepi jus oren Jojo lebih kuat rasa oren berbanding resepi jus oren Maria dengan alasan ½ lebih banyak bahagian daripada 1/3. Tingkah laku ini menunjukkan Mona menggunakan kategori perbandingan secara pemetakan semasa membandingkan nisbah.

Dalam membandingkan lebih daripada dua nisbah, Mona menggunakan dua kategori berbeza dengan membanding dua nisbah, iaitu kategori perbandingan secara kualitatif dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah. Petikan BN25 memaparkan cara beliau membuat perbandingan.

Petikan BN25

S: Jag B yang paling kurang rasa oren.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Oren B sikit tapi air dia macam banyak (nampak tidak pasti). Bila air banyak, selalunya jus oren cair dan rasa kurang oren.

Dalam Petikan BN25, Mona membandingkan nisbah secara lisan dengan mengemukakan beberapa perkataan, seperti “sikit”, “banyak”, “cair”, dan “kurang” yang menggambarkan perbandingan antara 4 jag jus oren. Beliau hanya mengambil kira bilangan sudu pekatan oren yang paling sikit bagi menentukan jag yang paling kurang rasa oren. Tingkah laku ini menggambarkan Mona membuat perbandingan secara kualitatif. Beliau turut membanding 4 jag jus oren tersebut dengan satu lagi langkah kerja seperti ditunjukkan dalam Rajah 4.19.



Rajah 4.19. Langkah kerja Mona bagi tugasan Jus oren 2

Berdasarkan Rajah 4.19, Mona menulis nisbah yang diberi dalam bentuk pecahan sebelum membentuk pecahan setara daripada pecahan asal, iaitu 16/24, 6/24, dan 12/24 masing-masing bagi jag A, jag B, dan jag C. Beliau turut membina dua lagi nisbah setara bagi jag A dan jag D yang mempunyai penyebut yang sama. Petikan BN26 memaparkan respons beliau.

Petikan BN26

P: Boleh jelas lebih lanjut?
S: Sama darab untuk samakan bawah ini (menunjuk penyebut bagi pecahan jag A, jag B, dan jag C) jadi jag A 16/24, jag B 6/24, jag C 12/24.
P: Kenapa kamu samakan penyebut?
S: Kalau sama baru senang nak bandingkan?
P: Saya kurang faham. Apa maksud kamu?
S: Kalau bawah (penyebut) sama, itu maknanya semua air dalam jag A, B, C sama banyak. Ini (menunjuk pecahan16/24 yang dibulatkan) paling kuat rasa oren.
P: Bagaimana kamu tahu?
S: Oren dia paling banyak.
P: Oo begitu. Ini (menunjuk 10/15 yang dibulatkan) apa?
S: Ini (menunjuk 10/15 dan 9/15) saya bandingkan jag A dan D.
P: Kenapa ya?
S: Tadi saya tak buat sekali sebab jag D pecahannya perlima. Susah nak cari bawah sama. Jadi saya nak tahu jag A atau jag D lagi kuat rasa oren, saya bandingkan la. Dapat jag A 10/15 dan jag D 9/15. Betullah jawapan saya, jag A paling kuat rasa oren.

Dalam petikan BN26, Mona membentuk pecahan setara dengan melakukan operasi darab bagi memperoleh penyebut yang sama bagi jag A, jag B, dan jag C. Beliau menganggap pengangka dan penyebut pecahan masing-masing mewakili bilangan sudu pekatan oren dan bilangan cawan air. Oleh kerana penyebut pecahan bagi jag A, jag B, dan jag C adalah sama, iaitu 24 bilangan cawan air, maka Mona hanya membandingkan pengangka yang mewakili bilangan sudu pekatan oren. Beliau kemudian menyatakan jag A mempunyai rasa oren paling kuat dengan memberi justifikasi bahawa bilangan sudu oren jag A paling banyak. Mona sekali lagi membandingkan jag A dan jag D bagi menentukan jag mana yang lebih rasa oren dengan mengulangi langkah yang sama bagi mendapatkan penyebut yang sama, iaitu 15. Berikutnya beliau membanding kedua-dua penyebut 10 dan 9 sebelum merumuskan jag A lebih rasa oren berbanding jag D. Tingkah laku ini menunjukkan Mona menggunakan kategori perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah semasa membandingkan nisbah.

Kesimpulan. Semua peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Herman, Mona, Fikri, Danish, dan Sofia menggunakan lebih daripada satu kategori dalam membandingkan dua dan lebih daripada dua nisbah melibatkan kuantiti selanjar bagi konteks masalah nisbah. Misalnya, Lili dan Mona menggunakan kategori perbandingan secara kualitatif dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah.

Konteks masalah kadar. Dalam membandingkan nisbah bagi konteks masalah kadar, hanya satu jenis kuantiti yang terlibat, iaitu kuantiti diskrit-selanjar. Bagi konteks masalah ini, peserta kajian menggunakan empat kategori, iaitu perbandingan secara kualitatif, perbandingan berdasarkan skala pembesaran, perbandingan secara per unit, dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah. Penerangan bagi kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran adalah seperti berikut:

i. *Perbandingan berdasarkan skala pembesaran*. Peserta kajian menentukan skala pembesaran sama ada bagi dua kuantiti dalam satu nisbah atau dua kuantiti yang sepadan dalam dua atau lebih dua nisbah dengan melakukan operasi bahagi atau darab secara bertulis atau mencongak secara lisan. Peserta kajian kemudiann membandingkan dua atau lebih dua nisbah dengan mengemukakan pernyataan seperti "kali banyak", "kali sempit", "kali panjang", atau " kali ganda" bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

Kuantiti diskrit-selanjar. Jadual 4.10 merumuskan kaedah membanding nisbah berdasarkan kategori perbandingan secara kualitatif, perbandingan berdasarkan skala pembesaran, perbandingan secara per unit, dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar.

Jadual 4.10

Membanding nisbah konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar

Kategori	Peserta kajian	
	Dua nisbah	Lebih dua nisbah
Perbandingan secara kualitatif	Lili, Wani, Mona, Sofia	Wani, Herman, Sofia
Perbandingan berdasarkan skala pembesaran	Lili, Mona, Fikri,	Lili, Mona
Perbandingan berdasarkan per unit	Lili, Herman, Danish	Wani, Mona, Fikri
Perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah	Lili, Wani, Mona, Sofia	Wani, Sofia, Danish

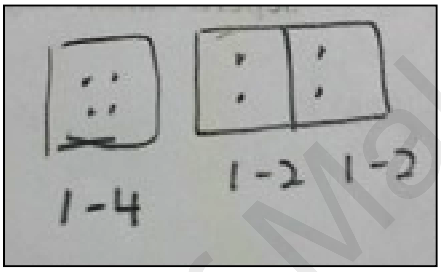
Berdasarkan Jadual 4.10, empat peserta kajian menggunakan kategori perbandingan secara kualitatif dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah. Bagi kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran, hanya tiga peserta kajian yang menggunakannya. Enam peserta kajian diklasifikasikan dalam kategori perbandingan berdasarkan per unit. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Lili, Danish, Herman, dan Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Lili. Lili menggunakan empat kategori, iaitu perbandingan secara kualitatif, perbandingan secara per unit, perbandingan berdasarkan skala pembesaran, dan perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah semasa membandingkan dua nisbah melibatkan kuantiti diskrit-selanjar. Petikan BN27 memaparkan tingkah laku beliau bagi kategori perbandingan secara kualitatif.

Petikan BN27

S: Khemah A lebih sempit.
P: Mengapa kamu kata khemah A?
S: Sebab saiz khemah berbeza. Saiz khemah A lebih kecil dari khemah B. Jadi lebih sempit la khemah A.

Berdasarkan Petikan BN27, Lili secara lisan membandingkan khemah A dan khemah B dengan mempertimbangkan saiz kedua-dua khemah. Beliau mengemukakan beberapa perkatan yang menggambarkan saiz ruang khemah A kurang berbanding khemah B, seperti “lebih kecil” dan “lebih sempit”. Tingkah laku Lili mencadangkan bahawa beliau membandingkan dua nisbah secara kualitatif. Namun, ketika ditanya berapa kali sempit khemah A berbanding khemah B, Lili mengemukakan dua lagi perbandingan yang dikategorikan sebagai perbandingan secara per unit dan perbandingan berdasarkan skala pembesaran. Rajah 4.20 menunjukkan cara kerja beliau, manakala Petikan BN28 memaparkan penjelasan cara kerja yang dibuat.



Rajah 4.20. Langkah kerja Lili bagi tugasan Khemah

Petikan BN28

P: Boleh jelaskan dengan lebih lanjut apa yang kamu buat?

S: Ini (menunjuk khemah di sebelah kiri) untuk khemah A dan ini (menunjuk khemah di sebelah kanan) untuk khemah B. Saya nak tunjuk satu khemah untuk 4 murid, jadi kalau 2 khemah macam ini (menunjuk khemah di sebelah kanan) maknanya satu khemah ada 2 murid saja.

P: Oo begitu. Jadi boleh kamu beritahu saya berapa kali sempit khemah A berbanding B?

S: Saya bandingkan murid dalam satu khemah (menunjuk “1 – 4” dan “1 – 2”). Khemah ini (menunjuk khemah di sebelah kiri) 4 murid, khemah ini (menunjuk khemah di sebelah kanan)2 murid, jadi 4 ialah dua kali ganda daripada 2. Khemah A sempit dua kali ganda dari khemah B.

P: Bagaimana kamu tahu?

S: Saya bahagi 4 dengan 2 dapat 2.

Dalam Petikan BN28, Lili pada permulaannya melukis 2 khemah mewakili khemah A dan khemah B. Beliau menganggap khemah A mewakili satu khemah yang mengandungi 4 murid dan khemah B sebagai 2 dua khemah yang terdiri daripada 2 murid dalam setiap khemah. Oleh kerana khemah B adalah dua kali besar daripada khemah A, maka beliau membahagikan khemah B kepada dua bahagian, yang mana setiap satu bahagian mewakili satu khemah terdiri daripada 2 murid. Lili kemudian membandingkan khemah A dengan satu bahagian khemah B yang nisbah unit masing-

masing adalah 1 kepada 4 dan 1 kepada 2. Ini menggambarkan Lili membuat perbandingan secara per unit. Beliau juga menganggap khemah A dua kali sempit berbanding khemah B berdasarkan hasil bahagi bilangan murid dalam khemah A dengan bilangan murid dalam satu khemah B yang diperoleh, iaitu 2. Tindakan ini menggambarkan Lili membuat perbandingan dua nisbah berdasarkan skala pembesaran.

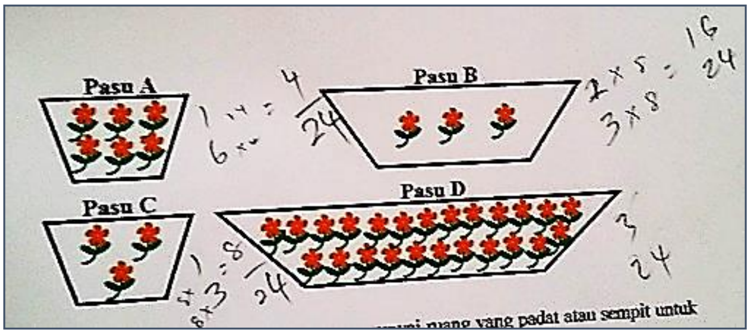
Dalam satu lagi tugasan khemah, Lili turut membandingkan dua nisbah menggunakan satu lagi kategori, iaitu perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah. Petikan BN29 memamparkan tingkah laku beliau.

Petikan BN29

P: Antara khemah C dan khemah D, khemah manakah yang lebih sempit?
S: (Merenung lama khemah C dan khemah D). Sama sempit.
P: Kenapa kamu kata sama sempit?
S: Sebab satu khemah ada 4 murid (menunjuk khemah C). Kalau khemah ini (menunjuk khemah D) dua kali besar, maknanya kena darab 4 murid dengan 2 dapat 8 murid. Jadi khemah ini (menunjuk khemah D) cukup 8 murid. Jadi sama sempit.
P: Boleh jelaskan sekali lagi?
S: Khemah A, satu untuk 4 murid. Khemah B, 2 untuk 8 murid. Macam kalau saya kecilkan 2/8 akan dapat juga ¼. Sebenarnya sama 2/8 dengan ¼.

Berdasarkan Petikan BN29, Lili menyatakan bahawa ruang khemah C dan khemah D adalah sama sempit berdasarkan nisbah kedua-dua khemah. Beliau menganggap nisbah khemah C dan khemah D masing-masing 1 kepada 4 dan 2 kepada 8 adalah setara, yang mana apabila 2/8 diringkaskan akan menghasilkan ¼. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Lili menggunakan kategori perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah dalam membanding dua nisbah.

Danish. Dalam membandingkan lebih daripada satu nisbah, Danish menggunakan kategori perbandingan berdasarkan kesetaran nisbah. Rajah 4.21 menunjukkan langkah kerja yang dibuat, manakala Petikan BN30 memaparkan penerangan tentang langkah kerja tersebut.



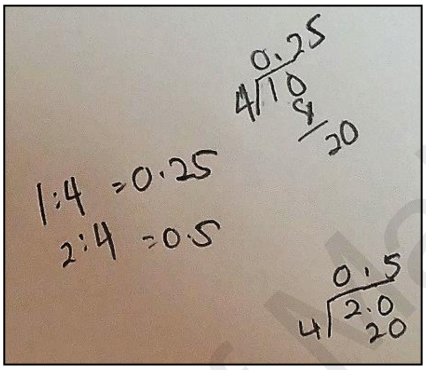
Rajah 4.21: Langkah kerja Danish bagi tugasan Pasu Bunga

Petikan BN30

P: Boleh jelaskan apa yang kamu tulis?
S: Daripada soalan saya tahu pasu B dua kali besar dan pasu D pula 3 kali besar daripada pasu A dan pasu C. Kalau nak bandingkan mesti cari penyebut sama dulu.
P: Apa maksud kamu “penyebut”?
S: Penyebut itu sebenarnya bilangan bunga, pengangka pula besar pasu.
P: Seterusnya apa yang kamu nak buat?
S: Bila dah sama 24, saya akan tengok yang atas (merujuk kepada pengangka) yang paling sikit.
P: Mengapa kamu tengok atas?
S: Sebab bunga semua dah sama, jadi saya akan bandingkan pasu.
P: Boleh kamu terangkan?
S: Kalau pasu D, ada 24 bunga dalam 3 pasu, pasu B ada 24 bunga dalam 16 pasu. Tentulah pasu D lagi sempit. Pasu B ada banyak lagi ruang.
P: Boleh kamu susun pasu ikut susunan?
S: Paling sempit pasu D, kedua sempit pasu C, ketiga pasu A dan yang paling banyak ruang pasu B.

Berdasarkan Rajah 4.21 dan Petikan BN30, Danish menganggap pasu A dan pasu C mewakili sebuah pasu, manakala pasu B dan pasu D masing-masing mewakili 2 dan 3 pasu. Beliau kemudian menulis nisbah bilangan pasu kepada bilangan bunga setiap pasu dalam bentuk pecahan sebelum membentuk pecahan yang setara dengan pecahan asal dan seterusnya menyamakan semua penyebut pecahan tersebut sebagai 24. Menurut Danish, oleh kerana penyebut, iaitu bilangan bunga setiap pasu adalah sama, maka beliau hanya membandingkan bilangan pasu. Beliau menganggap bilangan pasu yang sedikit akan menyebabkan ruang menjadi sempit. Sebaliknya, bilangan pasu yang banyak mempunyai banyak ruang. Danish berikutnya merumuskan pasu D merupakan pasu yang paling sempit, manakala pasu B adalah pasu paling banyak ruang. Tindakan ini menggambarkan Danish membanding berdasarkan kesetaraan nisbah.

Herman. Herman menggunakan kategori perbandingan secara per unit dalam membandingkan dua nisbah melibatkan konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar. Rajah 4.22 menunjukkan langkah kerja yang dibuat, manakala Petikan BN31 memaparkan penjelasan beliau.



Rajah 4.22. Langkah kerja Herman bagi tugasan Khemah

Petikan BN31

P: Boleh kamu terangkan apa yang kamu buat?
S: Saya bahagi nisbah ini (menunjuk “1 : 4” dan “2 : 4”).
P: Kenapa kamu kena bahagi?
S: Mana yang kecil itulah yang sempit. Jadi, khemah A yang sempit.
P: Mana kamu dapat “2” (menunjuk “2” dalam 2 : 4)?
S: Oo itu 2 khemah sebab khemah B ini dua kali besar dari khemah A.
P: Apa yang kamu faham dengan 0.25 dan 0.5?
S: Umm… 0.25 itu untuk satu khemah bahagi 4 orang. Macam…0.25 itu ruang untuk seorang. 0.5 pun macam tu.
P: Tadi kamu kata “yang kecil itulah yang sempit”. Apa maksud kamu dengan “kecil”?
S: Ruang khemah yang kecil sebab ini (menunjuk 0.25) kecil.

Berdasarkan Petikan BN31, Herman membandingkan kepadatan khemah A dan khemah B dengan menentukan saiz bahagian khemah yang dihuni oleh setiap murid secara membahagi kuantiti dalam nisbah. Beliau membahagikan bilangan khemah dengan bilangan murid secara pembahagian panjang menghasilkan 0.25 dan 0.5 masing-masing bagi khemah A dan khemah B. Herman kemudian membandingkan hasil bahagi dan membuat kesimpulan bahawa ruang khemah A lebih sempit daripada khemah B dengan alasan 0.25 lebih kecil daripada 0.5. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan Herman membuat perbandingan secara per unit.

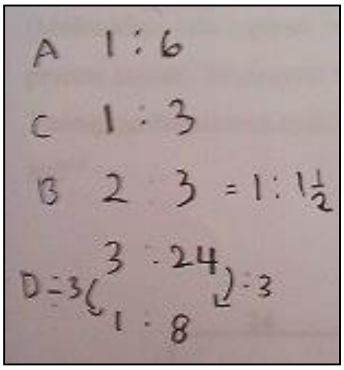
Dalam membandingkan lebih daripada dua nisbah, Herman menggunakan kategori yang berbeza. Beliau hanya membandingkan semua pasu bunga secara kualitatif. Petikan BN32 memaparkan respons beliau.

Petikan BN32

P: Pasu manakah yang paling sempit?
S: (Dengan cepat). Pasu D.
P: Cepatnya. Bagaimana kamu tahu?
S: Sebab pasu D banyak sangat bunga. Dah penuh dengan bunga.
P: Pasu mana yang paling banyak ruang?
S: Pasu B yang paling banyak ruang sebab bunganya paling sikit.
P: Kenapa bukan pasu C?
S: Kalau tengok gambar ini, pasu B lebih besar daripada pasu C.

Dalam Petikan BN32, Herman hanya membuat perbandingan kepadatan pasu bunga secara lisan berdasarkan bilangan bunga dalam setiap pasu dengan mengemukakan beberapa perkataan, seperti "banyak sangat", "banyak ruang" paling sikit", dan "lebih besar". Beliau menganggap bilangan bunga yang banyak akan menyebabkan ruang menjadi sempit, sebaliknya pasu yang mempunyai bilangan bunga yang sikit mempunyai ruang yang banyak. Bagi pasu yang mempunyai bilangan bunga yang sama, Herman membandingkan saiz pasu berdasarkan ilustrasi yang diberi dalam tugasan. Tingkah laku ini menggambarkan beliau membanding lebih dari dua nisbah kategori perbandingan secara kualitatif.

Mona. Mona menggunakan dua kategori dalam membandingkan lebih daripada dua nisbah, iaitu perbandingan secara per unit dan perbandingan berdasarkan skala pembesaran.



Rajah 4.23. Langkah kerja Mona bagi tugasan Pasu Bunga

Berdasarkan Rajah 4.23, Mona menulis nisbah saiz pasu kepada bilangan bunga. Beliau meringkaskan nisbah pasu dan nisbah pasu D kepada sebutan terendah. Petikan BN33 memaparkan penjelasan beliau tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan BN33

P: Apa yang kamu tulis ini?
S: Saya tulis nisbah saiz pasu dengan bilangan bunga dalam pasu.
P: Bagaimana kamu tahu nisbah dalam setiap pasu?
S: Pasu A dan pasu C saya anggap saiz pasu itu 1. Pasu B dua kali ganda besar pasu A, jadi saya anggap 2 pasu. Pasu D ialah 3 kali besar dari pasu A, jadi 3 pasu.
P: Jadi pasu mana yang mempunyai ruang paling sempit?
S: Pasu D.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Saya jadikan semua pasu jadi satu dulu, nanti senang nak banding.
P: Apa maksud kamu?
S: Pasu A dan pasu C memang satu. Pasu B saya jadikan satu pasu, bunga jadi ½. Pasu D saya bahagi 3, pasu jadi satu, bunga jadi 8. Semua pasu dah satu, jadi saya hanya tengok mana Bungan yang banyak. Pasu D la sempit sebab banyak bunga.
P: Bagaimana pula dengan pasu yang paling banyak ruang?
S: (Dengan cepat). Pasu B sebab bunga dia paling sikit. Jadi yang pertama sempit pasu D, pasu A, pasu C, dan pasu B.

Dalam Petikan BN33, Mona menganggap pasu A dan pasu C sebagai satu pasu, manakala pasu B dan pasu D masing-masing mewakili 2 dan 3 pasu. Beliau kemudian sebelum menulis semua nisbah pasu kepada bilangan bunga sebelum membentuk nisbah unit bagi pasu B dan pasu D dengan alasan sekiranya bilangan semua pasu sama, maka beliau hanya perlu membandingkan bilangan bunga. Mona seterusnya menganggap pasu D mempunyai ruang yang paling sempit berdasarkan bilangan bunga terbanyak. Beliau turut menyusun semua pasu bermula dengan urutan ruang paling sempit hingga ruang paling luas. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan bahawa Mona menggunakan kategori perbandingan secara per unit. Selain itu Mona turut dikenal pasti menggunakan kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran seperti ditunjuk dalam Petikan BN34.

Petikan BN34

P:	Tadi kamu kata pasu A lagi sempit daripada pasu C. Boleh kamu beritahu saya berapa kali sempit?
S:	Pasu A dua kali sempit berbanding pasu C.
P:	Macam mana kamu tahu?
S:	Sebab bunga dalam pasu A dua kali ganda dari bilangan bunga pasu C.
P:	Bagaimana pula pasu A dan pasu B. Berapa kali sempit pasu A berbanding pasu B?
S:	Pasu A sempit 4 kali berbanding pasu B?
P:	Bagaimana kamu dapat 4?
S:	1 ½, 1 ½ dapat 3. Buat sekali lagi 1 ½, 1 ½ dapat 3. Maknanya 4 kali 1 ½ dapat 6.
P:	Oo begitu. Bagaimana pula dengan pasu A dan pasu D?
S:	(Tersenyum). Saya tak tahu nak bandingkan 6 dengan 8.

Dalam Petikan BN34, apabila diminta membandingkan pasu, Mona hanya mempertimbangkan satu kuantiti, iaitu bilangan bunga bagi membandingkan kepadatan pasu bunga. Misalnya, oleh kerana bilangan bunga dalam pasu A adalah dua kali banyak berbanding bilangan bunga dalam pasu C, maka beliau menganggap pasu A sempit dua kali ganda berbanding pasu C dan Pasu A juga adalah 4 kali sempit berbanding pasu B. Namun Mona tidak dapat membandingkan berapa sempit pasu D berbanding pasu A. Tindakan Mona ini menggambarkan bahawa beliau membuat perbandingan berdasarkan skala pembesaran.

Kesimpulan. Semua peserta kajian menggunakan lebih daripada satu kategori dalam membandingkan dua dan lebih dari dua nisbah melibatkan kuantiti diskrit-selanjar. Misalnya, Fikri dan Mona menggunakan kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran dan perbandingan berdasarkan per unit.

Konteks masalah keserupaan. Membandingkan nisbah bagi konteks masalah keserupaan melibatkan kuantiti selanjar. Dalam membandingkan nisbah, peserta kajian menggunakan tiga kategori, iaitu perbandingan secara per unit, perbandingan berdasarkan skala pembesaran, dan perbandingan berdasarkan koordinasi nisbah. Penerangan kategori perbandingan berdasarkan koordinasi nisbah adalah seperti berikut:

i. *Perbandingan berdasarkan koordinasi nisbah*. Peserta kajian mengkoordinasi satu nisbah secara urutan menaik atau menurun dengan menambah secara berulang kedua-dua kuantiti secara serentak sehingga mencapai nisbah yang disasarkan. Peserta kajian kemudian membuat perbandingan bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

Kuantiti selanjar. Jadual 4.11 merumuskan cara membanding nisbah berdasarkan kategori perbandingan secara per unit, perbandingan berdasarkan skala pembesaran, dan perbandingan berdasarkan koordinasi nisbah oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar.

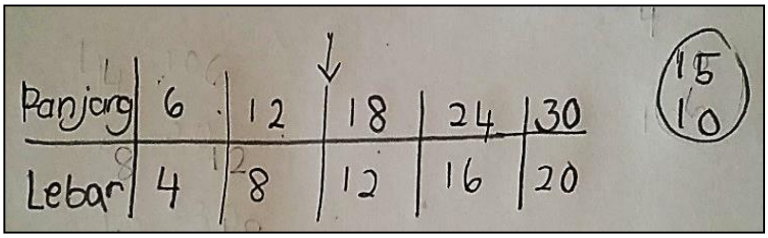
Jadual 4.11

Kategori membanding nisbah konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar

Kategori	Peserta kajian
Perbandingan secara per unit	Mona, Fikri, Herman
Perbandingan berdasarkan skala pembesaran	Lili, Herman, Danish, Fikri, Sofia
Perbandingan secara koordinasi nisbah	Lili, Wani, Sofia

Berdasarkan Jadual 4.11, tiga peserta kajian menggunakan kategori perbandingan secara per unit dan perbandingan secara koordinasi nisbah. Manakala lima peserta kajian menggunakan kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Sofia, Danish, dan Herman yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Sofia. Sofia menggunakan kategori perbandingan secara koordinasi nisbah dan perbandingan berdasarkan skala pembesaran dalam membandingkan dua segiempat. Rajah 4.24 menunjukkan langkah kerja beliau.



Rajah 4.24. Langkah kerja Sofia bagi tugasan Segiempat

Dalam Rajah 4.24, Sofia membina satu jadual terdiri daripada dua lajur yang dilabel sebagai panjang dan lebar. Petikan BN34 memaparkan penjelasan beliau tentang jadual yang dibina.

Petikan BN34

P: Boleh jelaskan jadual yang kamu buat?

S: Nak tahu berapa kali kecil segiempat X berbanding segiempat Y. Kalau berapa kali kecil… susah. Saya buat berapa kali besar segiempat Y dari segiempat X.

P: Boleh terangkan?

S: Saya guna panjang dan lebar segiempat X (menunjuk 6 dan 4) untuk buat segiempat lain. Tambah 6 dan 4.

P: Apa maksud kamu?

S: Ini (menunjuk 12 dan 8) sama saja dengan segiempat X tapi lagi besar. Jadi saya cuba cari panjang dan lebar 15 dan 10 dalam jadual tapi tak ada pula. 15 dan 10 terletak antara ini (menunjuk anak panah).

P: Mungkin kamu boleh cuba cara lain?

S: (Diam lama). Saya rasa segiempat Y besar 2 ½ kali daripada segiempat X.

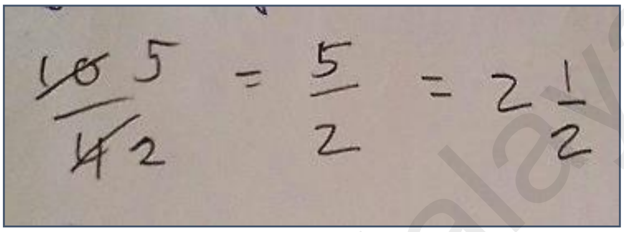
P: Mengapa kamu kata begitu?

S: Sebab 30 dan 20 adalah yang kelima dalam jadual. Tapi saya nak separuh saja dari 30 dan 20, iaitu 15 dan 10. Maksudnya separuh dari 5 ialah 2 1/2.

Berdasarkan Petikan BN34, Sofia menggunakan nisbah panjang kepada lebar bagi segiempat X untuk membina nisbah yang lain dalam bentuk jadual secara menambah berulang. Namun, oleh kerana nisbah panjang kepada lebar bagi segiempat Y tidak terdapat dalam jadual yang dibina, maka Sofia memikirkan cara yang berbeza. Tindakan ini menggambarkan bahawa beliau menggunakan kategori perbandingan secara koordinasi nisbah untuk membandingkan dua segiempat.

Sofia seterusnya mengenal pasti nisbah 30 kepada 20 dalam jadual adalah nisbah yang kelima dan menyatakkan "separuh" daripada nisbah tersebut, iaitu 15 kepada 10 merupakan nisbah panjang kepada lebar bagi segiempat Y. Beliau kemudian menganggap "separuh" daripada 5 adalah 2 ½ yang dianggapnya sebagai segiempat Y adalah 2 ½ kali besar daripada segiempat X. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Sofia menggunakan kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran.

Danish. Dalam membandingkan nisbah bagi konteks keserupaan bagi kuantiti selamjar, Danish menggunakan kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran. Rajah 4.25 menunjukkan langkah kerja yang dibuat, manakala Petikan BN35 memaparkan penerangan tentang langkah kerja tersebut.



Rajah 4.25. Langkah kerja Danish bagi tugasan Segiempat

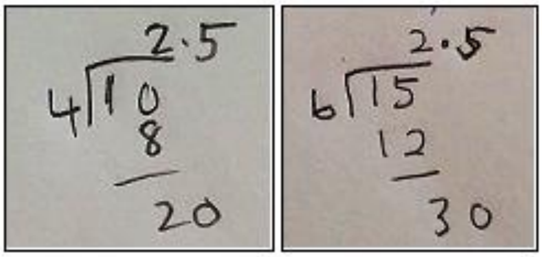
Petikan BN35

P: Boleh jelaskan?
S: Saya bandingkan lebar ini (menunjuk 10 dan 4) dapat 2 ½ kali besar.
P: Kenapa kamu bandingkan lebar kedua-dua segiempat dan bukannya panjang?
S: Sama saja. Mana-mana pun boleh. Jawapan akan sama.
P: Apa maksud kamu “2 ½ kali besar”?
S: (Diam seketika). Lebar segiempat Y adalah 2 ½ kali panjang lebar segiempat X.

Berdasarkan Rajah 4.25 dan Petikan BN35, Danish membuat perbandingan dengan mempertimbangkan lebar kedua-dua segiempat. Beliau mempermudahkan nisbah 10 kepada 4 menjadi 5 kepada 2 yang kemudiannya ditulis sebagai 2 ½. Danish menganggap lebar segiempat Y adalah 2 ½ kali panjang lebar segiempat X. Beliau juga sedar bahawa membandingkan panjang kedua-dua segiempat turut memberikan jawapan yang sama. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Danish menggunakan kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran.

Herman. Herman menggunakan kategori perbandingan secara per unit dan perbandingan berdasarkan skala pembesaran dalam membandingkan dua nisbah melibatkan konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar. Rajah 4.26

menunjukkan langkah kerja yang dibuat, manakala Petikan BN36 memaparkan penjelasan beliau.



Rajah 4.26. Langkah kerja Herman bagi tugasan Segiempat

Petikan BN36

P: Boleh kamu terangkan apa yang kamu buat?
S: Mula-mula saya bahagi 10 dengan 4 dapat 2.5. Tak sangka pula 15 bahagi dengan 6 pun dapat 2.5.
P: Kenapa kamu kena bahagi?
S: Lebar kena bahagi lebar dan panjang kena bahagi panjang. Baru boleh bandingkan.
P: Apa yang kamu faham dengan 2.5?
S: (Nampak keliru). Saya tak tahu nak terangkan (diam). Contohnya 4 buku harganya RM10. Kalau 10 bahagi 4 saya dapat harga satu buku RM2.50.
P: Jadi apa maksud kalau dua-dua hasil bahagi sama?
S: Segiempat Y besar 2.5 kali dari segiempat X.

Berdasarkan Petikan BN36, Herman membandingkan kedua-dua segiempat dengan membahagi lebar segiempat Y dengan lebar segiempat X menghasilkan 2.5. Beliau melakukkan operasi yang sama terhadap panjang kedua-dua segiempat dan memperoleh hasil bahagi yang sama. Herman turut memberi contoh “harga satu buku” bagi menjelaskan makna hasil bahagi. Ini menggambarkan Herman membuat perbandingan secara per unit dengan melakukan pembahagian panjang. Beliau kemudian menganggap segiempat Y adalah 2.5 kali besar daripada segiempat X. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan Herman membuat perbandingan dua nisbah berdasarkan skala pembesaran.

Kesimpulan. Empat daripada tujuh peserta kajian, iaitu Lili, Sofia, Fikri, dan Herman menggunakan lebih daripada satu kategori dalam membandingkan dua nisbah melibatkan kuantiti selanjar bagi konteks masalah keserupaan. Misalnya, Lili dan

Sofia menggunakan kategori perbandingan berdasarkan skala pembesaran dan perbandingan berdasarkan koordinasi nisbah.

Hubung kait antara Kuantiti

Bahagian ini membentangkan hasil kajian tentang cara peserta kajian membuat hubung kait antara kuantiti dalam nisbah semasa menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran. Tiga konteks masalah yang terlibat adalah konteks masalah kadar, konteks masalah nisbah, dan konteks masalah keserupaan yang membabitkan empat struktur hubungan nombor, iaitu nombor bulat dan nombor bulat, nombor bulat dan bukan nombor bulat, bukan nombor bulat dan nombor bulat, dan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Jadual 4.12 menunjukkan struktur konteks masalah dan struktur hubungan nombor yang terlibat.

Jadual 4.12

Struktur konteks masalah dan struktur hubungan nombor dalam hubung kait antara kuantiti

Komponen Penaakulan Perkadaran	Struktur Konteks Masalah	Struktur Hubungan Nombor
Hubung kait antara kuantiti	1. Konteks masalah kadar	• Nombor bulat dan nombor bulat • Nombor bulat dan bukan nombor bulat
	2. Konteks masalah nisbah	• Bukan nombor bulat dan nombor bulat • Bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat
	3. Konteks masalah keserupaan	• Bukan nombor bulat dan nombor bulat • Bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat

Dalam membuat hubung kait antara kuantiti bagi semua konteks masalah dan struktur hubungan nombor, peserta kajian menggunakan tiga kategori, iaitu hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, dan tiada hubung kait antara kuantiti, yang mana setiap kategori terdiri daripada satu atau lebih daripada satu subkategori yang diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan penaakulan perkadaran. Kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran terdiri daripada tiga subkategori, iaitu unitari, skala pembesaran, dan permudahkan nisbah. Begitu juga bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran yang mempunyai tiga subkategori, iaitu penambahan berulang, skala pembesaran, dan permudahkan nisbah. Kategori tiada hubung kait antara kuantiti hanya mengandungi satu subkategori, iaitu perbezaan kuantiti.

Konteks masalah kadar. Hubung kait antara kuantiti dalam konteks masalah kadar bagi peserta kajian melibatkan dua struktur hubungan nombor, iaitu nombor bulat dan nombor bulat dan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Dalam membuat hubung kait antara kuantiti, peserta kajian menggunakan dua kategori, iaitu hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran. Setiap kategori terdiri daripada satu atau lebih daripada satu subkategori yang diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan. Kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran terdiri daripada dua subkategori, iaitu unitari dan skala pembesaran. Kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran juga mempunyai dua subkategori, iaitu penambahan berulang dan skala pembesaran. Penerangan kategori dan subkategori tersebut adalah seperti berikut:

i. *Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran*. Peserta kajian menghubung kaitkan dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran dalam satu nisbah sama ada secara unitari atau skala pembesaran.

   - *Unitari*. Peserta kajian menentukan kuantiti yang ingin diketahui membabitkan dua langkah algoritma, iaitu mencari nilai bagi satu unit dahulu dengan membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.

- *Skala pembesaran*. Peserta kajian mengenal pasti hubungan berapa "kali banyak", "kali panjang", atau " kali ganda" antara dua kuantiti dalam nisbah asal secara pendaraban dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua bagi mengetahui kuantiti yang ingin diketahui.

ii. *Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran*. Peserta kajian menghubung kaitkan dua kuantiti sepadan yang sama ruang ukuran sama ada secara penambahan berulang atau skala pembesaran.

- *Penambahan berulang*. Peserta kajian menentukan kuantiti yang ingin diketahui secara mengkoordinasi kuantiti dalam nisbah asal secara urutan menaik dengan melakukan pengulangan penambahan kuantiti satu demi satu atau secara serentak dan berhenti apabila mencapai kuantiti yang disasarkan.
- *Skala pembesaran*. Peserta kajian mengenal pasti hubungan berapa "kali banyak", "kali panjang", atau " kali ganda" antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah secara pendaraban dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti bagi mengetahui kuantiti yang ingin diketahui.

Struktur nombor bulat-nombor bulat. Jadual 4.13 merumuskan cara peserta kajian membuat hubung kait antara dua kuantiti berdasarkan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah kadar bagi struktur nombor bulat dan nombor bulat.

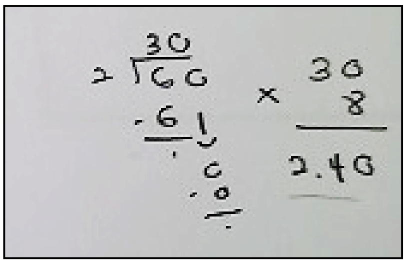
Jadual 4.13

Kategori hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan nombor bulat

Kategori Hubungan	Subkategori hubungan	Peserta kajian
Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran	a. Unitari	Semua
	b. Skala pembesaran	Mona
Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran	a. Penambahan berulang	Danish
	b. Skala pembesaran	Lili, Danish, Mona, Sofia, Fikri

Berdasarkan Jadual 4.13, semua peserta kajian menggunakan subkategori hubungan secara unitari dan seorang peserta kajian menggunakan subkategori hubungan secara skala pembesaran yang diklasifikasikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran. Manakala bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, seorang dan lima peserta kajian masing-masing menggunakan subkategori secara penambahan berulang dan skala pembesaran. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Lili, Danish, dan Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Lili. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Lili dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran. Beliau mengemukakan dua bentuk penyelesaian yang berbeza. Dalam penyelesaian pertama, Lili memulakan langkah kerja dengan membuat pembahagian panjang seperti dalam Rajah 4.27.



Rajah 4.27. Langkah kerja (1) Lili bagi tugasan Lolipop

Berdasarkan langkah kerja dalam Rajah 4.27, Lili melakukan operasi bahagi menggunakan nisbah asal dengan membahagikan 60 dengan 2. Penjelasan tentang langkah kerja yang dibuat oleh Lili dipaparkan dalam Petikan HK37.

Petikan HK37

P: Boleh jelaskan dengan lebih lanjut apa yang kamu buat?

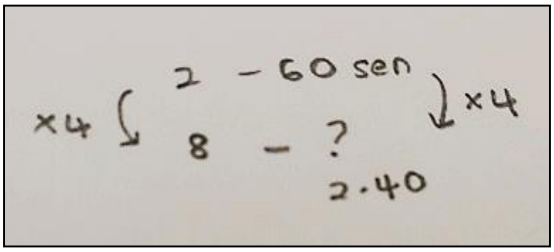
S: Ini memang cara cikgu ajar kat sekolah. Mula-mula saya bahagi 60 sen dengan 2, kemudian saya darab 30 dengan 8. Dapat RM 2.40 (menunjuk "2.40").

P: Oo cikgu ajar. Kalau begitu apa maksud ini (menunjuk 30)?

S: 30 ini harga untuk satu lolipop. Lepas tu saya darab 30 dengan 8 sebab ada 8 lolipop.

Dalam Petikan HK37, Lili menggunakan nisbah asal, iaitu 2 kepada 60 dan melakukan operasi bahagi secara pembahagian panjang. Pernyataan "harga bagi satu lolipop" menunjukkan bahawa Lili tidak hanya sekadar melakukan operasi bahagi seperti yang diajar di sekolah, malah sedar dan tahu mengapa operasi bahagi dilakukan. Seterusnya, beliau mendarab hasil bahagi, iaitu 30 dengan 8 dalam bentuk lazim bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui. Tingkah laku Lili mencadangkan bahawa beliau membuat hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, iaitu harga lolipop dan bilangan lolipop secara unitari bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

Dalam penyelesaian kedua, Lili memulakan dengan menulis pasangan nombor seperti ditunjuk dalam Rajah 4.28.



Rajah 4.28. Langkah kerja (2) Lili bagi tugasan Lolipop

Berdasarkan Rajah 4.28, Lili melukis anak panah yang menghubungkan antara nombor 2 dan 8. Beliau turut melukis anak panah menghubungkan 60 sen kepada simbol "?". Tindakan ini mencadangkan bahawa Lili membuat hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran, iaitu hubungan antara bilangan lolipop dalam nisbah asal dan bilangan lolipop dalam nisbah kedua, berbeza dengan hubungan yang ditunjuk dalam penyelesaian pertama. Beliau turut memberi justifikasi tentang simbol “x 4” seperti dalam Petikan HK38.

Petikan HK38

P: Boleh kamu jelaskan apa kamu buat ini?
S: Bila saya tulis macam ini (menunjuk 2 – 60 sen, 8 - ?), nampak lagi senang. Jawapan pun sama.
P: Apa maksud kamu?
S: Maksudnya sepatutnya saya tak perlu cari harga satu lolipop dulu pun tak apa. Tengok saja nombor 2 dan 8 ini dah tahu darab 4. Jadi 60 sen pun saya darab 4 juga.
P: Mengapa 60 sen kena darab 4 juga?
S: Mesti sama sebab ikut yang sebelah ini (menunjuk 2 dan 8). Kalau sebelah kiri darab 4, sebelah kanan pun darab 4.
P: Apa yang kamu faham dengan “darab 4” itu?
S: 4 kali banyak.

Petikan HK38 menunjukkan bahawa Lili menganggap bilangan lolipop dalam nisbah kedua adalah “4 kali banyak” berbanding bilangan lolipop dalam nisbah asal. Beliau kemudian mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi ruang ukuran, iaitu harga lolipop bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Tindakan Lili mendarab harga lolipop dalam nisbah asal dengan pendarab yang sama menunjukkan bahawa beliau tahu sekiranya bilangan lolipop bertambah empat kali banyak, maka harga lolipop juga perlu bertambah sebanyak empat kali banyak. Langkah kerja yang ditunjukkan Lili mencadangkan beliau membuat hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran secara skala pembesaran yang melibatkan operasi pendaraban bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

Danish. Dalam menentukan kuantiti yang ingin diketahui, Danish mengemukakan tiga cara penyelesaian berbeza yang dikategorikan sebagai hubung kait antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran dan hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran. Petikan HK39 memaparkan tingkah laku beliau bagi penyelesaian pertama.

Petikan HK39

P: Boleh kamu jelaskan lagi?
S: Maksud saya tak payah buat jalan kerja. Sebab 2 lolipop dan 60 sen sama-sama kena darab 4.
P: Mengapa kamu darab dengan 4?
S: Dalam soalan nak harga 8 lolipop. Saya darab kumpulan tu dengan nombor yang boleh dapat 8. Jadi akan dapat 8 lolipop, RM2.40.

Berdasarkan Petikan HK39, Danish hanya menyelesaikan tugasan secara lisan tanpa melibatkan sebarang bentuk pengiraan atau rajah seperti peserta kajian yang lain. Beliau membuat hubung kait antara bilangan lolipop dalam nisbah asal dengan bilangan lolipop dalam nisbah kedua dengan mendarab 4. Seterusnya, beliau mengaplikasikan hubungan "darab 4" kepada satu lagi ruang ukuran dalam nisbah asal, iaitu harga lolipop bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Tindakan Danish mencadangkan beliau membuat hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran secara skala pembesaran yang melibatkan operasi pendaraban. Petikan HK40 dan HK41 masing-masing menunjukkan tingkah laku Danish bagi penyelesaian kedua dan ketiga.

Petikan HK40

P: Boleh tunjukkan cara lain?
S: (Diam). Cari satu harga lolipop dulu pun boleh, lepas itu baru cari harga 8 lolipop.
P: Bagaimana kamu cari harga satu lolipop?
S: 60 sen bahagikan dengan 2 la. Jawapan bahagi itu baru darab 8. Dapatlah harga 8 lolipop

Petikan HK41

P: Selain dua cara tadi, ada cara lain?
S: Saya tak pasti (diam seketika). Kalau 2 lolipop 60 sen saya tambah sebanyak 4 kali pun boleh. Tapi lambat la nak tambah. Baik saya darab macam mula-mula tadi.
P: Mengapa kamu tambah sebanyak 4 kali?
S: Tambah lolipop 4 kali supaya dapat 8. Harga pun kena tambah 4 kali.

Dalam Petikan HK40, Danish menjelaskan langkah algoritma bagi menentukan harga satu lolipop terlebih dahulu dengan membahagi dua kuantiti dalam nisbah asal, iaitu membahagi 60 dengan 2. Oleh kerana kuantiti yang disasarkan adalah 8, maka beliau mendarab hasil bahagi yang diperoleh dengan 8. Tindakan Danish menggambarkan beliau membuat hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari, iaitu mengaitkan harga lolipop dan bilangan lolipop berbeza dengan penyelesaian pertama.

Tingkah laku Danish dalam Petikan HK41 mencadangkan bahawa beliau menganggap tugasan tersebut boleh diselesaikan dengan melakukan operasi penambahan. Pernyataan “tambah lolipop 4 kali supaya dapat 8” menunjukkan Danish melakukan pengulangan penambahan setiap kuantiti dalam nisbah asal sebanyak empat kali bagi mencapai kuantiti yang disasarkan, iaitu 8 lolipop. Beliau seterusnya melakukan langkah yang sama terhadap harga lolipop yang asal bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Tindakan ini menggambarkan beliau sekali lagi membuat hubung kait antara kuantiti yang sama ruang ukuran, sama seperti penyelesaian pertama, namun bukan secara skala pembesaran sebaliknya secara penambahan berulang.

Mona. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Mona dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran. Beliau mengemukakan tiga bentuk penyelesaian yang berbeza. Penyelesaian pertama beliau dikategorikan sebagai membuat hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara pendaraban. Kesemua langkah kerja bertulis yang dikemukakan adalah sama seperti langkah kerja yang ditunjukkan oleh Lili, kecuali Mona menggunakan perkataan yang berbeza semasa memberi makna tentang simbol “x 4”. Beliau merujuk simbol “x 4” sebagai “4 kali ganda” mencadangkan bahawa Mona menyedari terdapat hubungan secara skala pembesaran antara dua kuantiti yang sepadan dalam kedua-dua nisbah.

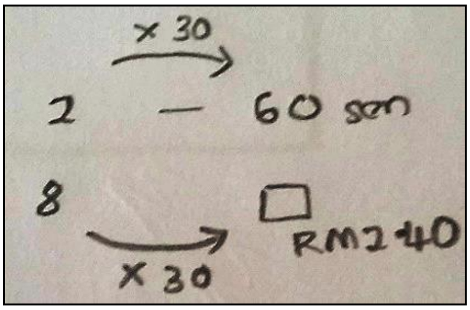
Langkah penyelesaian kedua Mona dikategorikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari. Petikan HK42 memaparkan respons beliau.

Petikan HK42

P: Selain daripada darab empat, ada cara lain yang kamu boleh tunjuk?
S: Boleh juga cari harga satu lolipop.
P: Boleh tunjukkan?
S: Saya terangkan saja boleh, malas nak tulis.
P: Boleh.
S: Kena bahagi 60 dengan 2 dulu baru dapat harga satu lolipop. Kemudian baru kali 8.
P: Mengapa kena kali 8?
S: Kalau tahu harga satu lolipop, kita boleh tahu harga 8 dengan kalikan.

Berdasarkan Petikan HK42, Mona secara lisan menjelaskan dua langkah algoritma, iaitu menentukan harga bagi satu lolipop terlebih dahulu dengan membahagi antara dua kuantiti dalam nisbah asal, iaitu 60 dibahagi dengan 2 dan kemudiannya mendarab hasil bahagi yang diperoleh dengan 8. Tingkah laku ini menggambarkan Mona menghubung kaitkan antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran secara unitari, iaitu mengaitkan harga lolipop dan bilangan lolipop dalam nisbah yang sama.

Dalam penyelesaian ketiga, Mona menentukan kuantiti yang dikehendaki dengan memulakan dengan menulis pasangan nombor seperti dalam Rajah 4.29.



Rajah 4.29. Langkah kerja (1) Mona bagi tugasan Lolipop

Berdasarkan Rajah 4.29, Mona melukis anak panah yang menghubungkan antara nombor 2 dengan 60 dan antara nombor 8 dengan simbol “□”. Tindakan ini mencadangkan bahawa Mona membuat hubung kait antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran, iaitu hubungan antara bilangan lolipop dan harga lolipop dalam nisbah asal dan hubungan antara bilangan lolipop dan harga lolipop dalam nisbah kedua. Beliau turut memberi justifikasi tentang simbol "x 30" seperti dipaparkan dalam Petikan HK43.

Petikan HK43

P:	Apa yang kamu cakap perlahan tadi dan boleh jelaskan apa yang kamu buat ini (menunjuk pasangan nombor yang ditulis)?
S:	Saya cuba darab 2 dengan 30 supaya dapat 60. Kalau atas darab 30, bawah (menunjuk 8) pun kena darab 30. Dapat jawapan sama RM 2.40.
P:	Mengapa kamu darab 2 dengan 30?
S:	Saya nak jadikan ini (menunjuk 2) supaya jadi 60.
P:	Apa yang kamu maksudkan dengan "x 30"
S:	Umm… 60 ialah 30 kali ganda dari 2.

Dalam Petikan HK43, Mona mengenal pasti hubungan "30 kali ganda" antara dua kuantiti dalam nisbah asal, iaitu bilangan lolipop dan harga lolipop secara pendaraban. Beliau kemudian mengaplikasikan hubungan tersebut terhadap satu kuantiti yang diketahui dalam nisbah kedua bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan bahawa Mona membuat hubung kait antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran secara skala pembesaran.

Kesimpulan. Lima daripada tujuh peserta kajian, iaitu Lili, Danish, Mona Sofia, dan Fikri menggunakan lebih daripada satu kategori dalam menghubung kaitkan kuantiti melibatkan struktur nombor bulat dan nombor bulat. Misalnya, Danish dan Fikri menggunakan hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara skala pembesaran. Selain itu, Danish turut menggunakan kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara penambahan berulang. Herman dan Wani hanya menggunakan kategori hubung kait dua kuantiti bebeza ruang ukuran secara unitari.

Struktur nombor bulat-bukan nombor bulat. Jadual 4.14 merumuskan cara peserta kajian membuat hubung kait antara dua kuantiti berdasarkan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat.

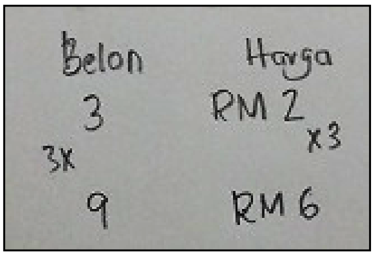
Jadual 4.14

Kategori hubung kait antara kuantiti dalam konteks kadar bagi struktur hubungan nombor bulat dan bukan nombor bulat

Kategori Hubungan	Subkategori hubungan	Peserta kajian
Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran	a. Unitari	Lili, Wani, Herman, Sofia, Fikri
Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran	a. Penambahan berulang	Lili, Sofia, Fikri
	b. Skala pembesaran	Lili, Wani, Danish, Herman, Mona

Berdasarkan Jadual 4.14, lima peserta kajian menggunakan subkategori hubungan secara unitari yang diklasifikasikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran. Manakala bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, tiga dan lima peserta kajian masing-masing menggunakan subkategori secara penambahan berulang dan skala pembesaran. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Danish dan Sofia yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

*Danish***.** Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Danish dikategorikan sebagai hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara skala pembesaran. Rajah 4.30 menunjukkan cara penyelesaian beliau.



Rajah 4.30. Langkah kerja Danish bagi tugasan Belon

Dalam Rajah 4.30, Danish menulis pasangan nombor 3 dan 2 masing-masing mewakili bilagan belon dan harga belon dalam dua lajur dan menulis simbol “x 3” di bawah kedua-duanya sebelum menulis satu lagi pasangan nombor 9 dan 6. Petikan HK44 memaparkan penerangan Danish tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan HK44

P: Boleh jelaskan apa yang kamu buat?
S: Saya guna 3 belon RM 2 (menunjuk pasangan 3 – RM 2 yang ditulis) macam yang diberi dalam soalan.
P: Kemudian?
S: Saya tengok 9. Untuk 3 belon nak jadi 9 belon saya darab dengan 3.
P: Selepas itu apa yang kamu buat?
S: Sebelah sini (menunjuk nombor di lajur kanan) saya akan darab dengan 3 juga, ikut ini (menunjuk "x 3" di lajur kiri).
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Mestilah. Kalau belon bertambah 3 kali banyak, harga pun mesti tambah 3 kali banyak.

Petikan HK44 menunjukkan bahawa Danish membuat hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran dengan melibatkan operasi pendaraban bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui. Beliau mengenal pasti hubung kait antara dua kuantiti yang sepadan dalam kedua-dua nisbah dengan menganggap bilangan belon dalam nisbah kedua adalah "3 kali banyak" berbanding bilangan belon dalam nisbah yang asal. Beliau kemudian mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi ruang ukuran, iaitu mendarab harga belon dengan 3 bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Danish menggunakan kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara skala pembesaran.

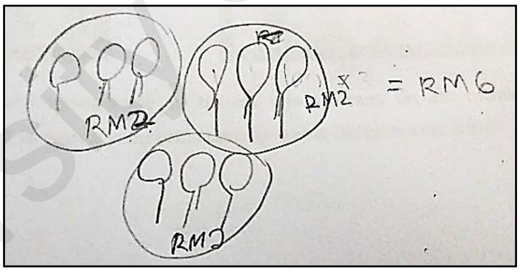
Sofia. Dalam mengubung kaitkan kuantiti, Sofia menggunakan cara penyelesaian yang dikategorikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran yang ditunjukkan dalam dua bentuk penyelesaian. Petikan HK45 memaparkan respons Sofia.

Petikan HK45

S: Kalau RM 1 (mencongak). Tak boleh.
P: Apa yang kamu kira dan apa yang tak boleh?
S: Saya cuba cari RM 1 dapat berapa belon. Kalau 3 bahagi 2 dapat 1½. Mana ada orang jual setengah belon (ketawa).
P: Ada cara lain kamu nak tunjukkan?
S: Saya cuba cari harga satu belon pula.

P: Boleh kamu tunjukkan?
S: 2 kalau bahagi 3 (mencongak). Oo tak boleh la, nanti dapat baki.
P: Kenapa dengan baki?
S: Tak boleh nak dapat harga satu belon, jadi tak boleh nak darab 9. Saya tak suka darab Saya nak buat cara lain.

Dalam Petikan HK45, tindakan Sofia mencari berapa bilangan belon yang boleh dibeli menggunakan RM1 dan menentukan harga bagi satu belon menggambarkan beliau cuba menghubung kaitkan dua kuantiti dalam nisbah yang sama, iaitu membahagikan bilangan belon dengan harga belon. Ini menunjukkan Sofia cuba menyelesaikan tugasan dengan membuat hubung kait antara dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari. Namun beliau tidak meneruskan penyelesaian secara unitari kerana menganggap pembahagian yang melibatkan baki adalah sesuatu yang menyukarkan dan tidak boleh digunakan untuk menentukan harga bagi 9 belon. Sofia kemudiannya beralih kepada satu lagi cara penyelesaian dengan mengemukakan gambarajah seperti dalam Rajah 4.31.



Rajah 4.31. Langkah kerja Sofia bagi tugasan Belon

Berdasarkan Rajah 4.31, Sofia melukis tiga kumpulan bertiga belon yang dilabelnya RM 2. Petikan HK46 memaparkan penjelasan lanjut beliau tentang rajah tersebut.

Petikan HK46

P: Boleh kamu terangkan?
S: Ada 3 kumpulan. Satu kumpulan RM 2. Jadi RM 2 tambah RM 2 tambah RM 2 dapat RM 6.
P: Mengapa kamu tambah begitu?
S: Sebab dalam soalan nak 9 belon. Tambah 3, 3, 3 jadilah 9 belon. Jadi RM 2 pun kena tambah 3 kali.

Dalam Petikan HK46, Sofia menghubungkan bilangan belon dalam nisbah asal dengan bilangan belon dalam nisbah kedua dengan melakukan operasi menambah berulang kali bagi menentukan harga bagi 9 belon. Beliau mengulangi menambah 3 belon dan berhenti apabila mencapai bilangan belon yang disasarkan, iaitu 9 belon. Sofia kemudiannya membuat penambahan berulang bagi RM 2 sebanyak tiga kali secara lisan bagi memperoleh kuantiti yang dikehendaki. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Sofia membuat hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran secara penambahan berulang.

Kesimpulan. Lima daripada tujuh peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Herman Sofia, dan Fikri menggunakan lebih daripada satu kategori dalam menghubung kaitkan kuantiti melibatkan konteks masalah kadar bagi struktur nombor bulat dan nombor bulat. Misalnya, Sofia dan Fikri menggunakan hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara penambahan berulang. Danish dan Mona hanya menggunakan satu kategori, iaitu hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara skala pembesaran.

Konteks masalah nisbah. Dalam hubung kait antara kuantiti melibatkan konteks masalah nisbah, dua struktur hubungan nombor yang terlibat, iaitu bukan nombor bulat dan nombor bulat dan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Tiga kategori dikenal pasti tentang cara peserta kajian membuat hubung kait antara kuantiti, iaitu hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, dan tiada hubung kait antara kuantiti. Setiap kategori terdiri daripada satu atau lebih daripada satu subkategori yang diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan. Kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran terdiri daripada dua subategori, iaitu unitari dan permudahkan nisbah. Manakala kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran juga mempunyai dua subkategori, iaitu penambahan berulang dan permudahkan nisbah. Kategori tiada hubung kait antara kuantiti pula hanya mempunyai satu subkategori, iaitu perbezaan kuantiti. Penerangan kategori dan subkategori tesebut adalah seperti berikut:

i. *Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran*. Peserta kajian menghubung kaitkan dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran dalam satu nisbah sama ada menggunakan kaedah unitari atau permudahkan nisbah.

    - *Unitari*. Peserta kajian menentukan kuantiti yang ingin diketahui membabitkan dua langkah algoritma, iaitu mencari nilai bagi satu unit dahulu dengan membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
    - *Permudahkan nisbah*. Peserta kajian meringkaskan nisbah sama ada kepada sebutan terendah atau nisbah setara dengan melakukan operasi bahagi atau menggunakan kaedah pemansuhan terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah. Satu kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan kemudiannya dihubung kaitkan kepada satu lagi kuantiti dalam nisbah yang sama secara pendaraban atau pembahagian. Hubungan pendaraban atau pembahagian tersebut diaplikasikan terhadap nisbah lain bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

ii. *Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran*. Peserta kajian menghubung kaitkan dua kuantiti yang sama ruang ukuran sama ada secara penambahan berulang atau permudahkan nisbah.

    - *Penambahan berulang*. Peserta kajian menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan mengkoordinasi nisbah asal secara menaik dengan melakukan pengulangan penambahan kedua-dua kuantiti secara serentak dan berhenti apabila mencapai kuantiti yang disasarkan.

- *Permudahkan nisbah.* Peserta kajian meringkaskan nisbah sama ada kepada sebutan terendah atau nisbah setara dengan melakukan operasi bahagi atau menggunakan kaedah pemansuhan terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah. Satu kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan kemudiannya dihubung kaitkan kepada satu kuantiti yang sepadan dalam nisbah yang lain secara pendaraban atau pembahagian. Hubungan pendaraban atau pembahagian tersebut diaplikasikan terhadap satu lagi kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

iii. *Tiada hubung kait antara kuantiti*. Peserta kajian tidak dapat membuat hubung kait antara mana-mana dua daripada empat kuantiti sama ada kuantiti berbeza ruang ukuran atau kuantiti sama ruang ukuran. Peserta kajian menyelesaikan tugasan dengan mencari perbezaan kuantiti.

- *Perbezaan kuantiti*. Peserta kajian melakukan operasi tolak antara dua kuantiti, sama ada kuantiti berbeza ruang ukuran atau kuantiti sama ukuran dan menggunakan hasil tolak tersebut untuk ditolak atau ditambah dengan satu lagi kuantiti bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

Struktur bukan nombor bulat-nombor bulat. Jadual 4.15 merumuskan cara peserta kajian membuat hubung kait antara dua kuantiti berdasarkan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, dan tiada hubung kait antara kuantiti semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah nisbah dan struktur bukan nombor bulat dan nombor bulat.

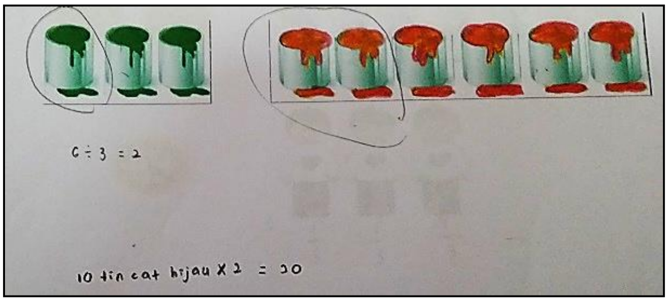
Jadual 4.15

Kategori hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan nombor bulat

Kategori Hubungan	Subkategori hubungan	Peserta kajian
Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran	a. Unitari	Lili, Mona, Sofia, Danish
	b. Permudahkan nisbah	Fikri
Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran	a. Penambahan berulang	Sofia, Danish, Herman
	b. Permudahkan nisbah	Fikri
Tiada hubung kait antara kuantiti	a. Perbezaan kuantiti	Wani

Berdasarkan Jadual 4.15, empat dan seorang peserta kajian masing-masing menggunakan subkategori hubungan secara unitari dan permudahkan nisbah yang diklasifikasikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran. Manakala bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, tiga dan seorang peserta kajian masing-masing menggunakan subkategori secara penambahan berulang dan permudahkan nisbah. Dalam kategori tiada hubung kait antara kuantiti pula, hanya seorang peserta kajian yang menggunakannya. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Lili, Fikri, Sofia, dan Wani yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Lili. Dalam membuat hubung kait antara kuantiti, Lili mengemukakan satu bentuk penyelesaian, iaitu hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari. Dalam penyelesaiannya, Lili memulakan langkah kerja seperti dalam Rajah 4.32.



Rajah 4.32. Langkah kerja Lili bagi tugasan Cat

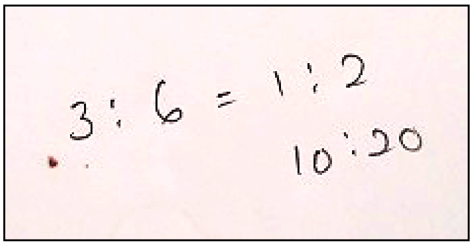
Berdasarkan langkah kerja dalam Rajah 4.32, Lili menulis ayat matematik “6 ÷ 3 = 2” dan kemudiannya membulatkan satu tin cat hijau dan 2 tin cat merah. Beliau turut menulis “10 tin cat hijau x 2 = 20”. Petikan HK47 memaparkan penjelasan Lili tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan HK47

P: Boleh terangkan apa yang kamu buat?
S: Saya bahagi tin cat merah dengan tin cat hijau, dapat 2 (menunjuk “6 ÷ 3 = 2”)
P: Mengapa kamu bahagi?
S: Untuk tahu satu tin cat hijau guna berapa tin cat merah.
P: Apa maksud “2” ini (menunjuk hasil bahagi)?
S: Maksudnya satu tin cat hijau perlu guna 2 tin cat merah macam saya bulatkan ini (menunjuk bulatan yang dilukis).
P: Selepas itu apa yang kamu buat?
S: Kemudian saya darabkan 10 tin cat hijau dengan 2 dapat 20 (menunjuk ayat matematik “10 tin cat hijau x 2 = 20” yang ditulis).
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Sebab saya tahu 1 tin cat hijau guna 2 tin cat merah. Kalau 10 tin cat hijau, darab saja dengan 2.

Dalam Petikan HK47, tingkah laku Lili mencadangkan bahawa beliau membuat hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, iaitu menghubungkan antara bilangan tin cat hijau dan bilangan tin cat merah. Beliau membahagikan kuantiti dalam nisbah asal, iaitu membahagi 6 dengan 3 bagi menentukan bilangan tin cat merah yang diperlukan bagi setiap tin cat hijau. Seterusnya, beliau menggunakan hasil bahagi “2” untuk didarab dengan 10 tin cat hijau dalam nisbah kedua bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui, iaitu 20 tin cat merah. Tindakan Lili ini menggambarkan beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui berdasarkan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari.

Fikri. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Fikri dikategorikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran. Penyelesaian Fikri secara bertulis adalah seperti dalam Rajah 4.33.



Rajah 4.33: Langkah kerja Fikri bagi tugasan Cat

Dalam Rajah 4.33, Fikri menggunakan nisbah asal, 3 kepada 6 dan kemudian meringkaskannya kepada nisbah 1 kepada 2 sebelum menulis “10 : 20”. Petikan HK48 memaparkan penjelasan lanjut beliau tentang rajah tersebut.

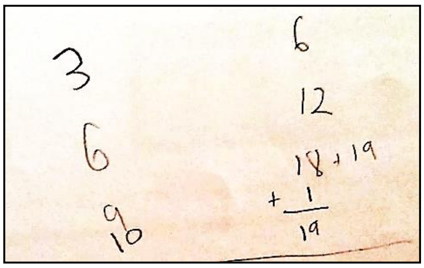
Petikan HK48

P: Boleh kamu terangkan?
S: Dalam soalan ini diberi nisbah cat hijau kepada cat merah untuk Rita (menunjuk 3 : 6). Saya ringkaskan jadi satu nisbah dua (menunjuk 1 : 2).
P: Bagaimana kamu ringkaskan?
S: Bahagi 3 dua-dua ini (menunjuk 3 : 6).
P: Mengapa kamu ringkaskan?
S: Sebab soalan nak 10 tin cat hijau. Saya tak boleh buat 3 jadikan 10. Kalau saya ringkaskan, 3 dah jadi 1, baru boleh cari 10 tin cat merah.
P: Oo begitu. Apa yang kamu faham dengan “1 : 2”?
S: Setiap satu tin cat hijau memerlukan 2 tin cat merah.
P: Kemudian apa yang kamu buat?
S: Saya akan ikut 1 : 2, 10 nisbah 20. Jadi 20 tin cat merah Shasha perlukan untuk campur dengan 10 tin cat hijau.
P: Bagaimana kamu dapat 10 : 20, saya tak nampak pun kamu kira?
S: Oo… 20 dua kali ganda 10.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Sebab ikut nisbah 1: 2, 2 adalah dua kali ganda 1. (Diam lama).Boleh juga kalau nak buat 1 darab 10 (memadankan nombor 1 kepada 10 dengan menunjuk dengan jari) 2 darab10 (memadankan nombor 2 kepada 20 dengan menunjuk dengan jari), dapat juga 20.

Berdasarkan Petikan HK48, Fikri meringkaskan nisbah asal cat hijau kepada cat merah, iaitu nisbah 3 kepada 6 menjadi nisbah 1 kepada 2 dengan membahagi kedua-dua nombor dengan 3 secara mencongak. Beliau mentafsirkan makna nisbah yang diringkaskan sebagai bagi setiap satu tin cat hijau memerlukan dua tin cat merah. Fikri mengenal pasti hubungan antara dua kuantiti dalam nisbah 1 kepada 2 dengan menyatakan “2 adalah dua kali ganda 1” sebelum mengaplikasikan hubungan tersebut terhadap kuantiti yang sepadan dalam nisbah kedua, iaitu menggandakan 10 menjadi 20 secara mencongak. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Fikri menghubung kaitkan dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara permudahkan nisbah dengan membabitkan dua langkah, iaitu meringkaskan nisbah dan kemudiannya melakukan penggandaan kuantiti.

Selain itu, Fikri juga sedar terdapat satu lagi hubungan antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah, iaitu hubungan antara 1 dan 10 secara pendaraban. Beliau mendarab kedua-dua kuantiti dalam nisbah 1 kepada 2 dengan 10 bagi menghasilkan nisbah 10 kepada 20. Tindakan Fikri mendarab 1 dengan 10 dan 2 dengan 10 menggambarkan bahawa beliau menghubung kaitkan dua kuantiti yang sama ruang ukuran, iaitu menghubungkan bilangan tin cat hijau dalam nisbah yang diringkaskan kepada bilangan tin cat hijau dalam nisbah kedua. Ini mencadangkan bahawa beliau menggunakan kategori hubung kait antara dua kuantiti sama ruang ukuran secara permudahkan nisbah.

Sofia. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Sofia dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran. Beliau mengemukakan dua bentuk penyelesaian yang berbeza. Dalam penyelesaian pertama, beliau menulis pasangan nombor seperti dalam Rajah 4.34.



Rajah 4.34. Langkah kerja (1) Sofia bagi tugasan Cat

Berdasarkan Rajah 4.34, Sofia membina pasangan nombor dengan menulisnya secara selari dalam dua lajur. Petikan HK49 memaparkan penjelasan lanjut beliau tentang rajah tersebut.

Petikan HK49

P: Boleh kamu terangkan?
S: 3 hijau akan guna 6 merah, 6 guna 12, kalau 9 guna 18 tin merah.
P: Bagaimana kamu dapat 3, 6, 9 (menunjuk lajur di sebelah kiri)?
S: Tambah 3 sebelah sini (menunjuk lajur di sebelah kiri) dan tambah 6 sini (menunjuk lajur di sebelah kanan).
P: Mengapa kamu tambah 3 dan 6?
S: Sebab soalan dah beri 3 tin hijau guna 6 tin cat merah.
P: Ini apa pula (menunjuk 10 dan 19)?
S: Saya tambah 3 sampai sini (menunjuk 9) saja, sebelah sini (menunjuk lajur kanan) saya tambah sampai 18. Selepas itu saya tambah satu sini (menunjuk 9) untuk jadikan 10. Saya tambah satu juga di sini (menunjuk 18) untuk dapat 19.
P: Mengapa kamu tambah satu?
S: Oo, sebab kalau saya tambah 3 lagi jadi 12, lebih pula, saya nak 10 saja. Jadi tambah satu pada dua-dua belah. Maknanya Shasha kena guna 19 tin cat merah untuk 10 cat hijau.

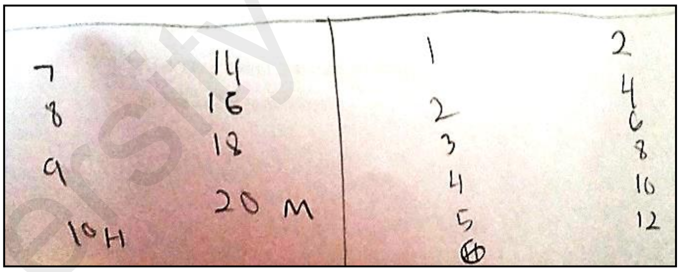
Petikan HK49 menunjukkan Sofia menggunakan kuantiti nisbah asal, iaitu 3 tin cat hijau kepada 6 tin cat merah untuk membina nisbah lain dengan menambah 3 dan 6 secara berulang, masing-masing di sebelah lajur kiri dan kanan sehingga mencapai 9 tin cat hijau dan 18 tin cat merah. Beliau berhenti menambah kerana sedar hasil tambah seterusnya akan melebihi kuantiti yang disasarkan, iaitu 10 tin cat hijau. Sofia kemudian hanya menambah 1 kepada 9 tin cat hijau, iaitu bilangan yang secukupnya untuk memperoleh kuantiti yang disasarkan. Beliau turut melakukan langkah yang sama dengan menambah 1 kepada 18 tin cat merah. Sofia menyelesaikan tugasan dengan mengenal pasti hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara pertambahan berulang, iaitu mengkoordinasi dua kuantiti dalam nisbah asal secara serentak dengan membuat penambahan berulang. Tingkah laku beliau dikategorikan sebagai hubung kait antara dua kuantiti sama ruang ukuran secara pertambahan berulang.

Dalam cara penyelesaian kedua, Sofia membuat hubung kait antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran dengan menggunakan kaedah unitari. Petikan HK50 memaparkan tingkah laku Sofia.

Petikan HK50

P:	Ada tak cara lain yang kamu terfikir?
S:	(Diam lama dan memadankan 1 tin cat hijau kepada 2 tin cat merah Rita dengan melukis anak panah). Satu tin cat hijau mesti guna 2 tin cat merah (menunjuk tin hijau yang dipandankan kepada tin merah).
P:	Bagaimana kamu tahu?
S:	6 (menunjuk tin cat merah Rita) bahagi dengan 3 (menunjuk tin cat hijau Rita) dapat 2.
P:	Apa maksud 2?
S:	Dua tin cat merah. Maksudnya setiap satu tin cat hijau guna 2 tin cat merah.
P:	Seterusnya apa yang kamu nak buat?
S:	Kena tulis nak cari 10 tin.
P:	Boleh kamu tunjukkan?

Dalam Petikan HK50, Sofia menggunakan nisbah asal 3 kepada 6 bagi mengenal pasti hubungan "setiap satu" antara dua kuantiti dalam nisbah tersebut, iaitu bilangan tin cat hijau dan bilangan tin cat merah Rita secara pembahagian. Tingkah laku ini mencadangkan beliau membuat hubung kait antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran secara unitari. Rajah 4.35 menunjukkan langkah kerja Sofia selanjutnya selepas mengetahui hubungan antara dua kuantiti.



Rajah 4.35. Langkah kerja (2) Sofia bagi tugasan Cat

Berdasarkan Rajah 4.35, Sofia membina pasangan nombor dalam dua lajur bermula dengan "1 – 2" hingga "10 – 20". Petikan HK51 memaparkan penjelasan lanjut beliau tentang langkah kerja yang dibuat.

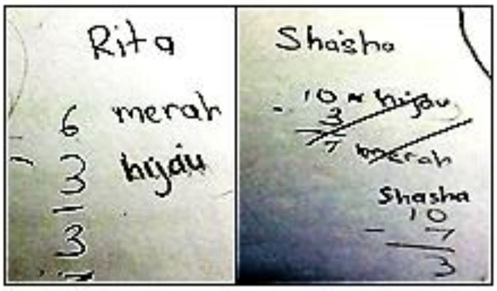
Petikan HK51

S:	Eh (terkejut). Lain dari tadi. Kalau guna cara ini Shasha guna 20 tin cat merah untuk 10 tin cat hijau.
P:	Apa maksud kamu?
S:	Cara mula-mula tadi saya dapat 19 cat merah Shasha, sekarang 20 pula.
P:	Boleh jelaskan apa yang kamu buat ini?
S:	Sebelah sini (menunjuk lajur di sebelah kiri) cat hijau, sebelah sini (menunjuk lajur di sebelah kiri) pula cat merah. Saya mulakan dengan yang saya bahagi tadi, 1 tin hijau, 2 tin merah. Saya buat sampai 10 hijau.

P: Bagaimana kamu bina pasangan nombor ini?
S: Saya tambah satu sebelah kiri dan tambah 2 sebelah kanan.
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Sebab kena ikut yang mula-mula, 1 hijau 2 merah. Jadi hijau kena tambah satu, merah saya tambah 2.
P: Jadi cara yang mana satu kamu rasa betul?
S: Mestilah ini (menunjuk cara kedua). Yang pertama itu salah.
P: Mengapa kamu kata salah?
S: Yang kedua ini nombor dia ikut turutan. Semua tambah satu dan 2. Yang tadi ada tambah 6 ada tambah 1.

Dalam Petikan HK51, Sofia menggunakan hubungan "1 tin hijau, 2 tin merah" untuk membina pasangan nombor "1 – 2", "2 – 4", "3 – 6"…"10 – 20" bagi menentukan kuantiti yang dikehendaki dalam nisbah kedua dengan mengkoordinasi pasangan nombor tersebut secara pengulangan penambahan seperti dalam Rajah 4.35. Beliau menambah 1 dan 2 secara berulang masing-masing bagi nombor di sebelah kanan dan kiri sebelum membuat kesimpulan 20 tin cat merah yang diperlukan bagi 10 tin cat hijau Shasha. Apabila membandingkan jawapan dalam kedua-dua cara penyelesaian, Sofia menyatakan langkah penyelesaian pertama adalah tidak betul dengan memberi alasan bahawa penambahan berulang yang dilakukan adalah tidak konsisten, yang mana ada nombor yang ditambah 6 dan ada yang ditambah 1. Sebaliknya, cara penyelesaian kedua dianggap betul kerana menambah nombor yang sama secara berulang. Tingkah laku yang ditunjukkan dalam penyelesaian kedua menggambarkan bahawa Sofia menghubung kaitkan dua kuantiti yang sama ruang ukuran, iaitu menghubung kaitkan satu kuantiti dalam nisbah pertama kepada satu kuantiti yang sepadan dalam nisbah kedua secara penambahan berulang.

Wani. Hubung kait yang digunakan oleh Wani dalam menyelesaikan tugasan melibatkan struktur bukan nombor bulat dan nombor bulat dikategorikan sebagai tiada hubung kait antara kuantiti. Beliau memulakan penyelesaian dengan membaca tugasan berulang kali sebelum menulis langkah pengiraan seperti dalam Rajah 4.36.



Rajah 4.36: Langkah kerja Wani bagi tugasan Cat

Berdasarkan Rajah 4.36, Wani melakukan operasi penolakan antara dua warna cat yang berlainan. Petikan HK52 memaparkan penjelasan dan justifikasi beliau tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan HK52

P: Apa yang kamu kira ini (mununjuk jalan kerja yang dibuat)?
S: Kalau kita cari beza dua warna cat Rita, 6 tolak 3 dapat 3 kan (menunjuk “6 – 3 = 3” dalam bentuk lazim). Kalau 10 tolak 3 dapat 7, yang ini (tunjuk langkah kerja yang dibatalkan dengan garisan) betul sebenarnya. Jadi 7 tin cat merah yang diperlukan Shasha untuk sama warna dengan Rita.
P: Saya masih kurang faham, mengapa kamu tolak?
S: Sebab nak tengok beza antara tin cat hijau dan cat merah Rita.
P: Apa maksud hasil tolak “3” itu?
S: 3 itu beza antara tin dua warna. Maksud saya, nanti saya akan guna 3 ini (menunjuk hasil tolak cat Rita) untuk cari bilangan tin cat merah Shasha. Kalau Rita beza dia 3, Shasha pun mesti 3, baru warna sama.
P: Ini apa pula (menunjuk “10 – 7 = 3” dalam bentuk lazim)?
S: Itu nak tunjukkan beza cat Shasha dapat 3 juga. Nak *confirm* (pastikan) saja.
P: Mungkin ada cara lain yang kamu nak tunjukkan.
S: (Menggeleng).

Dalam Petikan HK52, Wani melakukan penolakan antara bilangan tin cat merah dan bilangan tin cat hijau Rita dalam bentuk lazim dan memperoleh 3 sebagai hasil tolak. Beliau kemudian menggunakan hasil tolak tersebut untuk ditolak pula dengan 10 tin cat hijau Shasha dan menghasilkan 7 yang dianggapnya bilangan tin cat merah Shasha yang diperlukan untuk mendapatkan warna cat yang sama warna dengan Rita”. Beliau sekali lagi melakukan penolakan “10 -7 = 3” bagi memastikan beza bilangan tin cat warna merah dan tin cat hijau Shasha adalah sama dengan Rita. Tingkah laku yang ditunjukkan menggambarkan bahawa Wani tidak dapat membuat hubung kait antara dua kuantiti sama ada kuantiti dalam nisbah asal mahupun kuantiti yang sepadan antara dua nisbah. Beliau hanya menggunakan perbezaan dua kuantiti dalam nisbah asal, yang mana beza kedua-dua kuantiti tersebut tidak menunjukkan sebarang hubung kait atau tidak memberi sebarang makna berkaitan hubung kait dua kuantiti.

Kesimpulan. Hanya tiga peserta kajian, iaitu Danish, Sofia, dan Fikri menggunakan lebih daripada satu kategori dalam menghubung kaitkan kuantiti melibatkan struktur nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat. Sebagai contoh, Sofia menggunakan kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara penambahan berulang dan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari. Empat daripada peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Herman, dan Mona hanya menggunakan satu kategori, iaitu sama ada kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, atau kategori tiada hubung kait antara kuantiti.

Struktur bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Hubung kait antara dua kuantiti bagi konteks masalah nisbah yang membabitkan struktur bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat yang digunakan oleh peserta kajian dikategorikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, dan tiada hubung kait antara kuantiti. Jadual 4.16 menunjukkan rumusan peserta kajian berdasarkan kategori tersebut.

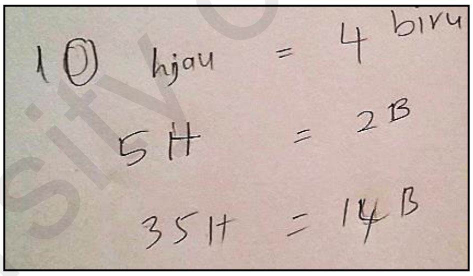
Jadual 4.16

Kategori hubung kait antara kuantiti dalam konteks nisbah bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat

Kategori Hubungan	Subkategori hubungan	Peserta kajian
Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran	a. Unitari	Danish
Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran	a. Penambahan berulang	Sofia
	b. Permudahkan nisbah	Danish, Herman Mona, Fikri
Tiada hubung kait antara kuantiti	a. Perbezaan kuantiti	Wani, Lili

Berdasarkan Jadual 4.16, hanya seorang peserta kajian menggunakan subkategori hubungan secara unitari yang diklasifikasikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran. Manakala bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, seorang dan empat peserta kajian masing-maing menggunakan subkategori secara penambahan berulang dan permudahkan nisbah. Dalam kategori tiada hubung kait antara kuantiti pula, hanya dua peserta kajian yang menggunakannya. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Danish, Sofia, dan Lili yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Danish. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Danish dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran masing-masing secara permudahkan nisbah dan unitari. Penyelesaian pertama beliau secara bertulis adalah seperti dalam Rajah 4.37.



Rajah 4.37. Langkah kerja (1) Danish bagi tugasan Warna

Dalam Rajah 4.37, Danish menulis “10 hijau = 4 biru”, “5H = 2B” dan kemudiannya menulis “35H = 14B” yang mana “H” dan “B” mewakili masing-masing warna hijau dan biru. Petikan HK53 memaparkan tingkah laku Danish tentang penerangan jalan kerja yang ditulis.

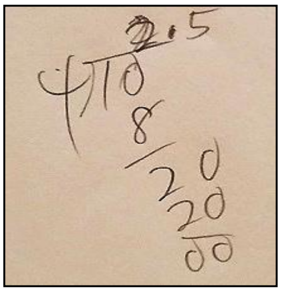
Petikan HK53

P: Boleh jelaskan apa yang kamu tulis tadi?
S: 10 sudu hijau guna 4 sudu biru. Kalau separuh daripada 4 biru ialah 2 dan yang ini (menunjuk 10 H) akan jadi 5 hijau.
P: Bagaimana kamu “separuhkan”?
S: Oo, saya bahagi 2 saja.
P: Kenapa pula kamu “separuhkan”?

S: Sebab kalau saya guna 10 (menunjuk 10 hijau), saya tak akan boleh gandakan untuk dapat 35. Kalau kecilkan jadi separuh, baru boleh cari untuk 35 sudu hijau.
P: Apa maksud kamu "gandakan"?
S: 10, 20, 30, terus ke 40. Tak ada 35.
P: Bagaimana pula kamu dapat ini (menunjuk 35H = 14 B)?
S: 5 saya darab 7 dapat 35 hijau (menunjuk 35H). Sebelah sini (menunjuk 2B) pun saya darab sama, dapatlah 14 sudu biru. 35 hijau akan guna 14 biru.

Dalam Petikan HK53, Danish mengecilkan kuantiti dalam nisbah asal, iaitu 10 kepada 4 menjadi 5 kepada 2 dengan membahagi kedua-dua nombor tersebut dengan 2. Beliau turut memberi justifikasi mengapa kuantiti asal tersebut perlu dikecilkan. Menurut Danish nombor 35 tidak terdapat dalam gandaan 10, sebaliknya ia merupakan gandaan 5. Beliau seterusnya mendarab kedua-dua 5 dan 2 dengan 7 menghasilkan masing-masing 35 sudu warna hijau dan 14 sudu warna biru. Tingkah laku yang ditunjukkan Danish mencadangkan bahawa beliau mengenal pasti hubungan antara satu kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan dengan satu kuantiti yang sepadan dalam satu lagi nisbah secara pendaraban. Beliau kemudian mengaplikasikan hubungan pendaraban tersebut kepada satu lagi ruang ukuran, bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Ini menunjukkan beliau membuat hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran secara permudahkan nisbah.

Danish turut mengemukakan satu lagi bentuk penyelesaian bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Rajah 4.38 menunjukkan langkah kerja yang dibuatnya.



Rajah 4.38. Langkah kerja (2) Danish bagi tugasan Warna Lukisan

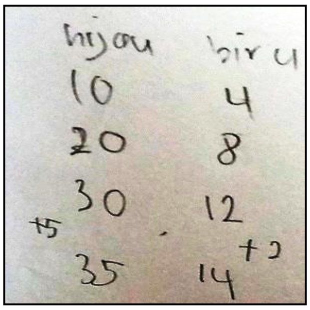
Berdasarkan Rajah 4.38, Danish membahagikan 10 dengan 4 secara pembahagian panjang dan menghasilkan 2.5 sebagai hasil bahagi. Petikan HK54 memaparkan respons beliau dalam menjelaskan langkah kerja yang dibuat.

Petikan HK54

P: Boleh jelaskan jalan kerja yang kamu buat?
S: Sebenarnya saya tak suka cara ini. Kalau 10 bahagi 4 mesti dapat nombor perpuluhan punya. Macam ini (menunjuk 2.5).
P: Mengapa kamu bahagi?
S: Oo, saya nak tahu setiap sudu biru guna berapa sudu hijau.
P: Apa ini (menunjuk 2.5)?
S: (Teragak-agak menjawab). “Dua perpuluhan lima” maksudnya satu sudu biru guna 2.5 sudu hijau rasanya.
P: Selepas itu kamu buat apa?
S: Alaa…ini susahlah. Kalau nak tahu 35 sudu hijau guna berapa sudu biru, saya kena darab 2.5 dengan 35. Lecehlah nak darab nombor perpuluhan.
P: Boleh kamu tunjukkan?
S: (Menggeleng kepala dan nampak keberatan). Saya tak pandai sangat darab perpuluhan.
P: Ok tak apa.

Dalam Petikan HK54, tingkah laku Danish menggambarkan bahawa beliau membuat hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, iaitu menghubung kaitkan antara bilangan sudu warna hijau dan bilangan sudu warna biru. Beliau menggunakan nisbah asal, iaitu 10 kepada 4 dan melakukan operasi bahagi secara pembahagian panjang. Pernyataan “sudu biru guna 2.5 sudu hijau” menunjukkan bahawa Danish menganggap hasil bahagi sebagai hubungan per satu sebelum menyatakan hasil bahagi tersebut perlu didarab dengan 35 bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Ketika diminta menunjukkan cara mendarab, Danish menggelengkan kepala dan nampak keberatan untuk menunjukkannya dengan alasan tidak mahir melakukan operasi darab melibatkan nombor perpuluhan. Walaupun Danish hanya menunjukkan satu langkah, iaitu langkah pembahagian, tetapi beliau tahu bahawa hasil bahagi yang diperoleh perlu didarab dengan 35. Tingkah laku Danish ini menggambarkan beliau menentukan kuantiti yang ingin diketahui dengan menggunakan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara kaedah unitari.

Sofia. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Sofia dikategorikan kepada kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secara penambahan berulang. Beliau mengemukakan penyelesaian dengan menulis pasangan nombor seperti dalam Rajah 4.39.



Rajah 4.39. Langkah kerja Sofia bagi tugasan Warna Lukisan

Berdasarkan Rajah 4.39, Sofia membina pasangan nombor dengan menulisnya secara selari dalam dua lajur. Petikan HK55 memaparkan penjelasan lanjut beliau tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan HK55

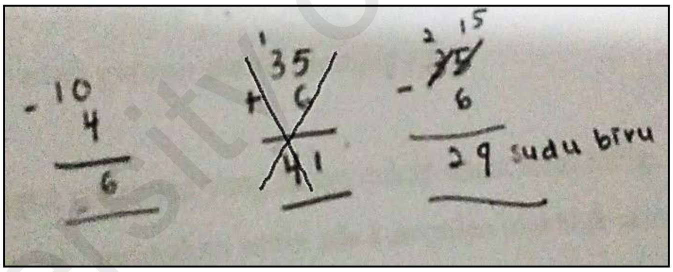
P: Boleh kamu jelaskan dengan lebih lanjut apa yang kamu tulis?
S: Mula-mula saya tulis hijau dan biru macam ini (menunjuk label "hijau" dan "biru"). Saya tahu 10 hijau akan guna 4 biru, jadi saya tulis macam ini (menunjuk 10 dan 4). Selepas itu saya tambah 10 sini (menunjuk nombor di sebelah lajur kiri), dan tambah 4 di sini (menunjuk nombor di sebelah lajur kanan).
P: Yang ini (menunjuk "+5" dan "+2) apa pula"?
S: Oo itu, sebab soalan nak 35, jadi saya hanya tambah 5 saja, bukan 10. Nombor 12 ini saya hanya tambah 2, bukan 4.
P: Kenapa tambah 5 dan 2 sahaja?
S: Sebab kalau saya tambah 10 dan 5 akan dapat 40 dan 16, saya tak guna pun sebab saya nak 35. Jadi saya tambah separuh dari 10 dan 4. Maksudnya 35 sudu hijau akan guna 14 sudu biru.

Petikan HK55 menunjukkan Sofia menggunakan kuantiti nisbah asal, iaitu 10 kepada 4 untuk membina nisbah lain secara menambah 10 dan 4 secara berulang, masing-masing di sebelah lajur kiri dan kanan sehingga mencapai 30 sudu warna hijau dan 12 sudu warna biru. Sofia kemudiannya menyatakan, oleh kerana soalan tugasan mengkehendaki 35 sudu warna hijau, maka beliau menambah 5 kepada 30 dalam pasangan nombor "30 – 12" bagi mendapatkan 35. Selanjutnya, beliau menambah pula 2 kepada 12 dalam pasangan nombor yang sama dan menghasilkan pasangan nombor "35 dan 14". Menurut Sofia, beliau hanya menambah separuh daripada nombor 10 dan

4, iaitu 5 dan 2 kerana sedar bahawa jika beliau menambah 10 dan 5 kepada pasangan nombor “30 – 12”, hasilnya akan menjadi 40 dan 16 yang dianggapnya tidak memberi sebarang manfaat kepadanya. Beliau seterusnya merumuskan bahawa 35 sudu warna hijau akan menggunakan 14 sudu warna biru.

Tingkah laku Sofia dalam menyelesaikan tugasan dikategorikan sebagai hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, iaitu mengkoordinasi dua kuantiti dalam nisbah asal secara serentak dengan membuat penambahan berulang sehingga mencapai kuantiti yang dikehendaki.

Lili. Hubung kait yang digunakan oleh Lili dalam menyelesaikan tugasan melibatkan struktur bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat dikategorikan sebagai tiada hubung kait antara kuantiti. Beliau memulakan penyelesaian dengan menulis langkah pengiraan seperti ditunjukkan dalam Rajah 4.40.



Rajah 4.40. Langkah kerja Lili bagi tugasan Warna

Berdasarkan Rajah 4.40, Lili melakukan operasi penolakan antara bilangan sudu dua warna lukisan yang berlainan. Petikan HK56 memaparkan penjelasan dan justifikasi beliau tentang rajah tersebut.

Petikan HK56

P: Boleh kamu terangkan?
S: 10 tolak dengan 4, dapat 6. Selepas itu saya tolak 35 dengan 6 dapat 29.
P: Boleh kamu jelaskan mengapa kamu tolak?
S: Kita kena tahu beza sudu hijau dan biru ini (menunjuk 10 dan 4) dulu.
P: Apa maksud 6 (menunjuk hasil tolak 10 dan 4) yang kamu dapat ini?
S: Beza bilangan sudu dua-dua warna mesti 6.
P: Boleh kamu terangkan sekali lagi sebab saya kurang faham?
S: 35 sudu warna hijau perlukan 29 sudu warna biru sebab 10 sudu warna hijau guna 4 sudu warna biru.
P: Macam mana kamu tahu 35 sudu warna hijau perlukan 29 sudu warna biru?

S: Kalau tolak kedua-dua warna kita akan dapat beza sama, 6. Sebab itu warna kedua-duanya sama.

Dalam Petikan HK56, Lili menentukan beza bilangan sudu warna hijau dan bilangan warna biru bagi bancuhan pertama warna sebelum menggunakan hasil beza tersebut, iaitu 6 untuk ditolak dengan 35 menghasilkan 29. Beliau seterusnya menganggap bahawa 35 sudu warna hijau memerlukan 29 sudu warna biru. Tingkah laku yang ditunjukkan menggambarkan bahawa Lili tidak dapat membuat hubung kait antara dua kuantiti sama ada kuantiti dalam nisbah asal mahupun kuantiti yang sepadan antara dua nisbah. Beliau hanya menggunakan perbezaan dua kuantiti dalam nisbah asal, yang mana beza kedua-dua kuantiti tersebut tidak menunjukkan sebarang hubung kait atau tidak memberi sebarang makna berkaitan hubung kait dua kuantiti.

Kesimpulan. Hanya seorang peserta kajian, iaitu Danish menggunakan lebih daripada satu kategori dalam menghubung kaitkan kuantiti melibatkan struktur hubungan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Manakala Lili, Wani, Herman, Mona, Sofia, dan Fikri menggunakan sama ada kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran atau kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran.

Konteks masalah keserupaan. Dalam hubung kait antara kuantiti dalam konteks masalah keserupaan, dua struktur hubungan nombor yang terlibat, iaitu bukan nombor bulat dan nombor bulat dan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Tiga kategori dikenal pasti tentang cara peserta kajian membuat hubung kait antara kuantiti, iaitu hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, dan tiada hubung kait antara kuantiti. Setiap kategori terdiri daripada satu atau lebih daripada satu subkategori yang diperoleh berdasarkan langkah kerja yang ditunjukkan oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan. Kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran terdiri daripada dua subkategori, iaitu unitari dan skala pembesaran. Manakala bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran juga mempunyai dua subkategori, iaitu penambahan berulang dan permudahkan nisbah. Kategori tiada hubung kait antara kuantiti pula hanya mempunyai satu subkategori, iaitu perbezaan kuantiti. Penerangan kategori dan subkategori tesebut adalah seperti berikut:

i. *Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran*. Peserta kajian menghubung kaitkan dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran dalam satu nisbah sama ada secara unitari atau skala pembesaran.

   - *Unitari*. Peserta kajian menentukan kuantiti yang ingin diketahui membabitkan dua langkah algoritma, iaitu mencari nilai bagi satu unit dahulu dengan membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudian mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua.
   - *Skala pembesaran*. Peserta kajian mengenal pasti hubungan berapa skala pembesaran, “kali banyak”, “kali panjang”, atau “ kali ganda” antara dua kuantiti dalam nisbah asal secara pendaraban dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua bagi mengetahui kuantiti yang ingin diketahui.

ii. *Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran*. Peserta kajian menghubung kaitkan dua kuantiti yang sama ruang ukuran sama ada secara penambahan berulang atau permudahkan nisbah.

   - *Penambahan berulang*. Peserta kajian menentukan kuantiti yang ingin diketahui secara mengkoordinasi kuantiti dalam nisbah secara ururtan menaik dengan melakukan pengulangan penambahan kedua-dua kuantiti satu demi satu atau secara serentak dan berhenti apabila mencapai kuantiti yang disasarkan.

- *Permudahkan nisbah.* Peserta kajian meringkaskan nisbah sama ada kepada sebutan terendah atau nisbah setara dengan melakukan operasi bahagi atau menggunakan kaedah pemansuhan terhadap kedua-dua kuantiti dalam nisbah. Satu kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan kemudiannya dihubung kaitkan kepada satu kuantiti yang sepadan dalam nisbah yang lain secara pendaraban atau pembahagian. Hubungan pendaraban atau pembahagian tersebut diaplikasikan terhadap satu lagi kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

iii. *Tiada hubung kait antara kuantiti*. Peserta kajian tidak dapat membuat hubung kait antara mana-mana dua daripada empat kuantiti sama ada kuantiti berbeza ruang ukuran atau kuantiti sama ruang ukuran. Peserta kajian menyelesaikan tugasan secara mencari perbezaan kuantiti.

- *Perbezaan kuantiti*. Peserta kajian melakukan operasi tolak antara dua kuantiti, sama ada kuantiti berbeza ruang ukuran atau kuantiti sama ukuran dan menggunakan hasil tolak tersebut untuk ditolak atau ditambah dengan satu lagi kuantiti bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui.

Struktur bukan nombor bulat dan nombor bulat. Jadual 4.17 merumuskan cara peserta kajian membuat hubung kait antara dua kuantiti berdasarkan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, dan tiada hubung kait antara kuantiti semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah keserupaan bagi struktur bukan nombor bulat dan nombor bulat.

Jadual 4.17

Kategori hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan nombor bulat

Kategori Hubungan	Subkategori hubungan	Peserta kajian
Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran	a. Unitari	Herman
	b. Skala pembesaran	Fikri, Danish, Lili, Mona
Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran	a. Penambahan berulang	Sofia
	b. Permudahkan nisbah	Fikri
Tiada hubung kait antara kuantiti	a. Perbezaan kuantiti	Wani, Lili

Berdasarkan Jadual 4.17, hanya seorang dan empat peserta kajian masing-masing menggunakan subkategori hubungan secara unitari dan skala pembesaran yang diklasifikasikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran. Manakala bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, hanya seorang peserta kajian menggunakan setiap subkategori secara penambahan berulang dan permudahkan nisbah. Begitu juga dalam kategori tiada hubung kait antara kuantiti pula, hanya seorang peserta kajian yang menggunakannya. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Wani, Herman, Sofia, dan Fikri yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Wani. Semasa menyelesaikan tugasan melibatkan struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan nombor bulat, Wani membuat hubung kait yang dikategorikan sebagai tiada hubung kait antara kuantiti secara perbezaan kuantiti. Petikan HK57 memaparkan penjelasan dan justifikasi beliau tentang penyelesaian yang dibuat.

Petikan HK57

S: Kalau tolakkan 24 dengan 6 dapat (mencongak) 18.
P: Mengapa kamu perlu tolak?
S: Sebab nak tahu beza antara dua ini (menunjuk panjang dan lebar lukisan di sebelah kiri).
P: Kenapa pula nak tahu beza?
S: Kalau tahu beza untuk lukisan ini (menunjuk lukisan di sebelah kiri), kita boleh tahulah "h" ini.

P: Boleh kamu tunjukkan?

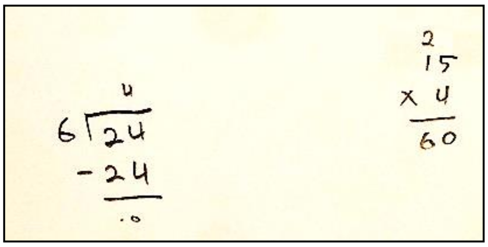
S: Sebab beza lukisan yang pertama ini 18, jadi beza ini (menunjuk panjang dan lebar lukisan di sebelah kanan) pun mesti 18. Tambahkan 18 dengan 15 dapat (mencongak seketika) 33. Maknanya "h" ialah 33.

P: Mengapa kamu kata "h" ialah 33?

S: “h” ialah 33, saya tolak 33 dengan 15 ini (menunjuk panjang dan lebar lukisan di sebelah kanan) dapat 18. Ini sama dengan 24 tolak 6 (menunjuk lukisan di sebelah kiri) dapat 18.

Dalam Petikan HK57, Wani memulakan dengan melakukan operasi penolakan antara panjang dan lebar lukisan di sebelah kiri, iaitu 24 dan 6 secara mencongak dan memperoleh 18 sebagai beza dua nombor tersebut. Beliau kemudian menggunakan hasil tolak tersebut untuk ditambah dengan lebar lukisan di sebelah kanan menghasilkan 33. Beliau seterusnya menganggap 33 sebagai nilai “h”. Wani mengatakan bahawa beza “6 dan ‘24’ dalam lukisan pertama mestilah sama dengan beza “h” dan “15” dalam lukisan kedua. Tindakan yang ditunjukkan menggambarkan Wani hanya bergantung kepada operasi penolakan bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui tanpa membuat hubung kait antara kuantiti dalam satu nisbah mahupun kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah.

Herman. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Herman dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara unitari. Beliau mengemukakan penyelesaian secara bertulis seperti ditunjuk dalam Rajah 4.41.



Rajah 4.41. Langkah kerja Herman bagi tugasan Lukisan

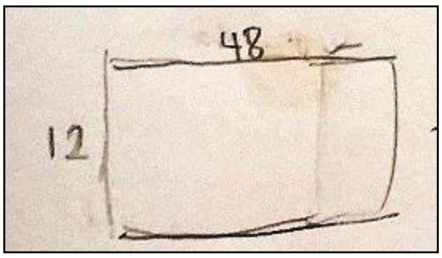
Berdasarkan langkah kerja dalam Rajah 4.41, Herman melakukan dua langkah pengiraan, iaitu operasi bahagi dan darab. Penerangan tentang langkah kerja yang dibuat dipaparkan dalam Petikan HK58.

Petikan HK58

S:	Saya bahagi 24 dengan 6 (menunjuk pembahagian panjang) dulu. Selepas saya bahagi, 4 (menunjuk hasil bahagi) ini saya darab dengan 15 dapat 60. Jadi “h” adalah 60.
P:	Boleh beritahu “4” ini apa?
S:	Hasil bahagi.
P:	Apa maksud hasil bahagi itu pada kamu?
S:	24 ialah 4 kali panjang dari 6.
P:	Oo begitu. Mengapa pula kamu darab 15 dengan 4?
S:	Nak cari “h”.
P:	Kenapa darab 4?
S:	Sebab “h” ini macam 24 juga 4 kali panjang dari 15.

Dalam Petikan HK58, Herman melakukan operasi bahagi dengan menggunakan kuantiti dalam nisbah asal melibatkan lebar dan panjang lukisan pertama, iaitu membahagikan 24 dengan 6. Beliau kemudiannya mendarab hasil bahagi dengan panjang lukisan kedua, iaitu 4 didarab dengan 15 menghasilkan 60 yang dianggapnya sebagai nilai “h”. Herman turut menjelaskan makna hasil bahagi yang diperoleh merujuk sebagai panjang lukisan pertama adalah “4 kali panjang” berbanding lebarnya. Beliau turut memberi alasan yang sama bagi lukisan kedua, yang mana panjangnya adalah 4 kali lebih panjang daripada 15, iaitu 60. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan Herman menghubung kaitkan dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran, iaitu panjang dan lebar lukisan secara unitari.

Sofia. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Sofia dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran dengan mengemukakan satu bentuk penyelesaian, iaitu secara penambahan berulang. Dalam penyelesaiannya, Sofia memulakan langkah kerja seperti ditunjuk dalam Rajah 4.42.



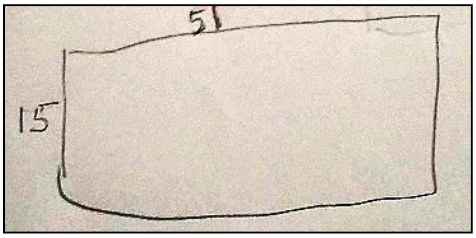
Rajah 4.42. Langkah kerja (1) Sofia bagi tugasan Lukisan

Berdasarkan Rajah 4.42, Sofia melukis satu segiempat berlabel 12 dan 48 mewakili masing-masing lebar dan panjang. Penerangan tentang langkah kerja yang dibuat dipaparkan dalam Petikan HK59.

Petikan HK59

P: Apa maksud segiempat ini?
S: Saya gandakan 2.
P: Apa maksud kamu "gandakan 2"?
S: Tambah 6 dan 12. Nanti lebar (menunujuk 6) jadi 12 dan panjang (menunjuk 12) jadi 48.
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Saya nak kena buat satu-satu dulu sampai dapat 15. Ini (menunjuk lebar segiempat yang dilukis) baru 12. Saya kena buat satu lagi segiempat (diam lama sambil melukis satu lagi segiempat sebelum memadamnya).
P: Mengapa kamu padam?
S: Saya cuba tambah lagi 6 dekat 12 ini (menunjuk lebar segiempat yang dilukis) tapi dapat 18, saya nak 15 saja.

Dalam Petikan HK59, Sofia menggandakan lebar dan panjang lukisan secara menambah masing-masing dengan 6 dan 12 menghasilkan 12 dan 48. Menurut beliau, oleh kerana lebar lukisan baru yang dilukis berukuran 12, maka beliau perlu melukis lagi sehingga lebar lukisan tersebut mencapai kuantiti yang disasarkan, iaitu 15. Beliau sedar bahawa sekiranya lebar 12 ditambah sekali lagi dengan 6, maka lebar baru yang akan diperoleh ialah 18, yang mana melebihi lebar yang disasarkan, iaitu 15. Sofia kemudiannya melukis satu lagi segiempat yang mewakili lukisan seperti dalam Rajah 4.43 dan memberi penjelasan tentang apa yang dilukis dalam Petikan HK60.



Rajah 4.43. Langkah kerja (2) Sofia bagi tugasan Lukisan

Petikan HK60

P: Bagaimana kamu dapat 15 (menunjuk lebar segiempat yang dilukis) dan 51 ini (menunjuk panjang segiempat yang dilukis)?
S: Saya tambah 3 pada 12 dan 48 tadi.
P: Mengapa kamu tambah 3?

S: Nak dapat lebar 15 la. Kalau tambah 6 nanti lebih pula. Sebab lebar saya tambah 3, 48 pun kena tambah 3, dapat "h" 51.

Rajah 4.43 menunjukkan Sofia melukis satu lagi segiempat dengan melabelkan lebar dan panjang masing-masing sebagai 15 dan 51. Tingkah laku yang dipaparkan dalam Petikan HK60 menerangkan beliau menambah 3 kepada lebar 12 bagi memperoleh 15 dan melakukan langkah yang sama terhadap panjang 48 menjadikan 51. Beliau kemudiannya menganggap "h" sebagai 51. Tindakan Sofia mencadangkan bahawa beliau menghubung kaitkan dua kuantiti yang sama ruang ukuran, iaitu lebar dalam nisbah asal dengan lebar dalam nisbah kedua secara menambah berulang, seterusnya mengaplikasi hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti dalam nisbah asal bagi memperoleh kuantiti yang dikehendaki.

Fikri. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Fikri dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dan hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, yang mana beliau mengemukakan dua bentuk penyelesaian yang berbeza. Petikan HK60 memaparkan respons beliau.

Petikan HK60

S: 15 dan 15 dapat 30. 30 dan 30 dapat 60. "h" ialah 60.
P: Apa yang kamu sebut 15 dan 30 tadi?
S: Saya malas nak tulis, sebenarnya saya nak darab 15 dengan 4. Saya congak saja.
P: Mengapa kamu kena darab 15 dengan 4?
S: Ini (menunjuk 24 dalam lukisan pertama) 4 kali panjang dari 6. Jadi "h" mesti 4 kali panjang juga dari 15.

Dalam Petikan HK60, Fikri mengenal pasti hubungan 4 kali panjang antara panjang dan lebar lukisan pertama dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada lukisan kedua dengan mendarab 15 dengan 4 dengan mencongak secara lisan, iaitu menggandakan nombor 15 sebanyak 4 kali menghasilkan 60 yang dianggapnya sebagai kuantiti "h" yang dikehendaki. Tingkah laku beliau yang menghubung kaitkan panjang dan lebar lukisan menunjukkan Fikri membuat hubung kait antara dua kuantiti yang berbeza unit ukuran secara skala pembesaran. Beliau turut mengemukakan satu lagi penyelesaian seperti dijelaskan dalam Petikan HK61.

Petikan HK61

P: Ada cara lain yang kamu boleh tunjuk?
S: (Diam lama dan memangkah 6 dan 24 dalam segiempat pertama menggantikan dengan 3 dan 12).
P: Apa yang kamu buat?
S: Saya cuba kecilkan 6 jadi 3 dan 24 jadi 12.
P: Bagaimana kamu kecilkan?
S: Bahagi 2.
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Untuk terus dapat 15 (menunjuk lebar lukisan kedua).
P: Boleh jelaskan sekali lagi?
S: Sekarang ini (menunjuk 6) dah jadi 3, saya darab 3 dengan 5 dapatlah 15. Ini pula (menunjuk 24) dah kecilkan jadi 12, saya darab 5 juga, dapat la 60 untuk "h".
P: Mengapa perlu darab 12 dengan 5?
S: Sebab panjang ini (menunjuk lebar lukisan kedua) dah jadi semakin panjang sebab darab 5. Sini (menunjuk panjang lukisan kedua) pun mesti darab 5.

Berdasarkan Petikan HK61, Fikri meringkaskan lebar dan panjang lukisan pertama dengan membahagi 6 dan 24 dengan 2 masing-masing menghasilkan 3 dan 12. Beliau memberi justifikasi bahawa sekiranya lebar lukisan diringkaskan kepada 3, maka beliau hanya perlu mendarab 3 dengan 5 bagi menghasilkan 15. Fikri kemudiannya turut mendarab panjang lukisan pertama yang telah diringkaskan, iaitu 12 dengan 5 menghasilkan 60 sebagai kuantiti yang ingin diketahui. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa beliau menghubung kaitkan lebar lukisan pertama dan lebar lukisan kedua secara pendaraban. Tindakan Fikri menunjukkan beliau menggunakan kategori hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran secara mempermudahkan nisbah asal sebelum melakukan pendaraban.

Kesimpulan. Hanya dua peserta kajian, iaitu Lili dan Fikri yang menggunakan lebih daripada satu kategori dalam menghubung kaitkan kuantiti melibatkan struktur bukan nombor bulat dan nombor bulat bagi konteks masalah kerserupaan. Manakala Wani, Danish, Herman, Mona, dan Sofia menggunakan sama ada kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, atau kategori tiada hubung kait antara kuantiti.

Struktur bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Jadual 4.18 merumuskan cara peserta kajian membuat hubung kait antara dua kuantiti berdasarkan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran, hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, dan tiada hubung kait antara kuantiti semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah keserupaan bagi struktur hubungan bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat.

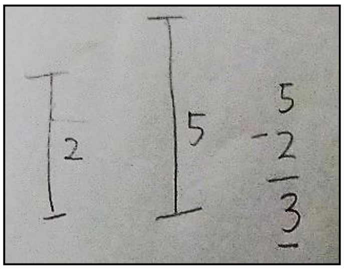
Jadual 4.18

Kategori hubung kait antara kuantiti dalam konteks keserupaan bagi struktur hubungan nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat

Kategori Hubungan	Subkategori hubungan	Peserta kajian
Hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran	a. Skala pembesaran	Danish, Herman, Fikri
Hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran	a. Permudahkan nisbah	Mona
Tiada hubung kait antara kuantiti	a. Perbezaan kuantiti	Wani, Lili, Sofia

Berdasarkan Jadual 4.18, tiga peserta kajian menggunakan subkategori hubungan dan skala pembesaran yang diklasifikasikan sebagai hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran. Manakala bagi kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, hanya seorang peserta kajian menggunakan subkategori secara permudahkan nisbah. Bagi kategori tiada hubung kait antara kuantiti pula, hanya seorang peserta kajian yang menggunakannya. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Wani, Mona, dan Fikri yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Wani. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Wani dikategorikan kepada tiada hubung kait antara kuantiti. Penyelesaian Wani secara bertulis adalah seperti dalam Rajah 4.44.



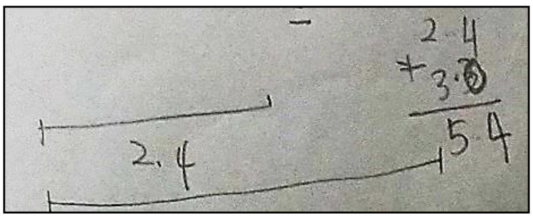
Rajah 4.44. Langkah kerja (1) Wani bagi tugasan Gambar

Dalam Rajah 4.44, Wani melukis dua garisan menegak secara bersebelahan dan melabelkan dengan 2 dan 5. Beliau turut melakukan operasi penolakan. Petikan HK62 memaparkan tingkah laku Wani tentang langkah kerja yang dibuat.

Petikan HK62

S: Yang ini (menunjuk garis berlabel 2) untuk gambar lama dan ini (menunjuk garis berlabel 5) untuk gambar baru yang Johan nak besarkan. Bila tolak, dapat 3.
P: Mengapa kamu tolak?
S: Nak tahu lebar gambar baru lebih barapa banyak.
P: Apa yang kamu faham dengan 3 ini?
S: Lebar gambar baru lebih 3 dari lebar gambar lama.
P: Kemudian apa yang kamu buat?
S: Beza panjang pun mesti sama macam ini (menunjuk hasil tolak).
P: Boleh tunjukkan?
S: (Terus melukis).

Berdasarkan Petikan HK62, dua garisan yang dilukis Wani mewakili lebar gambar lama dan gambar baru. Beliau menyatakan hasil tolak “3” sebagai lebar gambar baru melebihi 3 berbanding lebar gambar lama dan menganggap beza bagi panjang kedua-dua gambar juga perlu sama dengan hasil tolak lebar. Rajah 4.45 menunjukkan Wani sekali lagi melukis dua garisan, namun kali ini secara melintang dan melabelkan dengan 2.4 sebelum melakukan operasi penolakan. Petikan HK63 memaparkan respons beliau.



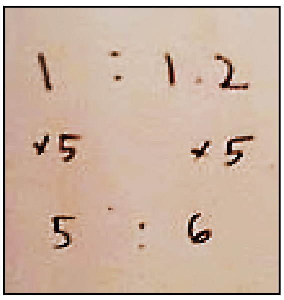
Rajah 4.45. Langkah kerja (2) Wani bagi tugasan Gambar

Petikan HK63

P: Boleh terangkan apa yang kamu lukis ini?
S: Ini panjang gambar lama (menunjuk garisan pendek berlabel 2.4) dan ini (menunjuk garisan panjang) pula panjang gambar baru. Saya dah tahu beza lebar dua-dua gambar ialah 3, jadi beza panjang mesti 3 juga, sebab itu saya tambah 2.4 dengan 3, dapat 5.4. Maksudnya panjang gambar baru 5.4.
P: Mengapa beza kedua-dua lebar dan kedua-dua panjang mesti 3?
S: Mesti sama sebab Johan hanya nak besarkan gambar. Jadi kena sama banyak bertambah.

Dalam Petikan HK63, Wani menggunakan hasil tolak lebar gambar lama dan lebar gambar baru yang diperoleh terdahulu, iaitu 3 untuk ditambah dengan panjang gambar lama menghasilkan 5.4. Beliau seterusnya menganggap bahawa 5.4 sebagai panjang bagi gambar yang baru. Wani memberi alasan bahawa kedua-dua lebar dan panjang perlu mempunyai hasil beza yang sama kerana gambar lama hanya melalui proses pembesaran yang mana menurut beliau lebar dan panjang perlu bertambah seiring dengan nilai yang sama. Tingkah laku yang ditunjukkan menggambarkan bahawa Wani tidak dapat membuat hubung kait antara dua kuantiti sama ada kuantiti dalam nisbah asal mahupun kuantiti yang sepadan antara dua nisbah. Beliau hanya menggunakan perbezaan dua kuantiti yang sepadan dalam kedua-dua nisbah, yang mana beza kedua-dua kuantiti tersebut tidak menunjukkan sebarang hubung kait atau tidak memberi sebarang makna berkaitan hubung kait dua kuantiti.

Mona. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Mona menggunakan kategori hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran secrara permudahkan nisbah. Rajah 4.46 menunjukkan langkah keja bertulis yang dibuatnya.



Rajah 4.46. Langkah kerja Mona bagi tugasan Gambar

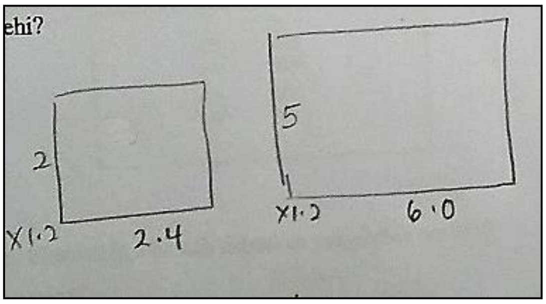
Dalam Rajah 4.46, Mona menulis simbol “x 5” di bawah nisbah 1 kepada 1.2 sebelum menulis satu lagi nisbah 5 kepada 6. Penyelesaian langkah kerja tersebut dipaparkan dalam Petikan HK64.

Petikan HK64

P: Boleh jelaskan apa yang kamu buat?
S: Oo, saya kecilkan 2 dan 2.4. Selepas itu saya bahagi dua-dua dengan 2 dapat macam ini (menunjuk 1 : 1.2)
P: Mengapa kamu kecilkan?
S: Sebab nanti senang saya nak dapat 5.
P: Maksud kamu?
S: Saya nak lebar 5, jadi 1 nak jadi 5 hanya darab 5 (menunjuk “x 5”
P: Boleh terangkan apa maksud ini (menunjuk 1 : 1.2)?
S: Ini nisbah untuk lebar dan panjang gambar yang mula-mula.
P: Apa maksud kamu “nisbah”?
S: Kalau lebar 1, panjang mesti 1.2.
P: Kemudian apa yang kamu buat?
S: Saya darab 1 dan 1.2 dengan 5 (menunjuk “x 5”) dapat 5 dan 6. Ini (menunjuk 5: 6) gambar yang dibesarkan. Jadi panjang gambar yang dibesarkan ialah 6.

Berdasarkan Petikan HK64, Mona meringkaskan nisbah 2 kepada 2.4 menjadi 1 kepada 1.2 dengan melakukan operasi bahagi 2 dengan alasan memudahkan beliau melakukan pendaraban bagi memperoleh lebar gambar baru. Mona juga merujuk “1 : 1.2” sebagai nisbah lebar kepada panjang yang dianggapnya bagi setiap “1” lebar, panjang adalah”1.2”. Beliau kemudiannya mendarab nisbah tersebut dengan 5 menghasilkan satu lagi nisbah 5 kepada 6 dan menganggap panjang bagi gambar yang dibesarkan sebagai “6”. Tindakan yang dilakukan Mona menggambarkan bahawa beliau menghubung kaitkan dua kuantiti yang sepadan, iaitu hubung kait antara lebar asal dengan lebar baru dengan mempermudahkan nisbah asal sebelum melakukan pendaraban terhadap kuantiti dalam nisbah yang diringkaskan bagi memperoleh kuantiti yang ingin diketahui. Tingkah laku Mona menunjukkan beliau menggunakan kategori hubung kait antara dua kuantiti yang sama ruang ukuran secara permudahkan nisbah.

Fikri. Hubung kait antara kuantiti yang digunakan oleh Fikri dikategorikan kepada hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara skala pembesaran. Penyelesaian Fikri secara bertulis adalah seperti dalam Rajah 4.47.



Rajah 4.47. Langkah kerja Fikri bagi tugasan Gambar

Dalam Rajah 4.47, Fikri melukis dua segiempat mewakili gambar asal dan gambar baru dan melabelkan panjang dan lebar bagi setiap segiempat sebelum menulis simbol "x 1.2". Penjelasan beliau tentang Rajah 4.47 dipaparkan dalam Petikan HK65.

Petikan HK65

P: Apa yang kamu lukis ini?
S: 2 darab 1.2 dapat 2.4. Bila saya dah tahu 1.2, saya darab pula 5 dengan 1.2 dapat 6. Jadi panjang gambar baru ialah 6.
P: Mana kamu dapat 1.2?
S: Saya tahu sendiri, guna sifir 2 ada 24, 12 darab 2.
P: Kenapa 5 pun kamu darab 1.2?
S: Mesti darab nombor yang sama. Mungkin panjang ini (menunjuk 6) 1.2 kali besar dari 5.

Dalam Petikan HK65, Fikri menentukan hubungan antara lebar dan panjang gambar asal, iaitu hubungan antara 2 dan 2.4 dengan menggunakan sifir 2. Beliau menyatakan, oleh kerana 12 darab 2 menghasilkan 24, maka Fikri kemudiannya mengaplikasikan hubungan pendaraban tersebut kepada satu lagi kuantiti, iaitu mendarab lebar gambar baru dengan pendarab yang sama, iaitu 2 bagi memperoleh panjang gambar baru. Walaupun nampak kurang yakin dengan alasan yang diberi, namun Fikri tetap menyatakan panjang gambar baru adalah 1.2 kali lebih besar daripada lebarnya. Tingkah laku yang ditunjukkan menggambarkan bahawa beliau membuat hubung kait antara dua kuantiti yng berbeza unit ukuran secara skala pembesaran.

Kesimpulan. Semua peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Danish, Herman, Mona, Sofia, dan Fikri menggunakan satu kategori sahaja dalam menghubung kaitkan kuantiti melibatkan struktur nombor bukan nombor bulat dan bukan nombor bulat. Misalnya, Wani hanya menggunakan kategori tiada hubung kait antara kuantiti, manakala Fikri menggunakan kategori hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran secara skala pembesaran.

Implikasi Perubahan Kuantiti

Bahagian ini membentangkan dapatan peserta kajian tentang salah satu komponen dalam penaakulan perkadaran, iaitu implikasi perubahan kuantiti. Jadual 4.19 menunjukkan struktur konteks masalah dan jenis kuantiti yang terlibat dalam komponen implikasi perubahan kuantiti.

Jadual 4.19

Struktur konteks masalah dan jenis kuantiti dalam implikasi perubahan kuantiti

Komponen Penaakulan Perkadaran	Struktur Konteks Masalah	Jenis Kuantiti
Implikasi perubahan kuantiti	1. Konteks masalah nisbah	• Kuantiti diskrit • kuantiti selanjar
	2. Konteks masalah kadar	• Kuantiti diskrit-selanjar
	3. Konteks masalah keserupaan	• Kuantiti selanjar

Tiga konteks masalah yang terlibat adalah konteks masalah kadar, konteks masalah nisbah, dan konteks masalah keserupaan yang membabitkan tiga jenis kuantiti, iaitu kuantiti diskrit, kuantiti selanjar, dan kuantiti diskrit-selanjar. Cara peserta kajian menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam semua konteks masalah bagi jenis kuantiti yang berbeza dikategorikan dalam lima kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan nilai, perubahan berdasarkan kadaran langsung, perubahan berdasarkan kadaran songsang, dan perubahan berdasarkan beza kuantiti.

Konteks masalah nisbah. Penjelasan tentang implikasi terhadap perubahan kuantiti bagi konteks masalah nisbah melibatkan dua jenis kuantiti, iaitu kuantiti diskrit dan kuantiti selanjar. Dalam implikasi perubahan kuantiti, peserta kajian menggunakan tiga kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan nilai, dan perubahan berdasarkan kadaran langsung. Penerangan semua kategori adalah seperti berikut:

i. *Perubahan berdasarkan arah*. Peserta kajian mengenal pasti satu kuantiti dalam satu nisbah berubah secara serentak dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah yang sama. Perubahan kedua-dua kuantiti melibatkan sama ada dua kuantiti berubah dalam arah yang sama atau arah yang bertentangan. Peserta kajian menggunakan salah satu cara berikut bagi menggambarkan perubahan arah kuantiti: *perkataan* membabitkan aspek saiz, rasa, dan bilangan objek, seperti banyak, sikit, sama, lebih besar, kurang pekat, sama sempit, lebih cair, dan lebih panjang; *simbol* seperti "↑" dan "↓" yang menggambarkan arah perubahan kuantiti; dan *pernyataan* yang mewakili perubahan arah dua kuantiti dalam nisbah *a* kepada *b*, seperti "*a* bertambah, *b* bertambah", "*a* berkurang, *b* berkurang", "*a* bertambah, *b* berkurang", dan "*a* semakin besar, *b* semakin kecil".

ii. *Perubahan berdasarkan nilai*. Peserta kajian mengenal pasti nilai perubahan satu kuantiti secara serentak dengan perubahan nilai bagi satu lagi kuantiti dalam nisbah yang sama. Perubahan nilai kedua-dua kuantiti melibatkan salah satu daripada keadaan berikut:

    - Bagi dua kuantiti dalam satu nisbah, nilai satu kuantiti meningkat secara serentak dengan peningkatan nilai satu lagi kuantiti dan begitu juga sebaliknya. Kedua-dua kuantiti berubah dalam arah yang sama dengan perubahan nilai kuantiti yang malar.

- Bagi dua kuantiti dalam satu nisbah, nilai satu kuantiti meningkat secara serentak dengan pengurangan nilai satu lagi kuantiti dan begitu juga sebaliknya. Kedua-dua kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan dengan perubahan nilai kuantiti yang malar.

iii. *Perubahan berdasarkan kadaran langsung*. Peserta kajian mengenal pasti terdapatnya hubungan kesetaraan antara dua atau lebih daripada dua nisbah, yang mana dua kuantiti dalam satu nisbah berubah dalam arah yang sama dengan skala tertentu melibatkan operasi pendaraban atau pembahagian serta mengekalkan hubungan antara kuantiti yang sepadan dalam dua atau lebih daripada dua nisbah.

Kuantiti diskrit. Jadual 4.20 merumuskan implikasi perubahan kuantiti berdasarkan tiga kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan nilai, dan perubahan berdasarkan kadaran langsung oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit.

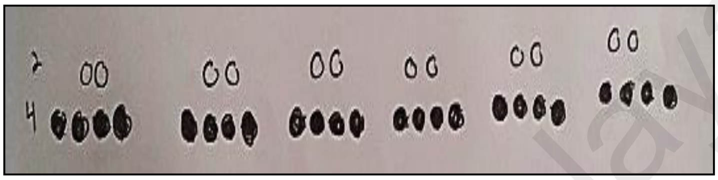
Jadual 4.20

Kategori implikasi perubahan kuaniti konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit

Kategori	Peserta kajian
Perubahan berdasarkan arah	Semua
Perubahan berdasarkan nilai	Lili, Danish, Mona, Herman, Fikri
Perubahan berdasarkan kadaran langsung	Lili, Danish, Mona, Herman, Fikri

Berdasarkan Jadual 4.20, semua tujuh peserta kajian menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah dalam menyatakan implikasi perubahan kuantiti. Manakala bagi kategori perubahan berdasarkan nilai dan perubahan berdasarkan kadaran langsung, lima peserta kajian menggunakan bagi setiap kategori. Berikutnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Lili, Danish, dan Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Lili. Lili menggunakan tiga kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan nilai, dan perubahan berdasarkan kadaran langsung semasa menyelesaikan tugasan melibatkan masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Rajah 4.48 menunjukkan langkah kerja yang dibuat oleh beliau.



Rajah 4.48. Langkah kerja Lili bagi tugasan Susunan Guli

Dalam Rajah 4.48, Lili melukis 6 kumpulan guli yang terdiri daripada dua bulatan putih dan 4 bulatan hitam bagi setiap kumpulan. Petikan IP66 memaparkan penjelasan beliau.

Petikan IP66

P: Boleh jelaskan apa yang kamu lukis?
S: Tadi cikgu tanya kalau guli putih susun cara lain, mempengaruhi guli hitam tak. Ini saya nak tunjuk la.
P: Boleh kamu terangkan, saya kurang faham?
S: (Diam seketika). Ada 6 kumpulan guli, 2 guli putih dan 4 guli hitam setiap kumpulan. Kalau saya ubah susunan guli putih, bilangan guli hitam pun akan berubah.
P: Apa maksud kamu "ubah"?
S: Maksud saya, saya kecilkan bilangan guli putih jadi 2, guli hitam pun akan jadi sikit.
P: Bagaimana kamu tahu nak buat 6 kumpulan dan setiap kumpulan ada 2 guli putih dan 4 guli hitam?
S: Saya tengok susunan 1 dan saya bahagi 2. Maksudnya kalau kurang 2 guli putih akan kurang 4 guli hitam daripada susunan 1.
P: Bagaimana pula kalau kamu jadikan bilangan guli putih banyak?
S: Umm (diam lama sambil menulis dan kemudian memadam). Kalau guli putih bertambah, guli hitam pun bertambah.
P: Berapa banyak bertambah?
S: Kalau guli putih jadi 6, guli hitam jadi 12.
P: Bagaimana kamu tahu?
S: 4 ini (menunjuk guli putih susunan 1) saya bagi 2 sini (menunjuk kumpulan pertama dalam susunan 1) dan 2 sini (menunjuk kumpulan kedua susunan 1) jadi 6 guli putih. Guli hitam pun saya bagi sini (menunjuk kumpulan kedua susunan 1) 4, sini (menunjuk kumpulan kedua susunan 1) 4. Jadi guli hitam jadi 12.

Berdasarkan Petikan IP66, Lili membentuk satu lagi susunan guli yang berbeza daripada susunan 1 dan susunan 2 bagi menunjukkan susunan bilangan guli hitam dipengaruhi oleh susunan bilangan guli putih. Pernyataan "kecilkan bilangan guli putih…guli hitam… jadi sikit" dan "guli putih bertambah, guli hitam pun bertambah" menggambarkan perubahan bilangan guli hitam apabila terdapat perubahan dalam bilangan guli putih. Menurut Lili, bilangan guli putih akan berubah serentak dengan bilangan guli hitam, yang mana peningkatan atau pengurangan bilangan guli putih menyebabkan juga peningkatan atau pengurangan dalam bilangan guli hitam. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Lili menganggap satu kuantiti dalam satu nisbah akan berubah secara serentak dengan perubahan satu lagi kuantiti dalam arah yang sama. Tindakan ini menunjukkan beliau menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah bagi menyatakan implikasi perubahan kuantiti.

Selain itu, Lili turut menyatakan nilai perubahan bilangan guli hitam bagi setiap peningkatan atau pengurangan dalam bilangan guli putih. Beliau membahagikan bilangan guli putih dan bilangan guli hitam dalam susunan 1 dengan 2 bagi menghasilkan susunan baru, iaitu 6 kumpulan mengandungi 2 guli putih dan 4 guli hitam dalam setiap kumpulan. Lili seterusnya menganggap setiap pengurangan sebanyak 2 guli putih akan turut menyebabkan pengurangan sebanyak 4 guli hitam dalam setiap kumpulan. Tindakan ini mencadangkan bahawa Lili menjelaskan implikasi perubahan kuantiti dalam kategori perubahan berdasarkan nilai. Beliau turut menggunakan kategori perubahan berdasarkan kadaran langsung seperti dipaparkan dalam Petikan IP67.

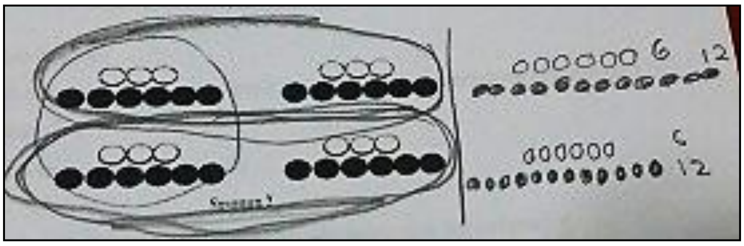
Petikan IP67

P: Jika kamu lihat ketiga-tiga susunan ini (menunjuk susunan 1, 2, dan satu susunan yang dilukis peserta kajian) apa yang kamu boleh katakan?
S: (Melihat berulang kali kesemua susunan dan bercakap perlahan). Semua kalau kita bahagi untuk kecilkan dapat pecahan yang sama.
P: Boleh tunjukkan apa yang kamu maksudkan dengan "pecahan yang sama"?

S: Kecilkan 4/8 (menunjuk susunan 1) dapat 1/2, kecilkan 3/6 (menunjuk susunan 2) juga dapat 1/2. 2/4 (menunjuk susunan yang dilukis) kecil dapat 1/2.
P: Apa yang kamu faham tentang “1/2” dalam semua susunan ini?
S: ½ itu pecahan paling ringkas. Tapi kalau darab dengan nombor boleh dapat 4/8, 2/4, 3/6 balik.
P: Sama ke semua pecahan itu?
S: (Nampak keliru). Memang pecahan 4/8, 3/6, 2/4 nampak macam tak sama tapi semua sama saja sebab bilangan guli sama.
P: Apa maksud kamu?
S: Semua ada 36 guli. Kat sekolah kita panggil pecahan setara.

Berdasarkan Petikan IP67, Lili mempermudahkan nisbah guli putih kepada guli hitam bagi ketiga-tiga susunan guli, iaitu 2/4, 3/6, dan 4/8 secara pembahagian menghasilkan ½. Beliau kemudian menganggap ½ sebagai pecahan paling ringkas yang boleh didarab dengan “nombor” bagi memperoleh semula nisbah ketiga-tiga susunan guli. Lili juga menganggap pecahan 2/4, 3/6, dan 4/8 sebagai pecahan setara dengan memberi alasan bahawa bilangan guli masih kekal sama walaupun mempunyai pecahan yang berbeza. Tindakan ini menggambarkan bahawa Lili sedar nisbah guli putih kepada guli hitam dalam tiga susunan yang berbeza adalah setara dan mengekalkan hubungan antara kuantiti yang sepadan. Beliau juga sedar bahawa nisbah yang diringkaskan boleh didarab atau dibahagi dengan pekali yang sama bagi memperoleh semula nisbah asal. Ini menunjukkan beliau menjelaskan implikasi terhadap perubahan kuantiti dalam kategori perubahan berdasarkan kadaran langsung.

Danish. Dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti bagi konteks masalah nisbah yang melibatkan kuantiti diskrit, Danish menggunakan semua kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan nilai, dan perubahan berdasarkan kesetaraan nisbah. Apabila diminta menyatakan adakah susunan guli hitam dipengaruhi oleh susunan guli putih, beliau melukis seperti dalam Rajah 4.49 dan penerangan tentangnya dipaparkan dalam Petikan IP68.



Rajah 4.49. Langkah kerja Danish bagi tugasan Susunan Guli

Petikan IP68

P: Boleh jelaskan apa yang kamu buat ini?
S: Saya gabungkan dua kumpulan ini (menunjuk dua kumpulan dalam susunan 2) dan jadikan satu kumpulan. Maksudnya satu kumpulan ada 6 guli putih dan 12 guli hitam. Oo, saya perasan guli putih dalam setiap susunan mesti separuh dari guli hitam.
P: Apa maksud kamu?
S: 4 separuh dari 8 (menunjuk susunan 1), 3 separuh dari 6 (menunjuk susunan 2). Yang saya buat tadi pun sama, 6 separuh dari 12.
P: Boleh buat susunan lain tak selain dari 3 susunan ini?
S: Boleh, saya boleh separuhkan lagi 4 dan 8, jadi 2 dan 4.
P: Selain daripada separuhkan?
S: Saya rasa gandakan pun boleh sebab 3 dan 6 gandakan dapat 6 dan 12. Ada banyak susunan la boleh buat.
P: Bagaimana kamu separuh dan gandakan?
S: Darab dan bahagi la.
P: Adakah kesemua susunan yang kamu cakap tadi sama?
S: (Diam seketika). Saya rasa sama sebab jumlah guli sama 36 cuma cara susun je lain. Contohnya susunan ini (menunjuk susunan yang dilukis) sebenarnya sama dengan susunan 2, cara susun saja lain. Bilangan guli putih dan hitam tak berubah pun.

Berdasarkan Rajah 4.49 dan Petikan IP68, Danish membentuk satu lagi susunan berpandukan kepada susunan 2. Beliau membentuk dua kumpulan dalam susunan baru dengan menggabungkan dua kumpulan dalam susunan 2 menjadikan setiap kumpulan terdiri daripada 6 guli putih dan 12 guli hitam. Oleh kerana Danish sedar bahawa bilangan guli putih adalah separuh daripada bilangan guli hitam dalam setiap kumpulan bagi ketiga-tiga susunan, maka beliau menganggap susunan lain boleh dibentuk dengan menggandakan atau menjadikan separuh susunan yang sedia ada. Beliau juga menganggap susunan atau nisbah 2 kepada 4, 3 kepada 6, dan 6 kepada 12 adalah sama dengan memberi justifikasi bahawa bilangan guli putih dan guli hitam kekal sama dalam semua susunan selain terdapat hubungan pendaraban dan pembahagian antara semua susunan. Tingkah laku ini menggambarkan Danish menggunakan kategori perubahan berdasarkan kadaran langsung. Selain itu, beliau turut menggunakan satu lagi kategori seperti dipaparkan dalam Petikan IP69.

Petikan IP69

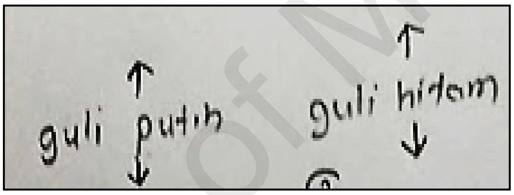
P: Apa yang akan terjadi kepada guli hitam kalau bilangan guli putih dalam satu kumpulan semakin bertambah?
S: Guli hitam pun mesti bertambah. Kalau guli putih berkurang, guli hitam pun berkurang.
P: Berapa banyak bertambah dan berkurang?
S: (Diam seketika). Saya buat contohlah. Kalau susunan 1 nak jadi susunan 2, guli putih kurang satu, guli hitam kurang 2. Tapi kalau susunan 1 nak jadi ini (menunjuk susunan yang dilukis), guli putih tambah 2, guli hitam tambah 4. (Mengangguk kepala).
P: Kenapa kamu mengangguk kepala?
S: Sebenarnya sama saja, 1 dan 2, 2 dan 4. Kalau guli putih tambah ke kurang ke, guli hitam pun tambah dan kurang dua kali ganda dari bilangan guli putih.

Dalam Petikan IP69, Danish mengemukakan beberapa pernyataan seperti “guli hitam pun mesti bertambah” dan “guli putih berkurang, guli hitam pun berkurang” yang menggambarkan susunan bilangan guli hitam dipengaruhi oleh susunan bilangan guli putih. Menurut beliau, bilangan guli putih berubah secara serentak dengan bilangan guli hitam, iaitu peningkatan atau pengurangan bilangan guli putih menyebabkan juga peningkatan atau pengurangan dalam bilangan guli hitam. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Danish menganggap satu kuantiti dalam satu nisbah akan berubah secara serentak dengan arah perubahan yang sama berbanding perubahan satu lagi kuantiti. Tindakan ini menunjukkan beliau menggunakakan kategori perubahan berdasarkan arah bagi menyatakan implikasi perubahan kuantiti dalam.

Danish juga mengenal pasti nilai perubahan bilangan guli hitam bagi setiap peningkatan atau pengurangan dalam bilangan guli putih. Beliau membandingkan bilangan guli putih dan guli hitam antara susunan 1 dengan susunan 2 dan antara susunan 2 dengan susunan yang dilukisnya sebelum merumuskan bahawa pertambahan atau pengurangan bilangan guli hitam adalah dua kali bilangan pertambahan atau pengurangan guli putih. Tindakan ini mencadangkan bahawa

Danish menggunakan kategori perubahan berdasarkan nilai bagi implikasi perubahan kuantiti.

Mona. Mona menggunakan tiga kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan nilai, dan perubahan berdasarkan kadaran langsung. Bagi kategori perubahan berdasarkan nilai dan perubahan berdasarkan kesetaraan nisbah, langkah kerja yang ditunjukkan beliau menyamai langkah kerja Lili dan Danish seperti yang dijelaskan terdahulu. Namun, bagi kategori perubahan berdasarkan arah, Mona bukan sahaja mengemukakan pernyataan dan perkataan yang menggambarkan perubahan arah, malah turut menggunakan simbol. Rajah 4.50 menunjukkan langkah kerja beliau.



Rajah 4.50. Langkah kerja Mona bagi tugasan Susunan Guli

Dalam Rajah 4.50, Mona menggunakan simbol anak panah bagi menjelaskan arah perubahan bilangan guli putih dan guli hitam. Beliau menggunakan simbol "↑" dan "↓" masing-masing mewakili pertambahan dan pengurangan bilangan guli. Pernyataan "ubah susunan guli putih, bilangan guli hitam pun akan berubah" dan "kecilkan guli putih…guli hitam jadi sikit" yang dikemukakan oleh Mona adalah selari dengan simbol yang ditulis, iaitu "guli putih ↑, guli hitam ↑" dan "guli putih ↓, guli hitam ↓". Beliau menganggap satu kuantiti dalam satu nisbah akan berubah secara serentak dengan perubahan satu lagi kuantiti dalam arah perubahan yang sama. Tindakan ini menunjukkan beliau menggunakakan kategori perubahan berdasarkan arah bagi menyatakan implikasi apabila terdapat perubahan kuantiti dalam nisbah.

Kesimpulan. Semua peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Danish, Herman, Mona, Sofia, dan Fikri menggunakan lebih daripada satu kategori dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti diskrit. Misalnya, Sofia dan Wani menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah dan perubahan berdasarkan kesetaraan nisbah.

Kuantiti selanjar. Jadual 4.21 merumuskan implikasi perubahan kuantiti berdasarkan dua kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah dan perubahan berdasarkan nilai oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar.

Jadual 4.21

Kategori implikasi perubahan kuantiti konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar

Kategori	Peserta kajian
Perubahan berdasarkan arah	Semua
Perubahan berdasarkan nilai	Lili, Danish, Mona, Sofia

Berdasarkan Jadual 4.21, semua tujuh peserta kajian menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah dalam menyatakan implikasi perubahan kuantiti. Manakala terdapat empat peserta kajian menggunakan kategori perubahan berdasarkan nilai. Berikutnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Mona. Mona menggunakan dua kategori iaitu perubahan berdasarkan arah dan perubahan berdasarkan nilai semasa menyelesaikan tugasan melibatkan masalah nisbah bagi kuantiti selanjar. Petikan IP70 memaparkan respons beliau.

Petikan IP70

P: Apa yang akan berlaku jika bilangan cawan pekatan oren berubah?
S: Makin banyak cawan pekatan oren makin kuat rasa jus oren.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Macam kalau kita bancuh *sunquick*, lagi banyak letak *sunquick*, lagi kuat rasa oren. Kalau cawan pekatan oren banyak, rasa oren kuat. Kalau cawan pekatan oren semakin sikit, kurang rasa oren.

Berdasarkan Petikan IP70, Mona secara lisan menyatakan perubahan bilangan cawan pekatan oren akan mempengaruhi kepekatan rasa jus oren. Beliau mengemukakan pernyataan "cawan pekatan oren banyak, rasa oren kuat" dan "cawan pekatan oren semakin sikit, kurang rasa oren" yang merujuk kepada pertambahan atau pengurangan bilangan cawan pekatan oren akan mengakibatkan pertambahan atau pengurangan kepekatan rasa jus oren. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Mona menganggap satu kuantiti dalam satu nisbah akan berubah secara serentak dengan perubahan satu lagi kuantiti dalam arah perubahan yang sama. Tindakan ini menunjukkan beliau menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah bagi menyatakan implikasi perubahan kuantiti. Selain itu, Mona turut menggunakan satu lagi kategori seperti ditunjukkan dalam Rajah 4.51.

Rajah 4.51. Langkah kerja Mona bagi tugasan Jus oren 1

Dalam Rajah 4.51, Mona mengagihkan cawan pekatan oren kepada dua bahagian dan menulis dalam bentuk pecahan. Petikan IP71 menjelasan tentang cara kerja yang dibuat.

Petikan IP71

P: Apa yang akan berlaku jika saya tambah satu cawan pekatan oren Jojo jadi 4 cawan?
S: (Menulis sambil menerangkan). Saya tahu 3 cawan pekatan oren akan guna 1 ½ untuk satu jag air, tapi kalau 4 cawan, satu jag air guna 2 cawan pekatan oren.
P: Bagaimana pula kalau ada 5 cawan dan 6 cawan pekatan jus oren?
S: Sama saja (menulis untuk 5 dan 6 cawan).
P: Boleh terangkan?
S: Kalau semakin banyak cawan pekatan oren (menunjuk 3, 4, 5 dan 6), satu jag air dapat banyak ini (menunjuk 1 ½ , 2, 2 ½, dan 3) pekatan oren. Makin banyak makin pekat rasa jus oren.
P: Bagaimana kalau saya kurangkan cawan pekatan oren Jojo?
S: Rasa jus oren akan kurang juga.
P: Berapa banyak kurang?
S: Kalau kurangkan satu cawan, maknanya kena kurangkan ½ cawan pekatan oren dalam setiap jag Jojo.

P: Bagaimana kamu tahu?
S: Saya tengok ini (menunjuk cara kerja yang ditulis). Kalau naik satu cawan, mesti naik ½, jadi kalau kurang satu cawan, tolak saja ½.

Berdasarkan Petikan IP71, Mona tahu bahawa jika Jojo mempunyai 3 cawan pekatan oren, setiap jag air akan memperoleh 1 ½ cawan pekatan oren. Maka apabila bilangan cawan pekatan oren Jojo ditambah menjadi 4, beliau turut membahagikan bilangan cawan pekatan oren kepada dua bahagian sama banyak, iaitu 2 cawan pekatan oren bagi setiap jag air. Mona turut melakukan langkah yang sama bagi setiap pertambahan bilangan cawan pekatan oren. Beliau juga mengenal pasti nilai perubahan bilangan cawan pekatan oren untuk setiap jag air bagi setiap pertambahan atau pengurangan dalam bilangan cawan pekatan oren. Menurut Mona, setiap pertambahan atau pengurangan satu cawan pekatan oren dalam resepi Jojo akan menyebabkan pertambahan atau pengurangan ½ cawan pekatan oren bagi setiap jag air. Tingkah laku ini mencadangkan bahawa Mona menjelaskan implikasi perubahan kuantiti dalam kategori perubahan berdasarkan nilai.

Kesimpulan. Empat daripada tujuh peserta kajian, iaitu Danish, Mona, Sofia, dan Fikri menggunakan kategori berdasarkan perubahan arah dan berdasarkan perubahan nilai dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti melibatkan konteks masalah nisbah bagi kuantiti selanjar.

Konteks masalah kadar. Dalam menjelaskan implikasi terhadap perubahan kuantiti bagi konteks masalah kadar, hanya satu jenis kuantiti yang terlibat, iaitu kuantiti diskrit-selanjar. Bagi konteks masalah ini, peserta kajian menggunakan tiga kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan kadaran langsung, dan perubahan berdasarkan kadaran songsang. Penerangan bagi kategori perbandingan berdasarkan kadaran songsang adalah seperti berikut:

i. *Perubahan berdasarkan kadaran songsang*. Peserta kajian mengenal pasti terdapatnya hubungan antara dua atau lebih daripada dua nisbah, yang mana dua kuantiti dalam satu nisbah berubah dalam arah yang bertentangan, iaitu apabila satu kuantiti didarab dengan faktor tertentu, maka satu lagi kuantiti akan dibahagi dengan faktor yang sama.

Kuantiti diskrit-selanjar. Jadual 4.22 merumuskan implikasi perubahan kuantiti berdasarkan empat kategori, iaitu berdasarkan arah, berdasarkan beza kuantiti, berdasarkan faktor skala, dan berdasarkan kadaran oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah keserupaan bagi kuantiti diskrit-selanjar.

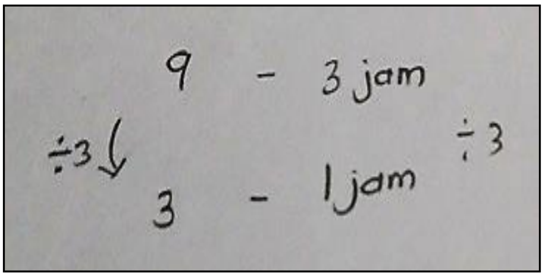
Jadual 4.22

Kategori implikasi perubahan kuantiti konteks masalah kadar bagi kuantiti diskrit-selanjar

Kategori	Peserta kajian
Perubahan berdasarkan arah	Semua
Perubahan berdasarkan kadaran langsung	Lili, Wani, Herman, Danish, Sofia
Perubahan berdasarkan kadaran songsang	Mona, Fikri

Berdasarkan Jadual 4.22, semua tujuh peserta kajian menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah dalam menyatakan implikasi perubahan kuantiti. Manakala lima dan dua orang peserta kajian masing-masing menggunakan kategori berdasarkan kadaran langsung dan perubahan berdasarkan kadaran songsang. Seterusnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Lili, Mona, dan Fikri yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Lili. Dalam menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti yang membabitkan kuantiti diskrit-selanjar, Lili menggunakan kategori perubahan berdasarkan kadaran langsung dan perubahan berdasarkan arah. Rajah 4.52 menunjukkan langkah kerja yang dibuat.



Rajah 4.52. Langkah kerja Lili bagi tugasan Cat (b)

Dalam Rajah 4.52, Lili menulis pasangan nombor “9 - 3 jam” sebelum membahagikan kedua-dua nombor dengan 3 menghasilkan pasangan nombor “3 – 1 jam”. Petikan IP72 memaparkan respons Lili tentang penerangan jalan kerja yang dibuat.

Petikan IP72

P: Boleh kamu jelaskan apa yang kamu tulis?
S: Sebab 9 pekerja nak jadi 3 pekerja kena bahagi 3, jadi masa cat pun (menunjuk 3 jam) kena bahagi 3 juga. Kalau 3 orang pekerja akan cat dalam 1 jam.
P: Oo begitu. Maksud kamu masa akan berkurang jugalah?
S: (Nampak keliru dan menggeleng kepala). Tak mungkin.

Berdasarkan Petikan IP72, Lili pada mulanya mengenal pasti hubungan perubahan bilangan pekerja, iaitu 9 dan 3 dengan membahagi 3. Menurut beliau, sekiranya bilangan pekerja dibahagi 3, maka masa mengecat juga perlu dibahagi dengan 3. Lili seterusnya menganggap 3 pekerja mengambil masa 1 jam untuk mengecat rumah. Tindakan Lili menggambarkan beliau menganggap dua kuantiti dalam satu nisbah, iaitu bilangan pekerja dan masa mengecat berubah dalam arah yang sama dengan skala yang sama. Ini menunjukkan beliau menggunakan kategori perubahan berdasarkan kadaran langsung. Oleh kerana Lili kelihatan tidak berpuas hati dengan jalan kerja yang ditunjukkan, beliau kemudian memberi penjelasan lanjut seperti dalam Petikan IP73.

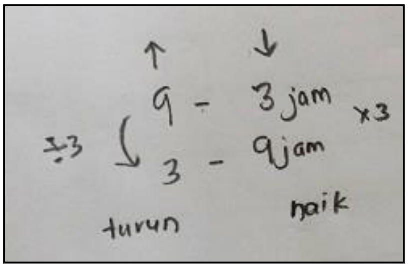
Petikan IP73

P: Mengapa kamu menggeleng kepala?
S: (Tersenyum). Patutnya lagi sikit pekerja, masa untuk cat rumah itu kena lebih dari 3 jam. Mana boleh 1 jam.

P: Kenapa tak boleh?
S: Kalau pekerja lebih dari 9, masa mesti kurang dari 3 jam, kalau pekerja kurang dari 9, masa mesti lebih 3 jam. Salahlah yang saya buat ni. Saya pun tak tahu nak cari 3 pekerja berapa jam.

Dalam Petikan IP73, Lili tidak yakin dengan jawapan yang diberi terdahulu dengan alasan masa mengecat sepatutnya akan bertambah jika bilangan pekerja semakin berkurang. Beliau juga sedar sekiranya bilangan pekerja melebihi 9 orang, maka masa mengecat akan kurang daripada 3 jam dan begitu juga sebaliknya. Walaupun Lili tahu langkah kerja terdahulu yang dibuatnya adalah salah, namun beliau masih tidak dapat menentukan masa mengecat yang diperlukan bagi 3 pekerja. Tingkah laku yang ditunjukkan mencadangkan bahawa Lili menganggap perubahan bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Ini menunjukkan beliau menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah.

Mona. Mona menggunakan dua kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah dan perubahan berdasarkan kadaran songsang semasa menjelaskan implikasi perubahan kuantiti melibatkan kuantiti diskrit-selanjar bagi konteks masalah kadar. Rajah 4.53 dan Petikan IP74 masing-masing menunjukkan langkah kerja dan penerangan beliau.



Rajah 4.53. Langkah kerja Mona bagi tugasan Cat (b)

Petikan IP74

P: Boleh jelaskan apa yang kamu tulis ini?
S: Semakin ramai pekerja, semakin cepat masa untuk bersihkan rumah.
P: Kalau makin kurang pekerja?
S: Lagi lama la masa.
P: Ini (tunjuk anak panah) apa?
S: Oo itu senang saya nak tahu kalau pekerja ramai, masa sikit.

Berdasarkan Rajah 4.53, Mona menulis simbol “↑” dan “↓” bagi menggambarkan perubahan kuantiti seperti dijelaskan dalam Petikan IP74. Pernyataan “semakin ramai…semakin cepat” menggambarkan perubahan masa mengecat apabila terdapat perubahan dalam bilangan pekerja. Menurut Mona, bilangan pekerja akan berubah serentak dengan masa mengecat, yang mana peningkatan atau pengurangan bilangan pekerja menyebabkan juga pengurangan atau peningkatan dalam bilangan masa mengecat. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Mona menganggap satu kuantiti dalam satu nisbah akan berubah secara serentak dengan perubahan satu lagi kuantiti dalam arah yang bertentangan. Tindakan ini menunjukkan beliau menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah bagi menyatakan implikasi perubahan kuantiti. Mona kemudian menerangkan dengan lebih lanjut tentang langkah kerja dalam Rajah 4.53 seperti dipaparkan dalam Petikan IP75.

Petikan IP75

P: Apa pula yang kamu bahagi dan darab ini?
S: 9 pekerja saya bahagi 3 dapat 3 pekerja, jadi sebelah sini (menunjuk masa 3 jam) mestilah darab 3 dapat 9 jam.
P: Bagaimana kamu tahu nak darab 3?
S: Sebenarnya mula-mula saya nak bahagi 3 juga tapi mana boleh sebab saya tahu kalau bilangan pekerja kurang (menunjuk perkataan”turun”), masa cat akan naik (menunjuk perkataan “naik”). Sebab itu saya darab 3.
P: Mengapa mesti darab 3 dan bukan nombor lain?
S: Oo itu mesti ikut ini (menunjuk “÷ 3”). Cuma saya tukar darab je.
P: Apa yang kamu faham dengan maksud “÷ 3” dan “x 3” ini?
S: (Diam seketika). Umm, kalau pekerja kurang 3 kali, masa akan tambah 3 kali. Macam saya cakap tadi, kalau satu naik, satu turun.

Berdasarkan Petikan IP75, Mona mengenal pasti perubahan bilangan 9 pekerja kepada 3 pekerja secara pembahagian. Menurutnya, jika bilangan pekerja telah berkurang sebanyak 3 kali, bilangan masa mengecat pula akan bertambah sebanyak 3 kali dengan alasan apabila satu kuantiti bertambah, maka satu lagi kuantiti akan berkurang dengan faktor yang sama. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Mona menggunakan kategori perubahan berdasarkan kadaran songsang.

Fikri. Fikri menggunakan dua kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah dan perubahan berdasarkan kadaran songsang semasa menjelaskan implikasi perubahan kuantiti melibatkan kuantiti diskrit-selanjar bagi konteks masalah kadar. Petikan IP76 memaparkan respons beliau.

Petikan IP76

P: Lapan orang pekerja diperlukan untuk membersihkan rumah tersebut dalam masa dua jam. Jika bulan berikutnya semakin bertambah pekerja yang datang, apa yang akan terjadi?
S: Boleh bersihkan rumah dengan cepat.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Sebab kalau ramai orang tolong kerja cepat habis, jadi masa berkurang.
P: Bagaimana kalau makin kurang pekerja?
S: Terbalikkan saja. Bersihkan rumah ambil masa lama.

Berdasarkan Petikan IP76, Fikri menyatakan secara lisan perubahan bilangan pekerja akan memberi kesan kepada masa yang diperlukan bagi membersihkan rumah. Beliau mengemukakan beberapa pernyataan yang menggambarkan arah perubahan masa, seperti "cepat habis", "masa berkurang", dan "masa lama". Menurut Fikri, pertambahan bilangan pekerja akan menyebabkan masa yang diambil untuk membersihkan rumah menjadi singkat dan begitu juga sebaliknya. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Fikri menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah, yang mana beliau menganggap perubahan bagi satu kuantiti akan menyebabkan satu lagi kuantiti berubah dalam arah yang bertentangan. Selain itu, Fikri turut mengemukakan satu lagi kategori yang berbeza dari sebelumnya. Petikan IP77 memaparkan tingkah laku beliau.

Petikan IP77

P: Oleh sebab kamu kata bila pekerja makin ramai, masa bersih rumah akan berkurang, boleh kamu beritahu berapa masa yang diperlukan untuk bersihkan rumah jika 10 pekerja yang datang?
S: (Bercakap perlahan "8 orang, 2 jam" dan diam lama).
P: Apa yang kamu fikirkan?
S: Kalau 16 orang saya dapat 1 jam.
P: Mengapa kamu buat begitu?
S: Saya darab 8 orang dengan 2 dan saya bahagikan 2 jam dengan 2.Takkan saya nak gandakan juga masa, nanti jadi 4 jam. Mana boleh lagi ramai orang lagi

lama bersih rumah. Jadi kalau orang saya darab, masa pun mesti darab, eh bukan darab maksud saya separuhkan masa, bahagi 2 (tersenyum). Orang itu saya darab 2.

P: Ok, bagaimana pula kalau 10 orang pekerja?

S: (Menggaru kepala). Saya tak pasti nak buat macamana. Saya cuba kecilkan 8 jadi 4 pula. (Bercakap perlahan "8 orang, 2 jam, kalau separuh 4 orang, masa lagi banyak"). Kalau 4 pekerja masanya 4 jam sebab 2 jam darab 2. 10 jam saya tak tahu la nak darab berapa.

P: Bagaimana kalau 12 orag pekerja?

S: (Diam lama sambil mulut terkumat-kamit). 4 darab 4, 12. Kalau 4 bahagi 3 (diam). Saya tak tahu.

Dalam Petikan IP77, walaupun Fikri tidak dapat menyatakan masa yang diperlukan oleh 10 pekerja bagi membersihkan rumah, namun beliau dapat mengenal pasti hubungan pendaraban dan pembahagian antara kuantiti yang sepadan dalam nisbah apabila terdapat perubahan kuantiti. Beliau secara serentak mendarabkan bilangan pekerja menjadi 16 orang dan membahagi masa mengecat dengan 2 menghasilkan 1 jam. Ini memberikan satu nisbah pekerja kepada masa yang baru, iaitu 16 kepada 1. Fikri memberi justifikasi bahawa oleh kerana arah perubahan dua kuantiti dalam nisbah adalah bertentangan, maka masa mengecat perlu diseparuhkan dan bukan didarabkan. Seterusnya, ketika diminta menentukan masa mengecat yang diperlukan oleh 10 pekerja, Fikri menggandakan pula masa mengecat dan menjadikan bilangan pekerja kepada separuh untuk membentuk satu lagi nisbah pekerja kepada masa, iaitu 4 kepada 4. Namun, Fikri tidak dapat menggunakan nisbah 4 kepada 4 untuk mencari masa bagi 10 pekerja kerana beliau tidak dapat mengaitkan antara nombor 4 dan 10. Tindakan yang ditunjukkan oleh Fikri mencadangkan bahawa beliau sedar terdapat hubungan pendaraban dan pembahagian yang tidak berubah antara kuantiti yang sepadan dalam dua atau lebih daripada dua nisbah dengan perubahan arah kuantiti yang bertentangan. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Fikri menggunakan kategori perubahan berdasarkan kadaran songsang.

Kesimpulan. Semua peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Herman, Danish, Mona, Sofia, dan Fikri menggunakan lebih daripada satu kategori dalam menyatakan implikasi perubahan kuantiti melibatkan kuantiti diskrit-selanjar.

Konteks masalah keserupaan. Penjelasan tentang implikasi terhadap perubahan kuantiti bagi konteks masalah keserupaan hanya melibatkan kuantiti selanjar. Bagi konteks masalah ini, peserta kajian menggunakan tiga kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan beza kuantiti, dan perubahan berdasarkan kadaran langsung. Penerangan bagi kategori perubahan berdasarkan beza kuantiti adalah seperti berikut:

i. *Perbandingan berdasarkan beza kuantiti*. Peserta kajian mencari beza antara dua kuantiti membabitkan operasi tolak antara dua kuantiti dalam satu nisbah sebelum membandingkan dua hasil tolak bagi menentukan perbezaan atau persamaan dua atau lebih dua situasi.

Kuantiti selanjar. Jadual 4.23 merumuskan implikasi perubahan kuantiti berdasarkan tiga kategori, iaitu perubahan berdasarkan arah, perubahan berdasarkan beza kuantiti, dan perubahan berdasarkan kadaran langsung oleh peserta kajian semasa menyelesaikan tugasan melibatkan konteks masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar.

Jadual 4.23

Kategori implikasi perubahan kuantiti konteks masalah keserupaan dan kuantiti selanjar

Kategori	Peserta kajian
Perubahan berdasarkan arah	Semua
Perubahan berdasarkan beza kuantiti	Wani, Sofia
Perubahan berdasarkan kadaran langsung	Semua

Berdasarkan Jadual 4.23, semua tujuh peserta kajian menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah dan kategori perubahan berdasarkan kadaran langsung dalam menyatakan implikasi perubahan kuantiti. Manakala bagi kategori perubahan berdasarkan beza kuantiti, hanya dua peserta kajian menggunakannya. Berikutnya dipaparkan sebahagian petikan daripada temu bual Sofia dan Mona yang menggambarkan setiap kategori tersebut.

Sofia. Dalam menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti, Sofia menggunakan tiga kategori, iaitu berdasarkan perubahan arah, perubahan berdasarkan beza kuantiti, dan perubahan berdasarkan kadaran langsung semasa menyelesaikan tugasan melibatkan masalah keserupaan bagi kuantiti selanjar. Petikan IP78 memaparkan respons beliau.

Petikan IP78

P: Apakah yang berubah dalam ketiga-tiga cermin?
S: Semua tak sama saiz.
P: Apa maksud kamu?
S: Segiempat B paling besar. Kedua cermin A dan ketiga cermin C.
P: Apa lagi yang berubah?
S: Panjang dan lebar tak sama, jadi beza panjang dan lebar setiap cermin memang tak sama.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: 12 tolak 8, 4. Untuk cermin B beza ialah 9 dan untuk cermin C pula bezanya 3. Semua tak sama sebab panjang dan lebar berbeza.
P: Apa pula yang yang sama dalam ketiga-tiga cermin?
S: (Merenung lama ketiga-tiga cermin). Tak ada yang sama.
P: Oo tak ada yang sama. Adakah panjang cermin akan berubah kalau saya tambah atau kurangkan lebar cermin?
S: Ya, betul akan berubah.
P: Mengapa kamu kata begitu?
S: Semakin meningkat nilai lebar, nilai panjang pun turut meningkat. Begitu juga semakin mengurang nilai lebar, panjang akan mengurang.

Berdasarkan Petikan IP78, Sofia menyatakan secara lisan perubahan dalam semua cermin dengan membandingkan saiz setiap cermin berdasarkan rajah tugasan. Beliau mengemukakan perkataan "paling besar", "kedua", dan "ketiga" bagi menggambarkan perbezaan saiz cermin. Selain itu, Sofia turut menyatakan panjang cermin akan berubah serentak dengan lebar cermin, yang mana peningkatan atau pengurangan nilai dalam panjang cermin menyebabkan peningkatan atau pengurangan nilai dalam lebar cermin. Ini menunjukkan beliau sedar perubahan arah satu kuantiti adalah sama dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah yang sama. Tingkah laku ini menunjukkan Sofia menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah dan kadaran langsung.

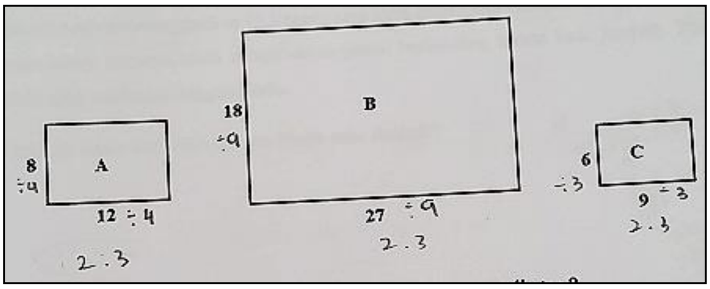
Sofia juga mengenal pasti perubahan setiap cermin dengan menentukan beza panjang cermin dan lebar cermin dengan melakukan operasi penolakan. Beliau menganggap perubahan panjang dan lebar akan menghasilkan beza panjang dan lebar bagi segiempat A, segiempat B, dan segiempat C yang berbeza. Tingkah laku ini menggambarkan Sofia menggunakan kategori berdasarkan beza kuantiti dalam menyatakan perubahan kuantiti.

Mona. Mona menggunakan dua kategori dalam menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti, iaitu kategori perubahan berdasarkan arah dan berdasarkan kadaran langsung. Petikan IP79 memaparkan tingkah laku beliau bagi kategori berdasarkan arah.

Petikan IP79

P: Adakah panjang cermin bergantung kepada lebar cermin?
S: Ya (dengan yakin mengangguk).
P: Boleh jelaskan mengapa kamu kata "ya"?
S: Kalau lebar makin bertambah, panjang pun makin bertambah. Kalau lebar makin berkurang, panjang pun makin kurang.
P: Bagaimana kamu tahu?
S: (Diam seketika). Contohnya saya besarkan cermin A, mestilah panjang dan lebar pun jadi makin besar.

Berdasarkan Petikan IP79, Mona secara lisan menyatakan panjang cermin dipengaruhi oleh lebar cermin. Beliau menggunakan perkataan "makin bertambah" dan "makin berkurang" bagi menggambarkan saiz panjang dan lebar cermin apabila terdapat perubahan panjang dan lebar. Menurut Mona, panjang cermin akan bertambah atau berkurang masing-masing bergantung kepada pertambahan atau pengurangan terhadap lebar cermin. Tingkah laku ini menggambarkan bahawa Mona menganggap satu kuantiti dalam satu nisbah akan berubah secara serentak dengan perubahan satu lagi kuantiti dalam arah yang sama. Ini menunjukkan beliau menyatakan implikasi perubahan kuantiti berdasarkan arah dan bentuk. Selain itu Mona turut menyatakan implikasi perubahan berdasarkan kadaran langsung seperti dalam Rajah 4.54.



Rajah 4.54. Langkah kerja Mona bagi tugasan Cermin

Dalam Rajah 4.54, Mona meringkaskan nisbah lebar kepada panjang bagi setiap cermin menjadi nisbah 2 kepada 3 dengan melakukan operasi bahagi. Penjelasan beliau dipaparkan dalam Petikan IP80.

Petikan IP80

P: Boleh terangkan apa yang kamu buat?
S: Saya bahagi lebar dan panjang cermin A dengan 4, cermin B dengan 9, dan cermin C dengan 3. Dapat 2 nisbah 3.
P: Bagaimana kamu tahu untuk bahagi 4, 9, dan 3 dengan cepat?
S: Saya hanya terfikir untuk kecilkan, jadi saya akan bahagi dengan nombor yang boleh bahagi dengan panjang dan lebar.
P: Apa yang kamu maksudkan dengan “2 nisbah 3”?
S: 2 untuk lebar dan 3 untuk panjang.
P: Apa maksud kamu? Saya kurang faham.
S: Semua cermin kalau kecilkan dapat nisbah yang sama. Sama nisbah tapi saiz berlainan.
P: Apa yang kamu faham dengan “sama nisbah”?
S: Kita darab nisbah dengan apa-apa nombor, nanti dapat saiz yang berbeza. Contohnya untuk dapat saiz cermin A, kita perlu darab nisbah ini (menunjuk 2:3) dengan 4. Tapi untuk B kita kena darab 9.
P: Oo jadi kena darab saja la?
S: Eh tak, bahagi pun boleh.
P: Boleh kamu beri satu lagi saiz cermin selain dari cermin ini (menunjuk cermin A, cermin B, dan cermin C).
S: (Bercakap perlahan “2 kali 2”, “2 kali 3”). Lebar 4 dan panjang 6.
P: Bagaimana kamu dapat?
S: Saya darab 2 nisbah 3 dengan 2.
P: Adakah semua cermin sama?
S: Saiz tak sama tapi nisbah sama. Cuma perlu darab atau bahagi dengan nombor yang berbeza.

Berdasarkan Petikan IP80, Mona menganggap cermin A, cermin B, dan cermin C mempunyai nisbah lebar kepada panjang yang sama, iaitu 2 kepada 3. Beliau turut mengemukakan satu cermin berbeza saiz daripada cermin A, cermin B, dan cermin C dengan mendarab setiap kuantiti dalam nisbah 2 kepada 3 dengan 2. Menurut beliau nisbah tersebut boleh didarab atau dibahagi dengan sebarang nombor bagi menghasilkan cermin yang berbeza saiz namun mempunyai nisbah yang sama apabila dipermudahkan. Tingkah laku Mona menggambarkan bahawa walaupun semua cermin tersebut berbeza dari segi saiz, namun mempunyai nisbah yang sama, yang mana terdapat hubungan pendaraban dan pembahagian antara kuantiti yang sepadan antara nisbah.Tindakan ini mencadangkan bahawa Mona sedar nisbah bagi cermin kekal sama walaupun terdapat perubahan kuantiti bagi nilai yang sepadan. Ini menunjukkan beliau menyatakan implikasi terhadap perubahan kuantiti berdasarkan kadaran langsung.

Kesimpulan. Semua peserta kajian, iaitu Lili, Wani, Danish, Herman, Mona, Sofia, dan Fikri menggunakan lebih daripada satu kategori. Secara umum, semua peserta kajian dominan dalam menggunakan kategori perubahan berdasarkan arah dan kategori perubahan berdasarkan kadaran langsung dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti bagi konteks masalah keserupaan membabitkan kuantiti selanjar.

Bab 5 Perbincangan, Kesimpulan, Dan Implikasi

Pengenalan

Bab ini mempunyai enam bahagian utama. Bahagian pertama, iaitu ringkasan kajian memberi gambaran menyeluruh dan ringkas berkaitan Bab Satu, Bab Dua, dan Bab Tiga. Seterusnya, ringkasan hasil kajian membentangkan hasil kajian dalam bab terdahulu dalam bentuk yang lebih ringkas dan padat. Berikutnya, perbincangan dan kesimpulan menjelaskan interpretasi ringkasan hasil kajian dan menyimpulkan hasil kajian tentang penaakulan perkadaran murid Tahun Lima berkaitan nisbah dan kadaran dibincangkan berdasarkan soalan kajian dan tinjauan literatur yang relevan. Ini diikuti dengan bahagian implikasi kepada teori, implikasi kepada amalan pendidikan matematik, dan implikasi kepada kajian lanjut.

Ringkasan Kajian

Kajian ini adalah untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Kajian ini memfokuskan kepada empat komponen kognitif yang utama, iaitu perbandingan, hubungan, justifikasi, dan implikasi berkaitan nisbah dan kadaran bagi menjawab empat soalan kajian yang dibentuk.

Kajian ini menggunakan 18 tugasan, yang mana 15 daripadanya melibatkan masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran, manakala tiga lagi tugasan membabitkan tugasan pecahan yang dimodifikasi dan diadaptasi daripada beberapa kajian lepas. Dua masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran yang terlibat ialah jenis masalah menentukan nilai dan masalah membandingkan nisbah. Dalam kajian ini juga, bagi memperoleh maklumat yang terperinci dan mendalam, setiap satu daripada masalah penaakulan perkadaran membabitkan tiga struktur konteks masalah, iaitu nisbah, kadar, dan keserupaan. Faktor struktur hubungan nombor pula hanya melibatkan masalah menentukan nilai, manakala masalah membandingkan nisbah membabitkan tiga jenis kuantiti yang berbeza.

Kajian ini menggunakan kajian kes sebagai reka bentuk kajian, manakala temu bual klinikal pula digunakan sebagai teknik pengumpulan data. Seramai tujuh orang murid Tahun Lima yang dipilih menggunakan teknik pensampelan bertujuan bagi mendapatkan peserta dan lokasi kajian yang paling sesuai untuk membantu membentuk pemahaman yang terperinci tentang penaakulan perkadaran murid berkaitan nisbah dan kadaran. Temu bual klinikal mengambil masa selama hampir tiga bulan membabitkan lima sesi temu bual bagi setiap murid, yang mana melibatkan rakaman video dan audio merangkumi semua tingkah laku lisan dan bukan lisan murid, termasuklah: pertuturan; catatan sama ada lukisan atau tulisan; mimik muka; dan isyarat tangan. Dalam kajian ini, data yang dikumpulkan dianalisis menggunakan kaedah analisis protokol bertulis yang melibatkan lima peringkat utama transkripsi data, pembersihan data, analisis kajian kes, pengekodan dan tema, dan analisis merentas kes bagi mengenal pasti penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran yang dimiliki oleh murid Tahun Lima.

Secara ringkas, tinjauan literatur berkaitan penaakulan perkadaran dalam nisbah dan kadaran membabitkan beberapa bahagian yang kesemuanya dilihat dari perspektif murid, iaitu makna dan komponen yang terlibat dalam penaakuan perkadaran, jenis masalah penaakulan perkadaran, dan kajian tentang penaakulan perkadaran. Dua subbahagian dalam bahagian kajian tentang penaakulan perkadaran adalah kajian berkaitan tahap penaakulan perkadaran murid dan kajian tentang strategi penaakulan perkadaran. Kebanyakan kajian lepas banyak bertumpu kepada mengenal pasti tahap perkembangan kognitif dan strategi penyelesaian masalah berdasarkan prosedur tertentu. Tumpuan diberikan kepada mengkategorikan tahap penaakulan perkadaran murid, faktor kesukaran, dan langkah kerja yang ditunjukkan murid tanpa mengetahui alasan disebalik aktiviti yang dilakukan. Maka, kajian ini yang membabitkan penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran bertumpu dalam aspek kognitif dapat menjelaskan bagaimana murid membina pengetahuan secara aktif berdasarkan pengalaman dan pengetahuan sedia ada dalam menyelesaikan masalah.

Ringkasan Hasil Kajian

Terdapat empat hasil analisis data kajian, iaitu membanding pecahan, membanding nisbah, hubungan antara kuantiti, implikasi perubahan kuantiti, dan hasil kajian yang lain yang melibatkan penyelesaian masalah penaakulan perkadaran oleh murid Tahun Lima. Ringkasan hasil kajian dirumuskan seperti yang berikut:

i. Murid menggunakan dua kategori dalam membandingkan pecahan sama penyebut, iaitu: (a) penentuan berdasarkan nilai, dan (b) penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan. Selain itu, murid turut membandingkan pecahan sama pengangka yang dikelaskan kepada empat kategori, iaitu: (a) penentuan berdasarkan nilai, (b) penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, (c) penentuan berdasarkan hasil bahagi, dan (d) penentuan berdasarkan pecahan setara. Seterusnya, murid juga menggunakan dua kategori dalam membandingkan pecahan berlainan penyebut dan pengangka berdasarkan: (a) penentuan berdasarkan nilai, dan (b) penentuan berdasarkan pecahan setara. Murid menentukan nilai antara dua pecahan berdasarkan tiga kategori, iaitu: (a) penentuan secara kualitatif, (b) penentuan berdasarkan garis nombor, dan (c) penentuan berdasarkan pecahan setara. Disamping itu, empat kategori membanding dan menyusun pecahan dikenal pasti: (a) penentuan berdasarkan bahagian keseluruhan, (b) penentuan berdasarkan pecahan setara, (c) penentuan berdasarkan rujukan, dan (d) penentuan berdasarkan pecahan unit.

ii. Murid menggunakan enam kategori dalam membandingkan nisbah bagi konteks masalah nisbah: (a) perbandingan secara kualitatif; (b) perbandingan secara pemetakan; (c) perbandingan secara per unit; (d) perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah; (e) perbandingan secara pemadanan nisbah; dan (f) perbandingan berdasarkan beza kuantiti. Bagi membandingkan nisbah bagi konteks masalah kadar, murid menggunakan empat kategori, iaitu: (a) perbandingan secara kualitatif, (b) perbandingan berdasarkan skala pembesaran, (c) perbandingan secara per unit, dan (d) perbandingan berdasarkan kesetaraan nisbah. Seterusnya tiga kategori membandingkan nisbah bagi konteks masalah keserupaan yang digunakan murid dikenal pasti, iaitu: (a) perbandingan secara per unit, (b) perbandingan berdasarkan skala pembesaran, dan (c) perbandingan berdasarkan koordinasi nisbah.

iii. Murid membuat hubung kait antara kuantiti bagi konteks masalah kadar dengan menggunakan dua kategori, iaitu: (a) hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran terdiri daripada dua subkategori, iaitu unitari dan skala pembesaran, dan (b) hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran dengan dua subkategori, iaitu penambahan berulang dan skala pembesaran. Murid turut membuat hubung kait antara kuantiti bagi konteks masalah nisbah berdasarkan tiga kategori, iaitu: (a) hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran terdiri daripada dua subategori, iaitu unitari dan permudahkan nisbah (b) hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran, juga mempunyai dua subkategori, iaitu penambahan berulang dan permudahkan nisbah, dan (c) tiada hubung kait antara kuantiti dengan subkategori perbezaan kuantiti. Selain itu, murid menggunakan tiga kategori dalam membuat hubung kait antara kuantiti bagi konteks masalah keserupaan: (a) hubung kait dua kuantiti berbeza ruang ukuran dengan dua subkategori, iaitu unitari dan permudahkan nisbah, (b) hubung kait dua kuantiti sama ruang ukuran terdiri daripada dua subkategori, iaitu penambahan berulang dan permudahkan nisbah, dan (c) tiada hubung kait antara kuantiti dengan subkategori perbezaan kuantiti.

iv. Murid menggunakan tiga kategori dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti bagi konteks masalah nisbah, iaitu: (a) perubahan berdasarkan arah, (b) perubahan berdasarkan nilai, dan (c) perubahan berdasarkan kadaran langsung. Bagi menjelaskan implikasi perubahan kuantiti konteks masalah kadar, murid menggunakan tiga kategori, iaitu: (a) perubahan berdasarkan arah, (b) perubahan berdasarkan kadaran langsung, dan (c) perubahan berdasarkan kadaran songsang. Seterusnya tiga kategori dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti bagi konteks masalah keserupaan oleh murid, iaitu: (a) perubahan berdasarkan arah, (b) perubahan berdasarkan beza kuantiti, dan (c) perubahan berdasarkan kadaran langsung.

Perbincangan dan Kesimpulan

Tujuan kajian ini adalah untuk mengenal pasti penaakulan perkadaran murid Tahun Lima berkaitan nisbah dan kadaran. Kajian ini mempunyai beberapa kesimpulan yang dihasilkan daripada mensintesiskan, mentafsirkan, dan membincangkan ringkasan hasil kajian yang dibentangkan sebelum ini berpandukan tinjauan literatur. Lapan kesimpulan melibatkan idea pecahan setara, idea subkonstruk pecahan, idea nisbah antara, idea nisbah dalaman, idea kovarians, idea invarians, peralihan daripada hubungan secara penambahan kepada hubungan secara multiplikatif, dan idea unit komposit dikenal pasti.

1. *Kebanyakan murid Tahun Lima dalam kajian ini menggunakan idea pecahan setara dalam membanding dan menyusun pecahan dan nisbah.*

Penaakulan perkadaran melibatkan murid mengenal pasti wujudnya kesetaraan antara dua nisbah (CCSS-M, 2010; Inhelder & Piaget, 1958; Lamon, 2012). Van de

Walle et al., (2010) pula mencadangkan tiga indikator yang menggambarkan murid telah menguasai idea pecahan setara: mempermudahkan pecahan dalam bentuk paling ringkas; membina kumpulan pecahan setara; dan menentukan kesetaraan antara pecahan. Bagi menguasai idea pecahan setara, murid bukan sahaja perlu mengenal pasti hubungan pendaraban bagi pengangka dan penyebut antara pecahan, malah hubungan pendaraban antara pengangka dan penyebut dalam satu pecahan (Moss & Case, 1999).

Hasil kajian ini mendapati enam daripada tujuh murid menggunakan idea pecahan setara dalam membandingkan dan menyusun dua atau lebih dua pecahan berlainan penyebut dan pengangka. Murid pada mulanya membentuk pecahan setara bagi pecahan asal dengan menyamakan penyebut kedua-dua pecahan melalui operasi pendaraban nombor yang sama terhadap pengangka dan penyebut. Ini diikuti dengan membandingkan nilai pengangka bagi menentukan pecahan yang lebih besar atau kecil. Namun, ada di antara murid yang hanya mencongak dalam membentuk pecahan setara.

Hasil kajian ini berbeza dengan kajian Stafylidou dan Vosniadou (2004) yang mengkehendaki murid membanding dan menyusun tiga pecahan berlainan penyebut dan pengangka secara menaik. Misalnya, dalam kajian ini murid menggunakan idea pecahan setara bagi menentukan nilai pecahan sebelum menyusun mengikut urutan, sementara hasil kajian Stafylidou dan Vosniadou pula mendapati murid hanya membanding dan menyusun pecahan berdasarkan perbandingan antara pengangka atau penyebut, yang mana semakin besar pengangka atau penyebut, semakin besar nilai pecahan tersebut. Ini turut disokong oleh Liu, Xin, Lin, dan Thompson (2013) dalam menentukan cara murid membandingkan pecahan berlainan pengangka dan penyebut. Mereka mendapati murid memfokuskan kepada penyebut bagi membandingkan dua pecahan dan bukannya magnitud pecahan tersebut. Ini kerana murid cenderung menggunakan konsep perbandingan nombor bulat (5 > 3) dalam membanding pecahan. Sebagai tambahan, terdapat perbezaan hasil kajian Clarke dan Roche (2009) dengan kajian ini, yang mana dalam kajian mereka murid menggunakan satu pecahan, katakan ½ sebagai pecahan rujukan dan membandingkan dua pecahan dengan pecahan rujukan tersebut bagi menentukan pecahan yang lebih besar.

Hasil kajian ini juga berpadanan dengan kajian Avcu dan Avcu (2010) dalam mengenal pasti pemikiran murid semasa menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Misalnya, hasil kajian ini dan kajian Avcu dan Avcu menunjukkan kebanyakan murid tidak terus membandingkan dua atau lebih nisbah yang diberi dalam sesuatu konteks masalah, tetapi murid menggunakan idea pecahan setara dengan membentuk nisbah yang setara dengan nisbah asal secara pendaraban. Murid juga sedar nilai bagi nisbah yang dibentuk adalah sama dengan nisbah asal. Misalnya murid mempermudahkan nisbah secara membahagi atau kaedah pemansuhan bagi menunjukkan nilai dua nisbah adalah setara.

Dalam kajian ini, kebanyakan murid turut menggunakan idea pecahan setara bagi menentukan pecahan yang terletak antara dua pecahan. Misalnya, murid menyamakan penyebut dua pecahan dengan membentuk pecahan setara bagi dua pecahan tersebut secara pendaraban sebelum menulis pecahan yang kecil dan besar masing-masing di sebelah kiri dan kanan. Mereka kemudiannya menyenaraikan pecahan yang terletak antara dua pecahan tersebut sama ada menggunakan garis nombor atau menyebut secara lisan. Ini bertentangan dengan hasil kajian Witherspoon (2014) dalam mengenal pasti pemahaman pecahan murid tentang garis nombor mendapati kebanyakan murid menggunakan garis nombor bagi mewakilkan pecahan dan bukannya bagi menentukan nilai antara pecahan dan membandingkan pecahan. Dengan kata lain, murid menganggap garis nombor sebagai satu unit benda yang boleh dipetak kepada beberapa bahagian bagi mewakilkan pecahan. Sebaliknya murid dalam kajian

Witherspoon cenderung menentukan pecahan yang terletak antara dua pecahan secara membuat tekaan rambang tanpa mengemukakan alasan, seperti mengatakan 3/3 terletak antara 1/5 dan 2/3.

2. *Kebanyakan murid Tahun Lima dalam kajian ini menggunakan dua idea subkonstruk pecahan, iaitu perbandingan bahagian-keseluruhan dan hasil bahagi semasa membanding dan menyusun nisbah.*

Kajian lepas (Behr, Lesh, et al., 1983; Ben-Chaim et al., 1998; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Howe et al., 2011; Lamon, 2007; Lobato & Ellis, 2010) mendapati pemahaman konsep pecahan bukan sahaja merupakan prasyarat bagi penaakulan perkadaran, malah mempunyai hubungan timbal balik, yang mana murid yang mempunyai pengetahuan penaakulan perkadaran dapat menguasai konsep pecahan dan sebaliknya (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Doyle et al., 2015; Howe et al., 2015, 2011; Lobato & Ellis, 2010). Lamon (2012) dan Wright (2014) mengenal pasti lima subkonstruk pecahan, iaitu perbandingan bahagian-keseluruhan, operator, hasil bahagi, pengukuran, dan nisbah dan kadar, yang mana setiap satu darinya saling berkait dan mempunyai fungsi yang berbeza.

Dalam membandingkan dua dan lebih dua nisbah melibatkan beberapa konteks masalah, hasil kajian ini mendapati murid menggunakan idea perbandingan bahagian-keseluruhan dengan memetak satu keseluruhan benda kepada beberapa bahagian yang sama saiz dan mengagihkan bahagian sama rata kepada setiap satu benda lain dalam bentuk pecahan sebelum membuat perbandingan. Setiap seorang daripada murid tersebut menunjukkan tindakan memetak benda secara berbeza, iaitu memetak benda berdasarkan penyebut pecahan dan memetak benda kepada bilangan bahagian yang sama bagi dua kumpulan berbeza.

Hasil kajian ini berbeza dengan kajian Ooten (2013). Misalnya, kajian ini mendapati murid menggunakan idea subkonstruk pecahan, iaitu perbandingan bahagian-keseluruhan bagi membandingkan dua dan lebih dua nisbah, yang mana murid menganggap dua pecahan masing-masing *x*/*y* dan *m*/*n* adalah merujuk dua objek sama saiz yang dipetak kepada beberapa bahagian berdasarkan bilangan penyebut *y* dan *n* sebelum melorek bahagian yang dipetak mengikut bilangan pengangka *x* dan *m*. Selanjutnya murid membandingkan saiz kawasan berlorek bagi menentukan persamaan atau perbezaan dua atau lebih dua situasi melibatkan nisbah. Manakala, kajian Ooten berlainan dengan kajian ini kerana murid tidak membandingkan saiz kawasan berlorek bagi objek yang dipetak, tetapi melukis beberapa garis nombor secara selari sebelum memetak kepada beberapa bahagian berdasarkan bilangan penyebut. Murid selanjutnya membandingkan kedudukan pengangka di atas garis nombor.

Selain itu kajian ini mendapati murid menggunakan idea perbandingan bahagian-keseluruhan bagi membandingkan dua dan lebih dua nisbah membabitkan kuantiti selanjar dan diskrit, manakala kajian Boyer, Levine, dan Huttenlocher (2008) mendapati murid dengan mudah membandingkan nisbah yang melibatkan kuantiti selanjar berbanding kuantiti diskrit. Ini turut disokong oleh Singer-Freeman dan Goswami (2001) yang mendapati penyelesaian masalah penaakulan perkadaran melibatkan kuantiti selanjar lebih mudah diselesaikan berbanding kuantiti diskrit.

Dalam kajian ini, kebanyakan murid memetak dua atau lebih dua objek dengan bilangan petak yang sama sebelum membandingkan hasil baki atau lebihan petak dalam dua kumpulan. Misalnya, kajian ini mendapati bagi dua kumpulan yang mempunyai masing-masing satu dan tiga piza, sebahagian murid memetak setiap satu piza membentuk empat bahagian dan mengagihkan sama rata kepada setiap orang. Murid kemudian membandingkan lebihan bahagian piza bagi menjelaskan perbezaan antara dua nisbah. Hasil kajian ini selari dengan kajian Cramer, Post, dan DelMas (2002) yang mendapati murid cenderung membandingkan lebihan bahagian yang dipetak dalam membandingkan dua nisbah.

Kebanyakan pembelajaran pecahan memberi tumpuan kepada idea bahagian-keseluruhan di awal pembelajaran pecahan (Lamon, 2012; Siegler & Pyke, 2013). Ini menyebabkan murid kerap menggunakan idea bahagian-keseluruhan berbanding subkonstruk pecahan yang lain sekaligus memberi kesan terhadap cara murid menggunakan pengetahuan sedia ada dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran (Lamon, 2012). Misalnya, Fuchs et al. (2013) mendapati murid bermasalah yang didedahkan dengan subkonstruk pengukuran menunjukkan peningkatan dalam pemahaman konsep pecahan berbanding pengajaran di dalam kelas yang menumpukan kepada idea bahagian-keseluruhan

Hasil kajian juga menunjukkan kebanyakan murid membanding dan menyusun dua dan lebih dua nisbah berdasarkan idea hasil bahagi. Semua murid tersebut melakukan operasi bahagi bagi menentukan berapa unit satu kuantiti terdapat dalam satu kuantiti yang lain, iaitu sama ada melalui melakukan pembahagian panjang sebelum membandingkan hasil bahagi atau membahagi secara kaedah pemansuhan pecahan. Semasa membanding lebih daripada dua nisbah, sebahagian murid menyusun hasil bahagi secara urutan menaik. Ini berbeza dengan Clarke (2011) dan Van Dooren, De Bock, dan Verschaffel (2010) yang menyatakan pembelajaran pecahan di dalam kelas kurang memberi tumpuan kepada subkonstruk hasil bahagi mengakibatkan murid mengabaikan penggunaannya.

3. *Kebanyakan murid Tahun Lima dalam kajian ini menggunakan idea nisbah antara dan nisbah dalaman secara multiplikatif semasa membuat hubung kait antara dua kuantiti.*

Murid dikatakan menggunakan pemikiran aras tinggi apabila dapat menggunakan dan memahami nisbah antara dan nisbah dalaman secara multiplikatif dalam menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran (Karplus et al., 1983; Lamon, 2012; Lobato & Ellis, 2010; Noelting, 1980a). Ini kerana murid mampu mengenal pasti hubungan antara kuantiti bukan sahaja dalam nisbah yang sama, malah kuantiti antara dua atau lebih nisbah.

Hasil kajian ini menunjukkan kebanyakan murid menggunakan idea nisbah dalaman dan idea nisbah antara secara multiplikatif semasa membuat hubung kait antara dua kuantiti. Misalnya, murid mengenal pasti hubungan multiplikatif antara dua kuantiti yang sepadan dalam dua nisbah atau antara dua kuantiti dalam nisbah asal secara pendaraban atau pembahagian dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti bagi mengetahui kuantiti yang ingin diketahui.

Hasil kajian ini selari dengan kajian Steinthorsdottir dan Sriraman (2009) dalam menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran, iaitu menentukan nilai. Misalnya, kajian ini dan Steinthorsdottir dan Sriraman mendapati murid dengan mudah dapat mengenal pasti hubungan nisbah dalaman yang membabitkan struktur hubungan nombor bulat-nombor bulat dan nombor bulat-bukan nombor bulat. Murid mendarab kedua-dua kuantiti yang sama unit dalam nisbah asal dengan faktor skala tertentu bagi membentuk nisbah setara. Dalam kajian ini, lima daripada tujuh murid bukan sahaja mengenal pasti hubungan dua kantiti secara pendaraban, malah dapat menjelaskan makna hubungan tersebut, seperti jika bilangan belon meningkat sebanyak empat kali ganda, maka harga belon juga akan meningkat sebanyak empat kali. Hasil kajian ini juga menunjukkan seorang daripada lima murid tersebut boleh membuat hubung kait antara kuantiti secara hubungan antara nisbah bagi masalah penaakulan perkadaran yang sama. Ini bertentangan dengan hasil kajian Akar (2010) yang menyatakan bahawa murid yang memahami hubungan nisbah dalaman (kuantiti sama ruang ukuran) tidak dapat menjelaskan makna bagi hubungan nisbah antara, iaitu bagi kuantiti yang berbeza ruang ukuran atau dengan kata lain murid tidak memahami idea nisbah antara sebagai satu kuantiti *intensif*.

Hasil kajian ini juga menunjukkan kebanyakan murid menggunakan idea nisbah antara secara multiplikatif semasa membuat hubung kait antara dua kuantiti. Umpamanya, murid mengenal pasti hubungan multiplikatif antara dua kuantiti dalam nisbah asal secara pendaraban atau pembahagian dan kemudiannya mengaplikasikan hubungan tersebut kepada satu lagi kuantiti bagi mengetahui kuantiti yang ingin diketahui. Ini bertentangan dengan beberapa kajian lepas (Carney & Crawford, 2016; Lamon, 2012; Simon & Placa, 2012) yang mendapati murid menghadapi kesukaran mengaitkan secara multiplikatif hubungan fungsi atau hubungan nisbah antara. Misalnya Carney dan Crowford mendapati hanya seorang murid daripada 27 murid menyatakan dengan jelas hubungan fungsi secara perbandingan multiplikatif antara kuantiti.

Selanjutnya, hasil kajian ini juga menunjukkan bagi masalah yang melibatkan struktur hubungan bukan nombor bulat-bukan nombor bulat, kebanyakan murid tidak terus menggunakan idea nisbah dalaman dalam menentukan satu nilai yang ingin diketahui kerana sukar membuat hubung kait antara kuantiti. Sebaliknya, murid mempermudahkan dulu nisbah asal secara membahagi atau melalui kaedah pemansuhan bagi membentuk nisbah setara yang boleh dihubung kaitkan dengan nisbah kedua secara multiplikatif. Hasil kajian ini berbeza dengan kajian Fernandez, Llinares, van Dooren, De Bock, dan Verschaffel (2011) dan kajian Riehl dan Steinthorsdottir (2015). Misalnya, kedua-dua kajian tersebut mendapati struktur hubungan nombor antara kuantiti dalam masalah penaakulan perkadaran memberi kesan kepada cara penyelesaian yang dipilih oleh murid. Murid cenderung menggunakan perbandingan secara multiplikatif apabila melibatkan hubungan nombor bulat antara kuantiti, sebaliknya kerap menggunakan perbandingan secara penambahan atau penolakan jika melibatkan hubungan bukan nombor bulat antara kuantiti.

4. *Kebanyakan murid Tahun Lima dalam kajian ini menggunakan idea nisbah antara secara unitari semasa membuat hubung kait antara dua kuantiti.*

Unitari atau per unit merupakan strategi yang kerap digunakan murid dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran (Cramer, Post, & Currier, 1993; Heinz, 2000; Kaput & West, 1994; Lamon, 2012; Riehl & Steinthorsdottir, 2015) terutama di peringkat rendah kerana murid belum mempelajari kaedah pendaraban silang (Cramer et al., 1993; Kaput & West, 1994). Kaput dan West (1994) dan Cramer et al. (1993) menyatakan strategi faktor unit atau unitari adalah satu tahap ke hadapan berbanding strategi mengkoordinasi nisbah memandangkan murid perlu mengaitkan dua kuantiti dalam nisbah asal atau dengan kata lain mengenal pasti hubungan nisbah antara. Sebaliknya Lamon (2008) dan Heinz (2000) menyuarakan pendapat yang berbeza. Menurut mereka, strategi per unit adalah kurang canggih daripada strategi koordinasi nisbah dengan dua alasan, iaitu murid tidak menggunakan unit komposit dan murid tidak semestinya menggunakan kuantiti *intensif*.

Hasil kajian ini menunjukkan kebanyakan murid yang menggunakan idea nisbah antara akan menggunakan idea unitari dalam membuat hubung kait antara dua kuantiti. Misalnya, bagi menentukan kuantiti yang ingin diketahui, murid pada mulanya mencari nilai bagi satu unit dahulu dengan membahagi kuantiti dalam nisbah asal dan kemudiannya mendarab nilai satu unit tersebut dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua. Namun setiap murid menunjukkan cara yang berbeza dalam langkah pertama, yang mana lima daripada semua murid melakukan operasi bahagi secara pembahagian panjang, manakala hanya seorang murid mencongak secara lisan. Seorang murid lagi melukis gambar rajah dalam mencari nilai bagi satu unit. Semua murid juga memberikan alasan yang sama bahawa cara yang digunakan merupakan cara yang diajar di sekolah.

Hasil kajian ini sepadan dengan kajian Akar (2010) dalam mengenal pasti pemikiran yang dimiliki murid apabila menghubung kaitkan kuantiti dalam dua nisbah. Misalnya, kajian ini dan Akar mendapati murid menghubung kaitkan dua kuantiti berbeza ruang ukuran dalam nisbah asal dengan membahagi sama ada pengangka dengan penyebut atau sebaliknya. Sebagai contoh, murid dapat memilih hubungan yang munasabah antara dua kuantiti berbeza ruang ukuran sama ada "harga per belon" atau "belon per harga (RM1)". Ini menggambarkan bahawa murid melakukan operasi bahagi dan boleh menjelaskan makna hasil bahagi yang diperoleh sebelum melakukan pendaraban. Clark (2008) merujuk keupayaan murid dalam menguasai kedua-dua operasi tersebut memudahkan mereka menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran yang menekankan pemikiran multiplikatif. Sebagai tambahan, Akar (2010) turut merumuskan pemahaman idea nisbah antara adalah lanjutan daripada idea per unit.

Kajian Parish (2010) pula berbeza dengan hasil kajian ini. Misalnya, kajian mereka menunjukkan murid tidak menggunakan idea unitari seperti kajian ini walaupun murid menggunakan idea nisbah antara. Sebaliknya, murid secara spontan dapat mengenal pasti hubungan antara dua kuantiti yang berbeza ruang ukuran secara pendaraban tanpa melakukan operasi pembahagian.

5. *Semua murid Tahun Lima dalam kajian ini menggunakan idea kovarians dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti yang melibatkan kadaran langsung dan kadaran songang.*

Konsep kuantiti dan perubahan memerlukan murid berfikir bagaimana hubung kait antara kuantiti dan kovarians antara kuantiti (Lamon, 2012; Lobato & Ellis, 2010) atau dengan bahasa mudahnya, apakah hubungan antara dua kuantiti dan bagaimana dua kuantiti tersebut berubah secara serentak. Proses menganalisis apa yang berubah dan apa yang tidak berubah dalam kuantiti sangat penting dalam matematik dan kehidupan seharian. Ini kerana, kebolehan mengenal pasti perubahan dalam kuantiti dapat menggalakkan murid mengemukakan hujah, justifikasi, atau alasan atau dengan kata lain murid tidak sekadar memahami di peringkat permukaan tetapi mendalami makna yang tersirat. Pemahaman perubahan kuantiti juga harus melibatkan perbincangan tentang perubahan arah, perubahan bentuk atau saiz, dan kadar bagi perubahan (Lamon, 2012).

Hasil kajian menunjukkan semua murid dominan menggunakan idea kovarians dalam menjelaskan implikasi perubahan arah kuantiti. Semua murid mengenal pasti satu kuantiti dalam satu nisbah berubah secara serentak dengan satu lagi kuantiti dalam nisbah yang sama, yang mana perubahan kedua-dua kuantiti melibatkan dua kuantiti berubah dalam arah yang sama atau dua kuantiti berubah secara serentak dalam arah yang bertentangan.

Hasil kajian ini mempunyai persamaan dengan kajian Caddle dan Brizuela (2011) dan Mamede dan Vasconcelo, (2016). Misalnya, kajian ini dan dua kajian tersebut mendapati kebanyakan murid menggunakan idea kovarians secara lisan, iaitu mengemukakan *perkataan* yang menggambarkan perubahan bilangan objek, menggunakan *simbol* anak panah ke atas dan ke bawah bagi menunjukkan arah perubahan kuantiti, dan mengemukakan *pernyataan* yang mewakili perubahan arah dua kuantiti dalam nisbah sama ada melibatkan perubahan kadaran langsung dan kadaran songsang. Sebagai tambahan, murid berkeupayaan menjelaskan secara lisan kesan perubahan saiz dan bilangan bahagian dalam satu pecahan termasuk yang melibatkan kadaran songsang.

Namun, kajian De Bock, Van Dooren, dan Verschaffel (2015) berbeza dengan hasil kajian ini. Kajian mereka berkaitan perwakilan kadaran langsung dan kadaran songsang menunjukkan murid menghadapi masalah dalam mengenal pasti dan menjelaskan kesan perubahan satu kuantiti terhadap kuantiti lain. Umpamanya, 2/3 daripada murid melakukan kesilapan dalam mentafsirkan perwakilan berkadaran songsang, yang mana mereka menganggap dua kuantiti akan mengalami pengurangan atau peningkatan nilai secara serentak.

6. *Sebahagian murid Tahun Lima dalam kajian ini menggunakan idea invarians dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti yang melibatkan kadaran langsung dan kadaran songang.*

Lamon (2007) mencadangkan bahawa perkembangan penakulan perkadaran melibatkan dua jenis varians, iaitu kovarians dan invarians. Konsep invarians sangat abstrak dan memerlukan masa bagi murid menguasainya. Konsep ini saling berkait dengan beberapa idea seperti idea kesetaraan, idea perbandingan secara relatif, dan hubungan antara empat kuantiti dalam kadaran (Lamon, 2007). Hubungan invarians antara dua kuantiti dalam nisbah boleh dilanjutkan kepada nisbah lain yang setara dengan dua kuantiti tersebut menggunakan penaakulan perkadaran (Karplus et al., 1983; Lamon, 2007; Lobato & Ellis, 2010).

Hasil kajian ini mendapati sebahagian murid menggunakan idea invarians dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti yang melibatkan kadaran langsung. Murid mengenal pasti hubungan kesetaraan antara dua nisbah, yang mana dua kuantiti dalam satu nisbah berubah dalam arah yang sama dengan faktor skala tertentu melibatkan operasi pendaraban atau pembahagian serta mengekalkan hubungan antara kuantiti yang sepadan dalam dua atau lebih daripada dua nisbah.

Hasil kajian ini berbeza dengan kajian Park, Park, dan Kwon (2010). Misalnya, dalam kajian ini, tiga daripada murid meringkaskan dahulu satu nisbah sebelum membentuk nisbah baru dengan mendarab kedua-dua kuantiti dalam nisbah dengan angka yang sama, manakala dua lagi murid mengganda dan menjadikan separuh nisbah diberi berulang kali secara membahagi untuk membentuk nisbah lain. Kesemua murid tersebut kemudian mengenal pasti dua atau lebih dari dua nisbah adalah setara melalui operasi pendaraban atau pembahagian. Selain itu, tiga daripada lima murid tersebut turut menyatakan bilangan objek dalam kumpulan adalah kekal walaupun mempunyai nisbah yang berbeza. Ini bertentangan dengan kajian Park, Park, dan Kwon yang mendapati hanya seorang daripada daripada 14 murid yang ditemu bual mengenal pasti hubungan invarians antara nisbah bagi kadaran langsung. Kebanyakan murid menggunakan beza antara dua kuantiti melalui operasi penolakan berbanding mengaitkan kuantiti dalam nisbah secara multiplikatif. Murid menghadapi kesukaran mengenal pasti hubungan invarians antara dua kuantiti yang ditransformasikan kepada dua atau lebih dua nisbah kerana memberi tumpuan kepada kuantiti dalam nisbah secara berasingan (Lamon, 2007; Kaput & West, 1994).

Walaupun hasil kajian ini menunjukkan semua murid secara lisan menggunakan idea kovarians bagi menjelaskan kesan perubahan arah kuantiti yang membabitkan kadaran songsang, tetapi hanya tiga daripada semua murid tersebut menggunakan idea invarians dalam menjelaskan implikasi perubahan kuantiti yang melibatkan kadaran songsang. Ada kemungkinan murid Tahun Lima menggunakan rasional yang dirasakan munasabah semasa memberi penjelasan. Umpamanya, murid dengan mudah menyatakan "apabila bilangan pekerja bertambah, masa yang diambil untuk mengecat rumah akan semakin berkurang". Ini sepadan dengan kajian Johnson (2015) yang menunjukkan murid menyatakan perubahan kuantiti dalam nisbah secara kuantitatif dan bukannya melalui penyelesaian berangka. Misalnya, bagi tugasan membabitkan hubungan berkadaran songsang antara dua kuantiti, murid secara lisan menggunakan idea kovarians dengan mengemukakan beberapa perkataan yang menggambarkan peningkatan satu kuantiti menyebabkan pengurangan satu lagi kuantiti. Ini kerana murid sememangnya mempunyai pengetahuan intuitif apabila diminta mempertimbangkan situasi yang membabitkan perubahan kuantiti (Johnson, 2012; Lamon, 2012). Sebaliknya kajian oleh Pelen dan Artut (2016) bertentangan dengan kajian ini. Kajian mereka mendapati murid yang menggunakan idea invarians dalam menyelesaikan masalah melibatkan kadaran langsung tidak menggunakan idea invarians bagi masalah melibatkan kadaran songsang.

7. *Kebanyakan murid Tahun Lima dalam kajian ini beralih daripada hubungan secara penambahan kepada hubungan secara multiplikatif dalam menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran.*

Kecenderungan murid menggunakan idea hubungan penambahan dalam menyelesaikan masalah berkaitan penaakulan perkadaran akan berkurang secara beransur-ansur dengan peningkatan umur murid dan mula beralih menggunakan idea hubungan multiplikatif (Van Dooren et al., 2010). Hasil kajian ini mendapati kebanyakan murid beralih daripada hubungan secara penambahan kepada hubungan secara multiplikatif dalam membandingkan nisbah dan membuat hubung kait antara kuantiti. Misalnya, sebahagian murid pada mulanya membanding dua nisbah atau lebih daripada dua nisbah melalui operasi penolakan atau mengkoordinasi nisbah secara menambah, kemudiannya sedar terdapat cara yang berbeza seperti menggunakan idea unitari dan menentukan faktor skala.

Kajian ini berbeza dengan kajian lepas (Parish, 2010; Riehl & Steinthorsdottir, 2015; Siegler & Pyke, 2013; Sumarto, Van Galen, Zulkardi, & Darmawijoyo, 2014) yang menyatakan murid cenderung mengemukakan satu idea dalam menyelesaikan masalah berkaitan nisbah dan kadaran. Misalnya, murid dalam kajian Riehl dan Steinthorsdottir hanya menggunakan idea hubungan secara penambahan antara dua kunatiti, iaitu mencari beza antara dua kuantiti dalam satu nisbah sebelum menggunakan hasil nisbah tersebut untuk mencari satu lagi kuantiti dalam nisbah kedua. Manakala, bagi kajian ini, murid mengemukakan idea berbeza seperti murid membandingkan dua nisbah dengan menentukan berapa “kali besar”, “kali banyak”, dan “kali sempit” satu kuantiti berbanding kuantiti yang lain secara multiplkatif, iaitu dengan melakukan operasi pendaraban atau pembahagian. Begitu juga dengan Sumarto dan rakannya yang mendapati murid sama usia dengan murid dalam kajian ini tidak dapat menyelesaikan masalah membandingkan nisbah dan menentukan kuantiti dalam nisbah walaupun membabitkan struktur hubungan nombor yang mudah.

Hasil kajian ini juga sepadan dengan Christou dan Philippou (2002) yang menunjukkan murid menghubung kaitkan kuantiti dengan membentuk nisbah baru melalui gandaan kuantiti secara operasi penambahan beralih kepada menggunakan hubungan pendaraban dan pembahagian seperti idea unitari dan faktor skala. Menurut Christou dan Philippou, murid menggunakan kaedah cuba jaya bagi menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran kerana bergantung kepada konteks masalah dan struktur hubungan nombor yang terlibat dalam sesuatu tugasan. Selain itu, kajian Tjoe dan de la Torre (2014) turut mendapati majoriti murid tidak dapat menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran jenis menentukan nilai kerana gagal mengenal pasti hubung kait antara kuantiti secara multiplikatif dan memilih penyelesaian menggunakan idea penambahan.

8. *Kebanyakan murid Tahun Lima dalam kajian ini tidak menggunakan idea unit komposit dalam menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran.*

Walaupun sebahagian pengkaji (Lesh et al., 1988; Parish, 2010) menganggap murid mempunyai pengetahuan pra-penaakulan perkadaran sekiranya berkeupayaan menggunakan unit komposit bagi membentuk kumpulan nisbah setara, namun pengkaji lain pula berpendapat bahawa penaakulan perkadaran melibatkan beberapa pemahaman, yang salah satunya adalah melalui proses mengulangi atau/dan pemetakan unit komposit bagi membina nisbah setara (Lobato & Ellis, 2010). Terdapat juga pandangan lain yang menyatakan pengulangan unit komposit sebagai satu bentuk penyelesaian masalah yang lebih canggih berbanding secara penambahan kerana dapat mengekalkan hubungan konteks masalah (Clark et al., 2003; Lamon, 2012).

Dalam kajian ini, hanya seorang daripada tujuh murid yang menggunakan idea unit komposit dalam membanding dua nisbah bagi kuantiti selanjar, yang mana beliau menganggap satu daripada nisbah asal sebagai satu kumpulan sebelum mengulangi melukis kumpulan nisbah asal tersebut dalam nisbah kedua. Bagi konteks masalah keserupaaan dalam kuantiti selanjar pula, hanya sebilangan kecil murid yang mengkoordinasi nisbah menggunakan idea unit komposit dengan membina jadual.

Hasil kajian ini berbeza dengan kajian Steinthorsdottir dan Sriraman (2009) dalam menentukan satu nilai dalam kadaran. Misalnya, murid dalam kajian ini menggambarkan pengulangan unit komposit dalam bentuk lukisan dan jadual, manakala kajian Steinthorsdottir dan Sriraman pula mendapati murid membuat pengulangan unit komposit secara lisan. Kajian mereka juga berbeza dengan kajian ini dalam aspek kekerapan penggunaan idea unit komposit. Misalnya, kajian ini menunjukkan kebanyakan murid tidak menggunakan idea unit komposit semasa membanding nisbah atau menentukan nilai. Walaupun terdapat sebilangan kecil murid menggunakan idea unit komposit, namun mereka beralih kepada cara yang berbeza kerana nilai yang disasarkan tidak terdapat dalam kumpulan nisbah setara yang dibina. Sebaliknya kajian Steinthorsdottir dan Sriraman mendapati murid cenderung menggunakan idea unit komposit dengan menggandakan nisbah asal hingga mencapai unit yang dikehendaki atau menggabungkan idea unit komposit dengan idea lain seandainya nilai yang disasarkan tidak terdapat dalam kumpulan nisbah setara yang dibina.

Hasil kajian ini secocok dengan hasil kajian Carney & Crawford (2016) dalam mengenal pasti penggunaan unit komposit bagi menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran melibatkan hubungan nisbah antara atau hubungan fungsi. Misalnya, kajian ini dan kajian Carney dan Crawford mendapati kebanyakan murid beralih daripada menggunakan idea unit komposit kepada menghubungkan kuantiti secara multiplikatif.

Implikasi kepada teori

Kajian ini adalah berlandaskan perspektif psikologi konstruktivisme radikal yang membantu pengkaji dari aspek metodologi seperti reka bentuk kajian, pengumpulan data, dan penganalisaan data berdasarkan beberapa andaian yang dinyatakan dalam Bab Satu. Kajian ini turut menggunakan konsep penaakulan perkadaran dari perspektif psikologi yang dicadangkan oleh Lamon (2012) bagi membantu pengkaji dalam memperincikan soalan kajian dengan memberi tumpuan kepada empat proses kognitif, iaitu perbandingan, hubungan, justifikasi, dan implikasi. Manakala bagi konstruk matematik berkaitan nisbah dan kadaran, kajian ini memberi tumpuan kepada konteks masalah penaakulaan perkadaran melibatkan struktur konteks masalah yang berbeza berdasarkan Ben-Chaim et al. (2012).

Dapatan kajian ini memberi implikasi kepada gabungan teori konstruktivisme radikal, konsep penaakulan perkadaran oleh Lamon (2012) dan konteks masalah penaakulaan perkadaran (Ben-Chaim et al., 2012) yang digunakan kerana ia dapat menggambarkan secara mendalam tentang penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran yang dimiliki oleh murid. Konstruk psikologi dan konstruk matematik berkaitan penaakulan perkadaran membantu pengkaji dalam memahami idea yang berbeza digunakan oleh murid. Misalnya, konstruk matematik berhubung konteks masalah penaakulann perkadaran yang dicadangkan oleh Ben-Chaim et al. (2012) membolehkan murid mempamerkan idea yang berbeza seperti idea bahagian-keseluruhan, idea hasil bahagi, dan idea kovarians dan invarians mengikut konteks masalah bermula daripada menggunakan idea yang ringkas kepada idea yang memerlukan pemikiran aras tinggi, selain menggambarkan perkembangan kognitif murid. Dapatan kajian ini memberi implikasi kepada gabungan teori konstruktivisme radikal, konsep penaakulan perkadaran oleh Lamon (2012) dan konteks masalah penaakulaan perkadaran (Ben-Chaim et al., 2012) yang digunakan kerana ia dapat menggambarkan secara mendalam tentang penaakulan perkadaran berkaitan nisbah dan kadaran yang dimiliki oleh murid

Implikasi kepada amalan pendidikan

Dapatan kajian menunjukkan murid menggunakan beberapa idea yang memberi implikasi kepada amalan pendidikan matematik yang meliputi aspek pembelajaran, pengajaran, dan kurikulum.

Dalam kajian ini, murid Tahun Lima didapati membanding dan menyusun pecahan dengan menggunakan beberapa idea pecahan seperti idea kesetaraan pecahan, idea bahagian-keseluruhan, dan idea hasil bahagi, yang mana turut digunakan semasa membanding dan menyusun nisbah. Ini mencadangkan terdapat saling hubung antara konsep pecahan dan nisbah. Menurut Norton dan Windsor (2008), pembelajaran pecahan, nombor perpuluhan, dan penaakulan perkadaran melibatkan nisbah sering diajar secara berasingan tanpa menghubung kaitkan konsep yang terlibat mengakibatkan murid keliru dan menganggap konsep tertentu hanya digunakan bagi topik tertentu. Oleh kerana idea subkonstruk pecahan yang membabitkan perbandingan bahagian-keseluruhan, hasil bahagi, pengukuran, operator, kadar, dan nisbah merupakan sebahagian daripada komponen asas dalam penaakulan perkadaran (Lamon, 2008; Lobato & Ellis, 2010), maka dapatan kajian memberi implikasi dari aspek pengajaran, iaitu boleh membantu guru merancang aktiviti dan tugasan berbeza serta menarik agar dapat menggalakkan murid mengemukakan pelbagai subkonstruk pecahan dan bukan bertumpu kepada subkonstruk bahagian-keseluruhan dan hasil bahagi sahaja.

Selain itu, guru perlu mengintegrasi konsep pecahan dalam pengajaran dan pembelajaran nisbah dan kadaran dan memberi penekanan terhadap idea multiplikatif dalam pembelajaran pecahan bagi menggalakkan perkembangan penaakulan perkadaran murid. Pengajaran guru juga harus memfokuskan bagaimana hubung kait antara konteks masalah harian dengan penggunaan notasi pecahan dan nisbah agar dapat memberi peluang kepada murid meneroka masalah tersebut menggunakan pengetahuan dan pengalaman seterusnya dapat memberi justifikasi bagi jawapan atau keputusan yang dibuat.

Dapatan kajian ini menunjukkan murid Tahun Lima beralih daripada menggunakan hubungan secara penambahan kepada hubungan secara multiplikatif dalam membanding nisbah, menentukan hubungan antara kuantiti, dan menjelaskan kesan perubahan kuantiti. Misalnya, sebahagian murid pada mulanya melakukan operasi penolakan, mengkoordinasi nisbah secara menambah, atau menganggap nisbah asal sebagai unit komposit yang ditambah secara berulang kali bagi membentuk nisbah yang lain, kemudiannya sedar terdapat hubungan secara pendaraban atau pembahagian antara kuantiti dalam nisbah yang dibina dengan nisbah asal. Oleh kerana penaakulan perkadaran melibatkan pemahaman murid membina kumpulan nisbah setara secara multiplikatif (Lobato & Ellis, 2010), maka guru boleh menggunakan instrumen kajian ini untuk mengenal pasti pemahaman murid dalam topik nisbah dan kadaran bagi memudahkan guru membuat perancangan pengajaran berdasarkan keperluan murid. Mengetahui pengetahuan yang dimiliki murid bukan sahaja dapat mentafsir tingkah laku murid, malah memudahkan guru merancang pengajaran dan aktiviti pembelajaran berasaskan keperluan murid, yakni aktiviti tersebut dapat membantu murid menggunakan pengetahuan sedia ada dan membina pengetahuan baru. Selain itu, guru perlu memberi penekanan kepada perbandingan antara kuantiti nisbah secara multiplikatif dan tidak hanya bergantung kepada kaedah unitari seperti yang terkandung dalam buku teks bagi topik nisbah dan kadaran.

Standard pembelajaran matematik bagi topik nisbah dan kadaran Tahun Empat dan Tahun Lima masing-masing menumpukan agar murid dapat menentukan suatu nilai menggunakan kaedah unitari dan menentukan suatu nilai berdasarkan nisbah yang diberi. Dalam kajian ini, murid menggunakan idea kovarians dan invarians dalam menjelaskan kesan perubahan kuantiti dalam nisbah dan kadaran. Misalnya, semua murid mengenal pasti kesan perubahan kuantiti secara kadaran langsung, manakala terdapat sebahagian murid yang berkeupayaan menjelaskan kesan perubahan kuantiti berdasarkan kadaran songsang. Ini menunjukkan murid melangkau setapak ke hadapan daripada standard pembelajaran bagi topik nisbah dan kadaran yang ditetapkan oleh KPM. Justeru itu, dapatan kajian ini boleh digunakan oleh penggubal kurikulum matematik sekolah rendah dengan mencadangkan agar memperluaskan standard pembelajaran dalam kurikulum standard sekolah rendah yang sedia ada daripada memberi tumpuan kepada operasi atau prosedur tertentu yang menghadkan pemikiran murid untuk berfikir secara kreatif dan inovatif.

Implikasi kepada Kajian Lanjut

Kajian ini telah mengenal pasti penaakulan perkadaran yang dimiliki oleh tujuh murid Tahun Lima dalam nisbah dan kadaran. Maka, dicadangkan kajian ini dilanjutkan terhadap murid Tahun Empat dan Tahun Enam untuk mengesahkan dan menghuraikan dapatan kajian ini. Ada kemungkinan terdapat persamaan atau perbezaan tentang idea yang digunakan dalam menyelesaikan masalah penaakulan perkadaran. Selain itu, kajian ini dijalankan di sekolah rendah di pusat bandar. Kajian lanjut dalam seting yang berbeza seperti kawasan luar bandar atau pinggir bandar boleh dilaksanakan bagi memperoleh pengetahuan penaakulan perkadaran murid yang berbeza. Dapatan kajian lanjut tersebut dapat memperkayakan lagi maklumat tentang penaakulan perkadaran dalam nisbah dan kadaran.

Oleh kerana kajian ini menumpukan kepada aspek penaakulan perkadaran yang dimiliki oleh murid, maka kajian ini memberi ruang kepada kajian lanjut dalam aspek yang berbeza bagi menjawab beberapa persoalan seperti yang berikut: (a) apakah tahap penaakulan perkadaran bagi murid sekolah rendah?; (b) apakah indikator yang ditunjukkan oleh murid sekolah rendah dalam setiap aras penaakulan perkadaran?; dan (c) bagaimana murid sekolah rendah menghubung kaitkan pecahan dan nisbah dan kadaran? Dapatan daripada kajian lanjut ini dapat memberi maklumat kepada penggubal kurikulum untuk menyemak semula atau membuat penambahbaikan mengikut keperluan murid terhadap bidang pembelajaran yang baru diperkenalkan, iaitu bidang perkaitan dan algebra.

Kajian ini menumpukan kepada bidang pembelajaran matematik perkaitan dan algebra bagi topik nisbah dan kadaran. Justeru itu, kajian lanjut bagi mengenal pasti penaakulan perkadaran murid sekolah rendah merentas bidang pembelajaran matematik yang lain, seperti bidang pembelajaran sukatan dan geometri, dan bidang pembelajaran statistik dan kebarangkalian boleh dilaksanakan. Dapatan kajian tersebut dapat membekalkan maklumat tentang persamaan dan perbezaan penaakulan perkadaran murid dalam bidang pembelajaran yang berbeza.

RUJUKAN

Akar, G. (2010). Different levels of reasoning in within state ratio conception and the conceptualization of rate: A possible example. Dalam P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.). *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, h. 711–719). Columbus, OH: The University of Ohio.

Akkus, O. & Duatepe-Paksu, A. (2006). Orantisal akil yürütme becerisi testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtari gelistirilmesi. *Eurasian Journal of Educational Research, 25,* 1-10.

Alatorre, S. & Figueras, O. (2003). Interview design for ratio comparison tasks. Dalam Pateman, Dougherty, & Zilliox (Eds). *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of the IGPME (PME27) and PMENA (PMENA25),* (Vol. 2, h. 17-24).

Aming-Attai, R. (2012). *The multiplicative reasoning of students with mathematical learning disabilities: Current schemes and new constructions.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, Indiana University.

Arbaugh, F., Brown, C., Lynch, K., & McGraw, R. (2004). Students' ability to construct responses (1992-2000): Findings from short and extended constructed-response items. Dalam P. Kloosterman & F.K. Lester (Eds), *Results and Interpretations o f the 1990-2000 Mathematics Assessments of the National Assessment of Educational Progress* (h. 337-363). Reston, VA: NCTM.

Artut, P. D., & Pelen, M. S. (2015). 6th grade students' solution strategies on proportional reasoning problems. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 197, 113-119.

Ary, D., Jacobs, L. C., & Sorenson, C. (2010). *Introduction to research in education* (8th ed.). Belmont, CA: Wadsworth.

Avcu, R., & Avcu, S. (2010). 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. *9*, 1277–1281.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making Mathematics Reasonable in School. Dalam J. Kilpatrick, W. G.Martin. & D. Schifter. (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (h. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. Dalam J. Boaler (Eds.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (h. 83–104). San Francisco, CA: JAI/Ablex.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. Dalam L. I. Tatsien (Eds.), *Proceedings of the International Congress o f Mathematicians* (Vol. 3, h. 907-920). Beijing: Higher Education Press.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1983). Rational Number, Ratio, and Proportion. Dalam D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (h. 296–333). New York: MacMillan Publishing.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. Dalam R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes* (h. 91–125). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36,* 247-273.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Illany, B. (2012*). Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education* (*pre and in-service mathematics teachers of elementary and middle school classes*). Rotterdam; Bostan: Sense Publishers.

Benson, S. L. D. (2009). *The influence of studying students' proportional reasoning on middle school mathematics teachers' content and pedagogical content knowledge.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, University of Houston.

Bieda, K., Ji, X., Drwencke, J., & Picard, A. (2013). Reasoning-and-proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research, 64*, 71-80.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics, 10*(2).

Blanton, M. L., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F., & Confrey, J. (2007). Early algebra. Dalam VJ Katz (ed.). Algebra: *Gateway to a technological future*. New York: MAA.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology, 44,* 1478–1490.

Brawand, A. E. (2013). *Proportional reasoning word problem performance for middle school students with high-incidence disabilities (HID).* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, George Mason University.

Bright, G.W., Joyner, J.M., & Wallis, C. (2003). Assessing proportional thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(3), 166-172.

Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 613–632.

Carney, M., & Crawford, A. (2016). Students' reasoning around the functional relationship. *Psychology Of Mathematics & Education Of North America*, 187-190.

Caddle, M. & Brizuela, B. (2011). Fifth grader's additive and multiplicative reasoning: establishing connections across conceptual fields using a graph. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 224-234.

Carney, M., & Crawford, A. (2016). Students' reasoning around the functional relationship. *Psychology Of Mathematics & Education Of North America*, 187–191.

Carney, M., Smith, E., Hughes, G., Brendefur, J., Crawford, A., & Totorica, T. (2015). Analysis of students' proportional reasoning strategies. *Psychology Of Mathematics & Education Of North America*, 141-148.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Gomez, C., Rousseau, C., Steinthorsdottir, O. B., Valentine, C., Wagner, L., Wiles, P. (1999). *An analysis of student construction of ratio and proportion understanding.* Kertas dibentangkan di American Educational Research Association, Montreal, Canada: University of Wisconsin-Madison.

Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. Dalam P. Steffe, P. Nesher & G. B. (Eds.), *Theories of mathematical learning*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293–316.

Cheng, D., Star, J. R., & Chapin, S. (2013). Middle school students' steepness and proportional reasoning. *New Waves*, *16*(1), 22-45.

Christou, C., & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 321-336.

Clark, M., Berenson, S., & Cavey, L. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 297-317.

Clarke, D. M. (2011). Fractions as division: The forgotten notion? Dalam J. Way & J. Bobis (Eds.), *Fractions: Teaching for understanding* (h. 33-41). Adelaide, SA: The Australian Association of Mathematics Teachers (AAMT).

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72,* 127–138.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). '10 practical tips for making fractions come alive and make sense'. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(7), 373-380.

Confrey, J. (1980). Clinical interviewing: Its potential to reveal insights in mathematics education. Dalam R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Berkeley, California.

Common Core State Standards for Mathematics. (2010). *Common core state standards initiative for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices (NGA Center).

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404- 407.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. Dalam D. Owens (EdS.). *Research ideas for the classroom* (h. 159- 178). New York: Macmillan Publishing.

Cramer, K., Post, T., & DelMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, *33*, 111–144.

Creswell, J. W. (2012). *Qualitative inquiry and research design*: *Choosing among the five traditions (3rd ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Davis, R. B. & Maher, C. A. (1996). A new view of the goals and means for school mathematics. Dalam M. C. Pugach & C. L. Warger (Eds.), *Curriculum Trends, Special Education, and Reform: Refocusing the Conversation*. (h. 66-83). New York: Teachers College Press.

De Bock, D., van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2015). Students' understanding of proportional, inverse proportional, and affine functions: Two studies on the role of external representations. *International Journal Of Science & Mathematics Education*, *13*, 47-69.

DeWolf, M., Grounds, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2013). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *40*, 53–72.

Dougherty, B., Bryant, D. P., Bryant, B. R., & Shin, M. (2016). Helping Students With Mathematics Difficulties Understand Ratios and Proportions. *Teaching Exceptional Children*, *49*(2), 96–105.

Doyle, K.M., Dias, O., Kennis, J.R., Czarnocha, B. & Baker, W. (2015). The rational number subconstructs as a foundation for problem solving. *Adults Learning Mathematics: An International Journal*, *11*(1), 21-42.

Fernandez, C., Llinares, S., van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *Studia Psychologica 53*(1), 69–81.

Fielding-Wells, J., Dole, S., & Makar, K. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(1), 47-77.

Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 361-372.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (h. 178–209). Dordrecht: Reidel.

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., Jordan, N. C., Siegler, R., Gersten, R., & Changas, P. (2013). Improving at risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology*, *105*, 683-700.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction (7th ed.)*. Boston, MA: A & B Publications.

Gay, L. R. & Airasian, P. (2003). *Educational research: Competencies for analysis and applications* (7^{th} ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Gresens, A. (2011). *Effect of teaching comprehension strategies on improving math problem solving skills in Title I schools*. Tesis Ph.D tidak diterbitkan, Walden University, Minneapolis, MN.

Hackenberg, A. J. (2005). *Construction of algebraic reasoning and mathematical caring relations*. Tesis Ph.D tidak diterbitkan, University of Georgia, Athens.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383-432.

Haja, S., & Clarke, D. (2011). Middle school students' responses to two-tier tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(1), 67-76.

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. Dalam N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 3, h. 17–24). Honolulu, HI: PME.

Harel, G. (2008). What is mathematics? a pedagogical answer to a philosophical question. Dalam B. Gold & R. A. Simons (Eds.), *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (h. 265–290). Washington, DC: Mathematical American Association.

Harel, G. & Behr, M. (1989). Structure and hierarchy of proportion problems and their representations. *Journal of Mathematical Behavior, 8*(1), 77-119.

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme of constancy of taste, *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 324–345.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. Dalam F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (h. 805 – 842). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project* (Rep.). London, United Kingdom: NFER-Nelson.

Hart, K. M. (1988). Ratio and Proportion. Dalam J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Heinz, K. R. (2000). *Conceptions of ratio in a class of pre-service and practicing teachers.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, The Pennsylvania State University.

Heller, P. M., Post, T. R., Behr, M., & Lesh, R. (1990). Qualitative and numerical reasoning about fractions and rates by seventh- and eighth-grade students. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(5), 388-402.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. Dalam J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (h. 199-223). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2013). Development and application of a two tier diagnostic instrument to assess middle-year students' proportional reasoning. *Mathematics education research group of Australasia, 25*(4), 523-545.

Hoffer, A. & Hoffer S. (1988). *Ratios and Proportional Thinking In Teaching Mathematics in Grades K-8,* (h. 285-312), Boston, Mass., Allyn & Bacon.

Howe, C., Luthman, S., Ruthven, K., Mercer, N., Hofmann, R., Ilie, S., & Guardia, P. (2015). Rational number and proportional reasoning in early secondary school: towards principled improvement in mathematics. *Research In Mathematics Education, 17*(1), 38-56.

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 391-417.

Hunting, R. P. & Sharpley, C. F. (1985). *A preliminary investigation of preschoolers' cognition of fractional units*. Unpublished manuscript. Monash University.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York, NY: Basic Books

Jeong, Y., Levine, S., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development*, *8*, 237–256.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 313–330.

Johnson, H. L. (2015). Secondary students' quantification of ratio and rate: A framework for reasoning about change in covarying quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 64–90.

Johnson, K. H. (2013). *Understanding proportional reasoning in pre-service teachers.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, The Pennsylvania State University.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? what is algebraic reasoning? Dalam J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L.Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (h. 5–18). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing value: proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. Dalam G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (h. 235-287). Albany, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., Karplus, E. & Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school: Ratio, the influence of cognitive style. *School science and mathematics*, *4*(74), 476-482.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. Dalam R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (h. 45-90). New York: Academic Press.

Kementerian Pendidikan Malaysia. (2012). *Laporan Awal Pelan Pembangunan Pendidikan Malaysia 2013-2025*. Dicapai daripada http://www.moe.gov.my/userfiles/file/PPP/ Preliminary-Blueprint-BM.pdf.

Kementerian Pendidikan Malaysia. (2013). *Draf Kurikulum Standard Sekolah Rendah: Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran Matematik Tahun Empat*. Kuala Lumpur: Bahagian Pembangunan Kurikulum.

Kementerian Pendidikan Malaysia. (2014a). *Draf Kurikulum Standard Sekolah Rendah: Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran Matematik Tahun Lima*. Kuala Lumpur: Bahagian Pembangunan Kurikulum.

Kementerian Pendidikan Malaysia. (2014b). *Draf Kurikulum Standard Sekolah Rendah: Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran Matematik Tahun Enam*. Kuala Lumpur: Bahagian Pembangunan Kurikulum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8,* 139-151.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. Dalam T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (h. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J. & Swafford, J. (2002). *Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lamon, S. J. (1993a). Ratio and Proportion: children's cognitive and metacognitive processes. Dalam T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (h. 131-156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1993b). Ratio and proportion: Connecting content and children’s thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41–61.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. Dalam J. Confrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (h. 89-120). Albany: State University of New York Press.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers 3rd eds*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. Dalam F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, h. 629–668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Langrall, C.W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the MiddleSchool*, *6*, 254-61.

Lara Roth, S. M. (2006). *Young children's beliefs about arithmetic and algebra.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, Tufts University.

Leighton, J, P. (2003). Defining and describing reasoning. Dalam J. P. Leighton & R. J. Sternberg (Eds.), The nature of reasoning. New York, NY: Cambridge.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. Dalam J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (h. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. Dalam K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra*. *The 12th ICMI Study*. (h. 73-96). Boston: Kluwer.

Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in School Tasks. *Educational studies in Mathematics*, *41*(2), 165-190.

Liu, C. H., Xin, Z. Q., Lin, C. D., & Thompson, C. A. (2013). Children's mental representation when comparing fractions with common numerators, *Educational Psychology*: *An International Journal of Experimental Educational Psychology*, *33*(2), 175-191.

Lo, J. & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education 28*(2), 216-236.

Lobato, J. & Ellis, A, B. (2010). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions & Proportional Reasoning: Grade 6-8.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16–32.

Mamede, E., & Vasconcelos, I. (2016). The inverse relation between the size and the number of parts. *Journal of the European Teacher Education Network, 11*, 86-98.

Martinie, S. L. (2007). *Middle school rational number knowledge.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, Kansas State University.

McIntosh, M. B. (2013). *Developing Proportional Reasoning in Middle School Students*. Tesis Ph.D tidak diterbitkan, The University of Utah.

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Misailidou, C, & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 335-368.

Mix, K.S., Huttenlocher, J. & Levine, S. C. (2002). *Quantitative Development in infancy and Early Childhood.* New York: Oxford.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), h. 122-147.

Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1991). Young children's division strategies. *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychological of Mathematics Education, 4*, 17-24.

Nabors, W. (2003). From fractions to proportional reasoning: A cognitive schemes of operation approach. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 133-179.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles and Standards for School Mathematics*: Introduction. Dicapai pada 22 Mac, 2014 daripada, http://Standards.nctm.org/documents/chapter1/index/html

Ndalichako, J. L. (2013). Analysis of pupils' difficulties in solving questions related to fractions: The case of primary school leaving examination in Tanzania. *Creative Education*, *4*(9), 69–73.

Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implication of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Nik Azis, N.P. (1987). *Children's Fractional Schemes*. Tesis Ph.D tidak diterbitkan, University of Georgia, Athens, Georgia.

Nik Azis, N.P. (1999). *Pendekatan Konstruktivisme Radikal dalam pendidikan matematik*. Kuala Lumpur: Universiti Malaya.

Nik Azis, N.P. (2009). *Nilai dan etika dalam pendidikan matematik.* Kuala Lumpur: Universiti Malaya.

Nik Azis, N.P. (2014). *Pengembangan nilai dalam pendidikan matematik dan sains.* Kuala Lumpur: Universiti Malaya.

Nikula, J. (2010). *Secondary school students' proportional reasoning*. Teaching and Learning Mathematics: Translating Research for Secondary School Teachers. (h. 1-5). Reston, VA: NCTM.

Niss, M. (2007). Reactions on the state and trends in research on mathematics teaching and learning. From here to Utopia. Dalam F. Lester (Ed.), *2nd handbook of research on mathematics teaching and learning* (h. 1293–1312).

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 1-Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part 2-Problem-structure at successive stages: problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363.

Norton, S. & W. Windsor (2008). Students' Attitudes Towards Using Materials to Learn Algebra: A Year 7 Case Study. *Mathematics Education Group of Australia* (h. 369-376), Brisbane, MERGA.

Ontario Ministry of Education. (2013). Paying attention to proportional reasoning. Dicapai daripada http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/publications.html

Ooten, C. H. (2013). *Focus on Fractions to Scaffold Algebra*. Tesis Ph.D tidak diterbitkan, Claremont Graduate University.

Oser, F. K. & Baeriswyl, F. J. (2001). Choreographies of teaching: Bridging instructionto learning. Dalam V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.) (h. 1031-1065). Washington, DC: American Educational Research Association.

Parish, L. (2010). Facilitating the Development of Proportional Reasoning through Teaching Ratio. Dalam L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Mathematics Education Research Group of Australasia,* St Lucia, Qld.

Park, J. S., Park, J. H., & Kwon, O. N. (2010). Characterizing the proportional reasoning of middle school students. *The SNU Journal of Education Research*. *19*, 119-144.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative research and evaluation methods (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Pelen, M.S., & Artut, P.D. (2016). Seventh grade students’ problem solving success rates on proportional reasoning problems. *International Journal of Research in Education and Science, 2*(1), 30-34.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30,* 5-38.

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. Dalam A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12,* (h. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pothier, Y., & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 307–317.

Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children’s numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, *79*(2), 375–394.

Resnick, L. & Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. Dalam T. P.Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (h. 107-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Reys, R., Suydam, M. & Lindquist, M. (1995). *Helping Children Learn Mathematics (4^{th} Ed.)*. Mass., USA: Allyn and Bacon.

Riehl, S. M., & Steinthorsdottir, O. B. (2015). Student success and strategy use on missing-value proportion problems with different number structures. *Conference Papers-Psychology Of Mathematics & Education Of North America*, 225-228.

Rips, L. J. (1994). *The psychology of proof: Deductive reasoning in human thinking*. Cambridge, MA: MIT.

Russell, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra: Strategies for Building Algebraic Thinking in the Elementary Grades*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Schoenfeld, A. H. (2004). The math wars. *Educational Policy*, *18*(1), 253-286.

Sherin, B. & Fuson, K. C. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 347-395.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*(10), 1994–2004.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Mathematical modelling as a component of understanding reatio-as-measure: A study of perspective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 183-197.

Simon, M. A., & Placa, N. (2012). Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 35-41.

Singapore Ministry of Education. (2007). Primary mathematics syllabus.Singapore: Ministry of Education, Curriculum Planning and Development Division. Dicapai daripada www1.moe.edu.sg/cpdd/doc/Maths_Pri.pdf

Singer-Freeman, K. E.,& Goswami,U. (2001). Does a half pizza equal half a box of chocolate? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, 16, 811–829.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(3), 271-292.

Smith, M. S., Stein, M. K., Silver, E. A., Hillen, A. F., & Heffernan, C. (2001). *Designing new learning experiences for teachers of mathematics: Integrating cases and other practice based materials.* Kertas dibentangkan di The Annual Meeting of the American Educational Research Association, Seattle, WA.

Squire, S., Davies, C., & Bryant, P. (2004). Does the cue help? Children's understanding of multiplicative concepts in different problem contexts. *British Journal of Educational Psychology, 74*, 515–32.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understandingof the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503-518.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Stake, R. E. (2000). Case studies. Dalam N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2nd ed.) (h. 435-454). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Steffe, L. P. (2007). Radical Constructivism and School Mathematics. Dalam M.Larochelle (ed.), *Key works in radical constructivism* (h. 279-289). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Steffe, L. P. (1995). Alternative epistemologies: An educator's perspective. Dalam L. P.Steffe & J. Gale (Eds.), Constructivism in education (pp. 489–523). Hillsdale, NJ:Erlbaum.

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Steffe, L. P., & Olive, J. (Eds.). (2010). *Children's fractional knowledge.* New York, NY: Springer.

Steinthorsdottir, O. B. (2003). *Making meaning of proportion: A study of girls in two Icelandic classrooms.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, University of Wisconsin, Madison.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variables influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. Dalam J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehikova (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (h. 225-232). Prague: Charles University in Prague.

Steinthorsdottir, O. B., & Sriraman, B. (2009). Icelandic 5th-grade girls' developmental trajectories in proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 6-30.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., & Gardiner, A. (2015). Just say YES to early algebra! *Teaching Children Mathematics, 22*(2), 92-101.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed. Dalam T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics*: *An international perspective* (h. 347–372). Hove: Psychology Press.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning and proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 258–288.

Sumarto, S.N., Van Galen, F., Zulkardi, & Darmawijoyo (2014). Proportional Reasoning: How do 4th grades use their intuitive understanding? *Canadian Centre of Science and Education*, *7*(1), 69-80.

Tall, D. (1991). The pschology of advanced mathematical thinking. Dalam Tall, D (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (h. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (2000). Radical constructivism: Reflections and directions. Dalam L. P. Steffe & P. W. Thompson (Eds.), Radical constructivism in action: Building on the pioneering work of Ernst von Glasersfeld (pp. 412-448). London: Falmer Press

Thompson, A. G. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. Dalam G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (h. 181-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Thompson, P. W. & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. Dalam J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (h. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tjoe, H., & de la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning?. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 1-7.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 17*(4), 401-412.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Van de Walle, J., Karp, K.S. & Bay-Williams, J.M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (7th ed.),* Boston: Pearson/Allyn & Bcon.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication … and back: the development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360–381.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? Dalam G. Arel, & J. Confrey (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (h. 41–59). Albany: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. Dalam M. Landau (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (h. 127–174). New York: Academic Press.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* London, England: The Falmer Press.

Witherspoon, T. F. (2014). *A standard introduced in the common core state standardards for third graders.* Tesis Ph.D tidak diterbitkan, The University of Alabama, Birmingham.

Wright, V. (2014). Towards a hypothetical learning trajectory for rational number. *Mathematics Education Research Journal, 26*(3), 635-657.

Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1990). Small group interactions as a source of learning oppurtunities in second grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), 390-408.

Yang, D. C & Liu, Y. F. (2013). Examining the differences on comparing fraction size for 5th-graders between contextual and numerical problems. *Asian Journal of Education and e-Learning, 1*(2), 112-117.

Yin, R. (2014). *Case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

SENARAI PEMBENTANGAN DAN PENERBITAN KERTAS KERJA

Fazura, M.N., Sharifah Norul Akmar, S.Z., & Leong, K.E. (2016). Pemahaman informal murid tahun lima tentang perkadaran. *Jurnal Sains Humanika*, *4*(3), 47-50.

Fazura, M.N., Sharifah Norul Akmar, S.Z., & Leong, K.E. (2015). Pemahaman informal murid tahun lima tentang perkadaran. Kertas kerja dibentangkan di *Simposium Kebangsaan Sains Matematik 23*, Universiti Teknologi Malaysia. Johor, Malaysia pada 24 – 26 November 2015.

Fazura, M.N., Sharifah Norul Akmar, S.Z., & Leong, K.E. (2015). Proportional Reasoning: Does year five pupils use relative thinking? Kertas kerja dibentangkan di *The 3rd International Postgraduate Conference on Science and Mathematics 2015*, Universiti Pendidikan Sultan Idris, Perak, Malaysia. pada 10-11 Oktober 2015.

Fazura, M.N.; Sharifah Norul Akmar, S.Z., & Leong, K.E. (2015). Penaakulan perkadaran murid tahun lima: strategi penyelesaian masalah *missing value*. *Jurnal Kurikulun Pengajaran Asia Pasifik*, *3*(3).

Fazura, M.N., Sharifah Norul Akmar, S.Z., & Leong, K.E. (2016). Penaakulan perkadaran murid tahun lima dalam topik nisbah dan kadaran. *Jurnal Pendidikan Malaysi*a, *41*(2).