PEMAHAMAN GURU MATEMATIK TAHUN ENAM TENTANG PEMBAHAGIAN NOMBOR BULAT

HOI SIM MIN

FAKULTI PENDIDIKAN
UNIVERSITI MALAYA
KUALA LUMPUR

2018

PEMAHAMAN GURU MATEMATIK TAHUN ENAM
TENTANG PEMBAHAGIAN NOMBOR BULAT

HOI SIM MIN

TESIS DISERAHKAN SEBAGAI MEMENUHI KEPERLUAN BAGI IJAZAH
DOKTOR FALSAFAH

FAKULTI PENDIDIKAN
UNIVERSITI MALAYA
KUALA LUMPUR

2018

UNIVERSITI MALAYA
PERAKUAN KEASLIAN PENULISAN

Nama: HOI SIM MIN

No. Matrik: PHA 100020

Nama Ijazah: DOKTOR FALSAFAH

Tajuk Kertas Projek/Laporan Penyelidikan/Disertasi/Tesis ("Hasil Kerja ini"):

PEMAHAMAN GURU MATEMATIK TAHUN ENAM TENTANG PEMBAHAGIAN NOMBOR BULAT

Bidang Penyelidikan: PENDIDIKAN MATEMATIK

Saya dengan sesungguhnya dan sebenarnya mengaku bahawa:

(1) Saya adalah satu-satunya pengarang/penulis Hasil Kerja ini;
(2) Hasil Kerja ini adalah asli;
(3) Apa-apa penggunaan mana-mana hasil kerja yang mengandungi hakcipta telah dilakukan secara urusan yang wajar dan bagi maksud yang dibenarkan dan apa-apa petikan, ekstrak, rujukan atau pengeluaran semula daripada atau kepada mana-mana hasil kerja yang mengandungi hakcipta telah dinyatakan dengan sejelasnya dan secukupnya dan satu pengiktirafan tajuk hasil kerja tersebut dan pengarang/penulisnya telah dilakukan di dalam Hasil Kerja ini;
(4) Saya tidak mempunyai apa-apa pengetahuan sebenar atau patut semunasabahnya tahu bahawa penghasilan Hasil Kerja ini melanggar suatu hakcipta hasil kerja yang lain;
(5) Saya dengan ini menyerahkan kesemua dan tiap-tiap hak yang terkandung di dalam hakcipta Hasil Kerja ini kepada Universiti Malaya ("UM") yang seterusnya mula dari sekarang adalah tuan punya kepada hakcipta di dalam Hasil Kerja ini dan apa-apa pengeluaran semula atau penggunaan dalam apa jua bentuk atau dengan apa juga cara sekalipun adalah dilarang tanpa terlebih dahulu mendapat kebenaran bertulis dari UM;
(6) Saya sedar sepenuhnya sekiranya dalam masa penghasilan Hasil Kerja ini saya telah melanggar suatu hakcipta hasil kerja yang lain sama ada dengan niat atau sebaliknya, saya boleh dikenakan tindakan undang-undang atau apa-apa tindakan lain sebagaimana yang diputuskan oleh UM.

Tandatangan Calon Tarikh:

Diperbuat dan sesungguhnya diakui di hadapan,

Tandatangan Saksi Tarikh:

Nama:

Jawatan

ABSTRAK

Kajian ini berlandaskan teori konstruktivisme radikal untuk mengenal pasti pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Reka bentuk kajian ini ialah kajian kes yang melibatkan enam orang guru Matematik sekolah rendah di negeri Selangor dan Melaka yang dipilih melalui kaedah pensampelan bertujuan. Data dikumpul melalui lima sesi temu duga klinikal yang melibatkan gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan dan penyelesaian masalah dengan rakaman video.

Hasil kajian menunjukkan bahawa gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru boleh dikelaskan kepada lima kategori: simbolik, konseptual, prosedural, figuratif, dan praktikal. Selain itu, perwakilan tentang ayat matematik melibat operasi bahagi yang dimiliki guru boleh dikelaskan kepada empat kategori: figuratif, operatif, prosedural dan simbolik, manakala perwakilan gambar rajah selanjar dan diskret tentang pembahagian nombor bulat pula hanya dikelaskan kepada satu kategori, iaitu simbolik.

Kajian ini juga mendapati guru mempunyai empat tafsiran tentang makna bahagi, empat tafsiran tentang makna nombor bahagi, enam tafsiran tentang makna hasil bahagi, dan lima tafsiran tentang makna nombor yang dibahagi. Selain itu, guru didapati mempunyai dua jenis penaakulan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, iaitu penaakulan deduktif dan penaakulan induktif. Seterusnya, kajian ini mendapati guru mempunyai empat pola pemikiran umum dan satu algoritma dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, iaitu pola pemikiran umum tentang pemetakan, pengukuran, penolakan berulang, dan songsangan darab, dan algoritma pembahagian panjang.

Hasil kajian ini juga mendapati guru membina pola pemikiran umum bagi pembahagian nombor bulat sendiri dalam konteks melakukan aktiviti aritmetik dan membentuk saling hubungan antara pola pemikiran umum berbeza yang digunakan untuk memberi makna kepada situasi tertentu. Implikasi bagi kajian ini termasuklah kajian lanjut adalah diperlukan untuk mengenal pasti sama ada pola pemikiran umum tentang pembahagian nombor bulat yang dimiliki guru berkembang dalam peringkat tertentu. Walaupun bahan selanjar dan diskret adalah penting dalam membantu guru membina makna pembahagian nombor bulat, usaha harus dilakukan untuk membantu guru membuat refleksi dan abstraksi terhadap aktiviti mereka.

Kata kunci: pembahagian, temu duga klinikal, pemahaman, makna, perwakilan, penaakulan, penyelesaian masalah, konstruktivisme radikal.

YEAR SIX MATHEMATICS TEACHERS' UNDERSTANDING OF DIVISION OF WHOLE NUMBER

ABSTRACT

This study is based on the theory of radical constructivism which aims to identify Year Six Mathematics teachers' understanding of the division of whole numbers. The design of this study is a case study involving six primary school mathematics teachers in Selangor and Melaka who were selected through specific purposive sampling method. Data was collected through five clinical interviews involving mental images, representations, meaning, reasoning and problem solving, which was captured on video.

The results showed that the mental images of division of whole numbers of teachers are classified into five categories, namely symbolic, conceptual, procedural, figurative, and practical. In addition, representation number sentences of division of teachers are classified into four categories, namely figurative, operative, procedural and symbolic, while the representation diagrams of continuous and discrete of division of whole numbers can only be classified in one category, that is symbolic.

The study also found that teachers have four interpretations of the meaning of division, four interpretations of the meaning of divisor, six interpretations of the meaning of quotient, and five interpretations of the meaning of dividend respectively. In addition, teachers have two reasonings in problem solving involving division of whole numbers, namely deductive reasoning and inductive reasoning. This study also found that teachers have four general patterns of thought and an algorithm to solve the problem of division of whole numbers, that is, the general pattern of thought of partition, measurement, repeated subtraction, the inverse of multiplication , and long division algorithm.

In conclusion, teachers construct a general pattern of thought of division of whole numbers in the context of doing arithmetic activities and they form the interconnections between different general patterns of thought that are used to give meaning to a particular situation. The implications of this study include further research to identify whether the general pattern of thought of the division of whole numbers of teachers is developed in certain stages. Even though continuous and discrete materials are important in helping teachers generate meaning of division of whole numbers, efforts must be made to help teachers make the reflection and abstraction of their activities.

Key words: division, clinical interview, understanding, meaning, representation, reasoning, problem solving, radical constructivism.

PENGHARGAAN

Saya ingin mengambil kesempatan ini merakamkan penghargaan yang tidak terhingga dan ucapan jutaan terima kasih kepada penyelia dan penasihat saya, Profesor Dr. Nik Azis Nik Pa dan Profesor Madya Datin Dr. Sharifah Norul Akmar kerana telah meluangkan banyak masa dan tenaga beliau untuk membimbing saya dengan penuh kesabaran serta membantu saya menyiapkan kajian ini.

Saya juga ingin merakamkan rasa penghargaan saya kepada guru-guru kerana sudi menjadi responden saya agar saya dapat menyiapkan kajian ini. Selain itu, saya juga ingin merakamkan ucapan setinggi-tinggi terima kasih kepada pihak Kementerian Pendidikan Malaysia kerana memberikan biasiswa dalam Program Pengajian Secara Separuh Masa kepada saya melanjutkan pelajaran ke peringkat Doktor Falsafah. Tidak ketinggalan, penghargaan seterusnya saya tujukan kepada rakan seperjuangan, dan juga semua pensyarah yang telah memberikan saya bimbingan serta tunjuk ajar yang tidak ternilai sepanjang pengajian saya di Universiti Malaya.

Saya juga merakamkan penghargaan yang tidak ternilai kepada Pn. Lim Chooi Beng, seorang isteri yang sentiasa memahami komitmen suami, dan memberi sokongan dan bantuan. Selain itu, saya juga mengucapkan berbanyak-banyak terima kasih kepada anak tercinta, Hoi Zhi Yean, dan Hoi Zhi Ling kerana sentiasa berdoa supaya ayahanda menyiapkan pengajian ini dengan jayanya. Terima kasih juga buat arwah bapa dan ibu yang dikasihi, emak mertua yang sentiasa mengerti, dan ahli keluarga serta sahabat handai yang sering memberikan dorongan dan motivasi.

Akhir sekali, semoga Tuhan membalas jasa baik kepada semua yang telah membantu saya dalam penyempurnaan kertas projek ini.

KANDUNGAN

Bab 3 Metodologi Kajian

Bab 4 Hasil Kajian

Bab 5 Perbincangan, Kesimpulan dan Implikasi

Senarai Jadual

Senarai Rajah

Senarai Lampiran

BAB 1 PENGENALAN

Latar Belakang Kajian

Pendidikan sekolah rendah amat penting untuk kesinambungan ke peringkat pendidikan yang lebih tinggi, "guru merupakan ejen yang paling berpengaruh untuk mencapai matlamat pendidikan" (Hill, Rowan, & Ball, 2005). Ball (2002) menegaskan bahawa kualiti pengajaran bergantung pada apa yang dilakukan guru dan tingkah laku guru ini bergantung kepada tahap pengetahuan matematiknya. Dengan pengetahuan yang berkaitan, guru dapat membantu murid memperoleh pemahaman numerasi seperti yang dihasratkan oleh matlamat pendidikan matematik (Siti Rahaimah & Noraini, 2014). Justeru itu, guru perlu mengaplikasikan pengetahuan untuk menjayakan pengajaran numerasi terutamanya kepada murid-murid sekolah rendah.

Pengajaran matematik yang berkesan memerlukan pengetahuan dan pemahaman tentang kandungan matematik, murid sebagai pembina pengetahuan matematik, dan strategi pengajaran yang berdaya maju. Dengan itu, guru perlu memahami idea besar tentang matematik dan berupaya untuk mewakilkan matematik sebagai usaha koheren dan konstruktif. Ini adalah penting, kerana keputusan dan tindakan guru dalam bilik darjah akan mempengaruhi keberkesanan murid mempelajari matematik adalah berdasarkan pengetahuan ini (Nik Azis, 2008).

Penghakikian Wawasan Pendidikan Matematik bagi melahirkan murid yang mempunyai kekuatan matematik bertaraf dunia memerlukan guru yang didik, diberi sokongan, dan dinilai dalam cara yang berbeza daripada amalan sekarang. Guru perlu diberi peluang untuk memantapkan pengetahuan tentang kandungan matematik, contohnya pengetahuan tentang pembahagian nombor bulat, pedagogi matematik, contohnya pengajaran pembahagian nombor bulat, dan pembangunan murid di sepanjang tempoh perkhidmatan profesional mereka, agar dapat membimbing murid menguasai kemahiran matematik yang ditetapkan dalam kurikulum sekolah rendah.

Pembelajaran pula ialah daya asas yang membentuk masyarakat dan mencorakkan sesuatu zaman. Para murid yang akan merintis jalan untuk masa depan dunia ini dan tiada pengaruh lain yang lebih besar dalam pembangunan seseorang murid itu selain pendidikan berteraskan asas kepercayaan, falsafah dan psikologi yang kukuh (Nik Azis, 2008).

Pengajaran dan pembelajaran matematik di sekolah rendah sekarang adalah berdasarkan Kurikulum Standard Sekolah Rendah (KSSR). Kurikulum matematik sekolah rendah dalam KSSR bertujuan untuk membina pemahaman murid dalam konsep nombor dan kemahiran asas mengira. Penguasaan kedua-dua aspek ini dapat membantu murid mengendalikan urusan harian secara berkesan dan penuh tanggungjawab selaras dengan hasrat masyarakat dan negara maju serta dapat membantu murid melanjutkan pelajaran (Bahagian Pembangunan Kurikulum, 2015).

Dalam bidang pemahaman guru sekolah rendah tentang pembahagian nombor bulat, terdapat beberapa isu kritikal, yang mana tiga daripadanya ialah kesukaran dalam pembelajaran pembahagian nombor bulat, kesukaran dalam pengajaran pembahagian nombor bulat, dan kekurangan pengetahuan tentang penyelesaian masalah yang melibatkan pembahagian nombor bulat dalam konteks pendidikan matematik di Malaysia.

Terdapat beberapa fokus kajian lepas bagi kesukaran dalam pembelajaran tentang pembahagian nombor bulat, yang mana tiga fokus daripadanya ialah pemahaman guru tentang pembahagian nombor bulat, penggunaan teknologi dalam pembelajaran tentang pembahagian nombor bulat, dan penggunaan perwakilan dalam pembelajaran tentang pembahagian nombor bulat.

Kajian yang fokus kepada pemahaman guru tentang pembahagian nombor bulat, antaranya termasuklah kajian mengenai kesukaran yang dialami oleh guru terlatih dan pelatih tentang pembahagian (Graeber,Tirosh, & Glover, 1999; Neuman, 1999; Steffe, 2000; Rule & Hallagan, 2006; Olive & Vomvoridi, 2006; Zembat, 2007; Li, 2008; Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero, 2009; Redmond, 2009; Toluk-Uçar, 2009; Yim, 2010; Isiksal, 2011; Isik & Kar, 2012), kajian mengenai pemahaman guru terlatih dan guru pelatih tentang pembahagian (Ball, 1990; Simon, 1993; Zazkis & Campbell, 1996; Ma, 1999; Tirosh, 2000; Goulding, Rowland, & Barber, 2002; Sharp & Adams, 2002; Ball & Bass, 2003; Perlwitz, 2005; Kaasila, Laine, Hannula, & Pehkonen, 2005; Suhaidah, 2006; Nusrat Fatimah & Lawson, 2007, Steffe, 2002, 2009; Redmond & Utley, 2007; Zembat, 2007; Li & Smith, 2007; Gregg & Gregg, 2007; Kalder, 2007; Li, 2008; Li & Kulm, 2008; Mok, Cai & Fung, 2008; Redmond, 2009; Faridah, 2009; Toluk-Uçar, 2009; Kaasila, Pehkonen, Hellinen, 2010; Yim, 2010; Fan, 2011; Lo & Luo, 2012), dan kajian mengenai pemahaman konsep nombor bulat dan operasi bagi guru pelatih (Kamii et al., 1993; Ma, 1999; Huinker et al., 2003; Thanheiser, 2009, 2010, 2012, 2014; Crespo & Nicol, 2006; Andreasen, 2006; Chapman, 2007; Andreasen, Roy, Safi, Tobias, & Dixon, 2008; George, 2008; Glidden, 2008; Roy, 2008; Juli, 2009; Depaepe, Verschaffel, & Kelchtermans, 2013; Thanheiser, et al., 2014).

Bagi penggunaan teknologi dalam pembelajaran tentang pembahagian nombor bulat, terdapat kajian kesukaran guru dalam penggunaan teknologi dengan berkesan dalam bilik darjah (Noraini, 2004, 2006; Nor'ain, Rahani, Wan Zah & Mohd, 2007; Ismail, Zaleha, Hamzah, Nurul Ain, 2008; Keengwe & Georgina, 2012), dan kajian penggunaan teknologi dalam pengajaran dan pembelajaran matematik (Campell & Zazkis, 2002; Halim Jajuli, 2000; Wahaida, 2008; Trigueros, Ivoone, & Lozano, 2013).

Kajian yang fokus kepada penggunaan perwakilan dalam pembelajaran pembahagian, antaranya termasuklah kajian tentang perwakilan dalam penyelesaian masalah pembahagian (Ball, 1990a, Simon, 1993; Nik Azis, 1995; Tirosh, 2000; Nusrat Fatimah & Lawson, 2007; Li, 2008; Faridah, 2009; Fan, 2011), kesukaran menggunakan perwakilan dalam penyelesaian masalah pembahagian (Ball, 1990a; Tirosh, 2000; Rodriquez, et al., 2009; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012; Roche & Clarke, 2013).

Isu kritikal kedua ialah kesukaran dalam pengajaran pembahagian nombor bulat. Terdapat juga beberapa fokus kajian lepas mengenainya, yang mana tiga daripadanya ialah kaedah pengajaran pembahagian nombor bulat, pengajaran konsep pembahagian nombor bulat, dan pengetahuan guru dalam pengajaran pembahagian nombor bulat.

Kajian tentang kaedah pengajaran yang digunakan oleh guru untuk mengajar pembahagian nombor bulat, antaranya termasuklah kajian tentang pengiraan mental aritmetik bagi operasi bahagi (Neuman, 1999; Heirdsfield, Cooper, Mulligan, & Irons, 1999; Callingham, 2005; Hartnett, J. 2007, 2015; Rousselle & Noel, 2008; Safi, 2009), kajian tentang kaedah pengajaran pembahagian (Işıksal, 2006; Chapman, 2007; De Castro, 2008; Yim, 2010; Cengiz & Rathouz, 2011), kajian tentang model bagi operasi bahagi, iaitu model pemetakan dan model pengukuran (Ficshbein, Deri, Nello, dan Marino, 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Lutovac, 2008; Haylock & Cockburn, 2010, Downton, 2009: Faridah, 2009; Fan, 2011), dan kajian tentang pembahagian panjang (Lee, 2007; Leung, Wong & Pang, 2006).

Kajian tentang pengajaran pembahagian nombor bulat, antaranya termasuklah kajian konsep tentang pembahagian (Neuman, 1999; Sharp & Adams, 2002; Rule & Hallagan, 2006; Mok, Cai, & Fung, 2008; Redmond & Utley, 2007; Redmond, 2009; Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero, 2009), kajian tentang pengajaran konsep pembahagian nombor bulat (An, 2009; Micah, Kathleen,Tamara & Cathrine 2014), kajian terhadap konsepsi awal tentang pembahagian (Neuman, 1999; Tirosh, 2000; Squire & Bryant, 2002; Mesut Butun, 2009).

Kajian terhadap pengetahuan guru dalam pengajaran pembahagian nombor bulat, antaranya termasuklah kajian pedagogikal guru tentang pengetahuan kandungan dalam pembahagian multi-digit nombor bulat (An, 2009, Thanheiser, E., 2009, 2010, 2012), kajian tentang pengetahuan konseptual bagi prinsip matematik dan makna pembahagian (Ball, 1990a; Anghileri, Beishuizen & van Putten, 2002; Effandi Zakaria & Norliza Zaini, 2009; Haylock & Cockburn, 2010; Hope, 2006; Van deWalle, 2007; Hallett, Nunes & Bryant, 2010; Schneider & Stern, 2010).

Tiga daripada fokus kajian lepas terhadap kekurangan pengetahuan tentang penyelesaian masalah melibatkan pembahagian nombor bulat ialah keupayaan penyelesaian masalah yang melibatkan pembahagian nombor bulat, kaedah penyelesaian masalah yang melibatkan pembahagian nombor bulat yang digunakan oleh guru dan murid, dan pembentukan masalah (*problem possing*) yang melibatkan pembahagian nombor bulat.

Kajian terhadap keupayaan penyelesaian masalah yang melibatkan pembahagian nombor bulat, antaranya termasuklah mengkaji perkaitan di antara keupayaan penyelesaian masalah dengan jantina (Caplan, J. B. & Caplan, & Caplan, 2005; Zhu, 2007; Riney & Froeschle, 2014).); kajian tentang perkaitan keupayaan menyelesaikan masalah matematik berbentuk ayat dengan kefahaman masalah (Cai

& Silver, 1995; Fischbein. Deri, Nello, and Marino,1985, Duru, 2011; Sajadi, Amiripour, & Mohsen, 2013).

Kajian terhadap kaedah penyelesaian masalah yang melibatkan pembahagian nombor bulat yang digunakan oleh guru dan murid, antaranya termasuklah kajian tentang strategi dalam menyelesaikan masalah pembahagian (Heirdsfield, Cooper, Mulligan, & Irons, 1999; Murray, Olivier & Human, 1992; Anon, 2004; Yang, 2007; Kaasila, Laine, Hannula & Pehkonen, 2005; Downton, 2009; Kaasila, Pehkonen & Hellinen, 2010; Yim, 2010); kajian tentang penyelesaian masalah pembahagian yang melibatkan baki dalam konteks dunia sebenar (Silver, Shapiro, & Deutsch, 1993; Cai, & Silver, 1995; Campbell,1996; Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero, 2009); dan pengiraan mental bagi operasi bahagi (Neuman,1999; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999; Callingham, 2005; Hartnett, 2007; Whitacre & Nickerson, 2012).

Kajian tentang pembentukan masalah yang melibatkan pembahagian, antaranya termasuklah kajian mengenai kebolehan membentuk masalah dengan kebolehan menyelesaikan masalah (Brown, 1992; Rizvi, 2004; Crespo & Sinclair, 2008; Chen, Dooren, Chen & Verschaffel, 2011); kajian mengenai pembentukan masalah. (Akay & Boz, 2010; Crespo & Sinclair, 2008; Toluk-Uçar, 2009; Knott, 2010; Yuan & Sriraman 2010; Isik & Kar, 2012; Sengul & Katranci, 2012).

Terdapat empat operasi dalam kemahiran asas mengira iaitu tambah, tolak, darab dan bahagi. Kemahiran pembahagian nombor bulat telah diajar mulai Tahun dua hingga Tahun Enam dalam kurikulum KSSR. Di mana, murid mempelajari kemahiran pembahagian nombor bulat dengan hasil bahagi hingga 1000 yang melibatkan sifir satu, dua, empat, lima dan 10 di Tahun Dua, Tahun Tiga mempelajari kemahiran pembahagian nombor bulat yang melibatkan sifir tiga, enam, tujuh, lapan dan sembilan dengan hasil bahagi hingga 10000, Tahun Empat mempelajari kemahiran pembahagian nombor bulat dengan hasil bahagi hingga 100 000, Tahun Lima mempelajari kemahiran pembahagian nombor bulat dengan hasil bahagi hingga 1000000, dan Tahun Enam mempelajari kemahiran pembahagian nombor bulat dengan hasil bahagi hingga tujuh digit (Bahagian Pembangunan Kurikulum, 2015).

Dengan menurut kajian lepas tentang pembahagian, banyak persoalan timbul tentang pembahagian nombor bulat. Mengapakah guru dan murid menghadapi masalah pembahagian nombor bulat? Apakah punca menyebabkan ini berlaku? Apakah kesan daripada masalah ini? Bagaimanakah cara untuk mengatasi masalah ini? Adakah ini disebabkan kesukaran dalam pemahaman guru dan murid tentang pembahagian nombor bulat? Memandangkan banyak persoalan timbul, maka untuk mengatasi masalah ini, adalah perlu kita mengkaji dengan lebih mendalam tentang kesukaran guru dalam pemahaman pembahagian nombor bulat.

Pernyataan Masalah

Kajian ini tertumpu pada kesukaran dalam pemahaman tentang pembahagian nombor bulat. Soalan yang timbul seperti “Bagaimanakah mengatasi masalah guru matematik menghadapi kesukaran dalam pemahaman tentang pembahagian nombor bulat?; Bagaimanakah mengetahui guru matematik menghadapi masalah kesukaran dalam pemahaman tentang pembahagian nombor bulat?; Mengapakah guru matematik menghadapi masalah kesukaran dalam pemahaman tentang pembahagian nombor bulat?; Sejauh manakah pemahaman guru matematik tentang pembahagian nombor bulat?; Adakah terdapat perhubungan yang signifikan antara guru yang menghadapi kesukaran dalam pemahaman tentang pembahagian nombor bulat dengan murid yang menghadapi kesukaran dalam pemahaman tentang pembahagian nombor bulat?

Kurikulum Standard Sekolah Rendah bagi mata pelajaran Matematik berfokus kepada penguasaan pengetahuan, dan pemahaman bagi membolehkan murid mengaplikasikan konsep, prinsip dan proses matematik yang dipelajari (Bahagian Pembangunan Kurikulum, 2015). Guru matematik sekolah sebagai pelaksanaan kurikulum matematik sekolah rendah haruslah juga betul-betul menguasai semua kemahiran matematik dalam kurikulum matematik sekolah rendah terutamanya kemahiran pembahagian agar dapat membimbing murid menguasai kesemua kemahiran yang ditetapkan.

Menurut kajian, (Cai & Silver, 1995; Lamb & Booker, 2004, Faridah, 2009; Fan, 2011) antara empat operasi asas aritmetik, operasi bahagi merupakan operasi yang paling sukar dipelajari dalam kalangan murid dan guru pelatih. Terdapat empat sebab operasi bahagi susah dipelajari iaitu, (i) pengiraan pembahagian bermula dari kiri, manakala operasi yang lain bermula dari kanan; (ii) pengiraan pembahagian bukan sahaja melibatkan fakta asas pembahagian, tetapi juga penolakan dan pendaraban; (iii) terdapat beberapa interaksi dalam pengiraan, tetapi pola mereka bergerak dari satu tempat ke satu tempat; (iv) percubaan baki yang melibatkan anggaran yang perlu digunakan tidak selalunya berjaya pada kali pertama, malahan kali kedua (Reys, 2007).

Pembahagian merupakan satu operasi aritmetik yang penting dan kompleks yang perlu dipertimbangkan dalam pendidikan guru sekolah rendah (Coltman, Petyaeva & Anghileri, 2002; Björklund, 2008). Guru pelatih sekolah rendah, iaitu bakal guru yang akan mengajar di sekolah rendah menghadapi kesukaran dalam pemahaman pembahagian (Simon, 1993; Campbell, 1996; Glidden, 2008; Kaasila, Pehkonen & Hellinen, 2010). Menurut kajian (Silver, Shapiro, & Deutsch, 1993; Campbell, 1996; Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero, 2009), guru pelatih dapat menyelesaikan masalah melibatkan model pemetakan bagi pembahagian, tetapi kurang berjaya dalam pembahagian yang melibatkan baki. Ini kerana mereka dipengaruhi oleh model tradisional, kerana model ini merefleksikan pemahaman membahagikan objek kepada kumpulan yang sama.

Pembahagian nombor bulat digunakan dalam banyak proses kehidupan seharian, contohnya, mencari purata untuk menerangkan kadar dan perkadaran yang berkaitan dengan petrol yang diguna; kos dan harga jualan; dan anggaran perbelanjaan. Ia juga khususnya digunakan dalam penyelesaian masalah dan merupakan sebahagian daripada pemikiran untuk menerangkan luas, isi padu dan kebarangkalian. Pemahaman pembahagian bersama dengan pemikiran secara pendaraban adalah penting berhubung dengan pecahan, kadar, algebra dan matematik lanjutan. Ia merupakan peralihan daripada pemikiran secara aritmetik di sekolah rendah kepada pemikiran yang lebih mendalam bagi kurikulum sekolah menengah dan seterusnya (Rule & Hallagan, 2006; Levenson, Tsamir & Tirosh, 2007; De Castro, 2008; Isiksal & Cakiroglu, 2011; Hu & Hsiao, 2013).

Menurut kajian (*National Research Council*, 2001; Heflin & Alaimo, 2007) guru yang menghadapi kesukaran pemahaman dalam pembahagian boleh menyebabkan murid juga lemah dalam pemahaman pembahagian. Kesukaran dalam pemahaman pembahagian nombor bulat akan menyebabkan murid lemah dalam penguasaan pembahagian nombor bulat. Dengan itu, guru perlu mengajar murid supaya betul-betul faham dengan pembahagian nombor bulat dan seterusnya dapat menguasai kemahiran pembahagian nombor bulat itu. Oleh demikian, guru sendiri mestilah betul-betul faham pembahagian nombor bulat dan menguasainya dengan baik.

Menurut Nik Azis (2008), kebolehan murid untuk melibatkan diri secara intelektual dan memahami matematik dalam konteks bilik darjah banyak bergantung kepada kepakaran guru untuk memilih tugas yang baik, melibatkan murid dalam refleksi yang mendalam, dan menyediakan persekitaran bilik darjah yang menyokong aktiviti refleksi, abstraksi, penghayatan dan penjangkauan kendiri.

Guru matematik Tahun Enam diberi fokus kerana mereka harus mempunyai pemahaman yang mendalam tentang pembahagian nombor bulat, terutamanya kemahiran pembahagian nombor bulat yang telah murid belajar dari Tahun Dua hingga Tahun Enam, kerana mereka akan membuat ulang kaji kepada murid Tahun Enam yang akan menduduki Ujian Pencapaian Sekolah Rendah (UPSR) pada hujung tahun. Namun begitu, tiada kajian dibuat berkaitan pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat.

Menurut kajian di atas, masalah guru tentang kesukaran dalam pemahaman pembahagian nombor bulat adalah penting untuk dikaji, agar murid lebih memahami konsep pembahagian nombor bulat.

Kerangka Teori

Kerangka teori yang digunakan dalam kajian ini ialah teori konstruktivisme radikal. Teori konstruktivisme radikal menyimpang atau melencong daripada teori pengetahuan yang tradisi dalam erti kata pendekatan tersebut menolak secara terus konsepsi tentang pengetahuan, iaitu untuk menjadi "benar", mestilah mencerminkan realiti ontologi yang mutlak (Nik Azis, 1999). Menurut Von Glasersfeld (1989, 1995, 1998, 2001, 2005) dan Von Glasersfeld & Larochelle (2007), pengetahuan guru dibina melalui tindakan asimilasi dan akomodasi pada skim sedia ada guru bagi mengubahsuai skim tersebut atau membentuk skim baru yang lebih berdaya maju. Oleh itu, untuk mengetahui cara orang lain memahami pembahagian nombor bulat, pertuturan dan perlakuan mereka perlu ditafsirkan. Tafsiran tersebut adalah respondentif bergantung pada kemahiran dan pengetahuan pentafsir. Ini kerana teori konstruktivisme radikal mengandaikan setiap individu membina ilmu berdasarkan pengalaman masing-masing.

Menurut konstruktivisme radikal, konsepsi merujuk pengertian, idea, atau pendapat yang terbentuk dalam fikiran individu tentang sesuatu perkara. Teori ini menganggap konsep sebagai satu bentuk konsepsi (entiti kognitif) yang telah dimantapkan melalui pengulangan, dipiawaikan melalui interaksi, dan dikaitkan dengan perkataan khusus (Von Glasersfeld, 1989, 1995, 1998, 2001, 2005; Von Glasersfeld & Larochelle, 2007). Menurut Piaget (1976), pemahaman tentang sesuatu kesedaran diri adalah pada asasnya wujud dalam pembentukan konsep tentang perkara tertentu (konseptualisasi) dan konseptualisasi yang wajar pula membabitkan transformasi skim tindakan kepada tanggapan dan operasi. Transformasi tersebut berlaku lama selepas skim tindakan berjaya digunakan. Menurut teori konstruktivisme radikal, pemahaman sentiasa membabitkan proses kesesuaian atau keserasian dan bukan proses kesepadanan atau kesamaan. Dengan kata lain, untuk memahami apa-apa yang disebut atau ditulis murid, seseorang guru perlu membina satu struktur konsepsi yang nampaknya sesuai atau serasi dengan struktur konsepsi yang dimiliki murid dalam konteks yang diberikan (Von Glasersfeld & Larochelle, 2007; Nik Azis, 1999, 2014a).

Menurut konstruktivisme radikal, sesuatu pengetahuan akan dikekalkan atau diketepikan bergantung pada setakat mana pengetahuan itu berdaya maju untuk membantu individu menguruskan pengalaman hidupnya. Perkara lain seperti ketekalan dalaman, kesederhanaan, keserasian dengan aspek pengalaman yang lain, dan ekonomi yang boleh digunakan sebagai kriteria sekunder dalam mempertimbangkan tingkat kebergunaan (utiliti) atau instrumental, bagi sesuatu pengetahuan. Dengan kata lain, struktur konsepsi (skim tindakan, skim operasi, konsep, prosedur, teori, dan hukum) pada asasnya dinilai berdasarkan kriteria kejayaan, akhirnya mestilah difahami dalam konteks usaha seseorang individu untuk memperoleh, mengekalkan, dan mengembangkan keseimbangan dalaman apabila berhadapan dengan gangguan (Nik Azis, 1999, 2014a; Von Glasersfeld & Larochelle, 2007; Steffe, 2007, 2008).

Konstruktivisme radikal tidak mendakwa ia telah menemui kebenaran ontologi, tetapi pendekatan itu hanya mencadangkan satu model hipotesis yang mungkin berguna untuk memahami cara manusia mengetahui sesuatu perkara. Dalam model berfikir secara konstruktif, konsep daya maju dalam domain pengalaman telah menggantikan tempat konsep kebenaran (suatu yang menandakan perwakilan realiti yang benar). Walau bagaimanapun, pergantian tersebut tidak memberi kesan kepada penggunaan konsep kebenaran dalam kehidupan seharian yang melibatkan pengulangan atau penerangan yang betul-betul tentang sesuatu pengalaman yang lalu (Von Glasersfeld, 1995, 2005; Nik Azis, 1999, 2014a; Von Glasersfeld & Larochelle, 2007; Steffe, 2007, 2008).

Konstruktivisme radikal mengaitkan pemahaman dengan keupayaan individu untuk membina pengetahuan yang berdaya maju, manakala teori pemprosesan maklumat yang mengaitkan pemahaman dengan keupayaan untuk menghubungkaitkan sesuatu idea atau prosedur dengan rangkaian dalaman secara kukuh (Nik Azis, 1999, 2008, 2014a; Von Glasersfeld, 2005; Von Glasersfeld & Larochelle, 2007; Steffe, 2007, 2008). Dengan itu, konstruktivisme radikal adalah lebih sesuai digunakan dalam kajian ini kerana kajian ini mengkaji pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat, iaitu keupayaan guru membina pengetahuan sendiri yang berdaya maju tentang pembahagian nombor bulat.

Sehubungan itu, kajian pemahaman guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat dijalankan dengan beberapa andaian, yang mana lima andaian asas yang digunakan dalam kajian ini adalah seperti berikut:

1. Guru matematik Tahun Enam telah belajar pembahagian nombor bulat di sekolah rendah, sekolah menengah dan maktab perguruan.
2. Pengetahuan tentang pembahagian nombor bulat bagi guru matematik Tahun Enam dapat dikenal pasti melalui pentafsiran tingkah laku mereka semasa sesi temu duga klinikal.
3. Pengetahuan tentang pembahagian nombor bulat yang diperoleh guru matematik Tahun Enam dibina oleh mereka sendiri melalui penyertaan secara aktif, refleksi dan pengabstrakan.
4. Pencapaian guru matematik Tahun Enam dalam pembahagian nombor bulat berkaitan dengan kebolehan mereka menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat.
5. Pemahaman guru matematik Tahun Enam dalam pembahagian nombor bulat boleh dikenal pasti dengan melalui pentafsiran gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat, perwakilan pembahagian nombor bulat, makna yang diberi tentang pembahagian nombor bulat, jenis penaakulan yang digunakan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat dan penyelesaian masalah tentang pembahagian nombor bulat.

Berasaskan andaian di atas, beberapa aktiviti tugasan dirangka dengan tujuan untuk mencungkil pemikiran responden kajian. Andaian ini penting sebagai garis panduan kepada pengkaji untuk membentuk item kajian, memungut dan menganalisis data. Pada asasnya, terdapat lima jenis tugas berlainan yang mendasari kerangka kajian iaitu menggambar, mewakili, memberi makna, menaakul dan menyelesaikan masalah.

Tujuan dan Soalan Kajian

Kajian ini bertujuan mengenal pasti pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Secara lebih khusus, kajian ini dijalankan untuk menjawab soalan kajian berikut:

1. Apakah gambaran mental yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat?
2. Bagaimanakah guru matematik Tahun Enam mewakilkan pembahagian nombor bulat yang melibatkan ayat matematik bahagi, serta gambar rajah selanjar dan diskret.
3. Apakah makna yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat?
4. Apakah jenis penaakulan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat?
5. Bagaimanakah guru matematik Tahun Enam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat?

Dengan berdasarkan tujuan kajian, instrumen kajian yang dibina dan metodologi kajian direka bentuk agar dapat mengumpul data untuk kajian, dan seterusnya data itu dianalisis untuk menjawab soalan kajian di atas.

Definisi Istilah

Kajian ini mempunyai beberapa istilah asas, yang mana sebelas daripadanya ialah pemahaman, pembahagian, nombor bulat, operasi bergabung, gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan, penyelesaian masalah, selanjar dan diskret.

Pemahaman. Pemahaman merujuk kepada konsepsi seseorang tentang sesuatu perkara (Von Glasersfeld, 1995). Menurut Steffe (2009), konsepsi seseorang boleh dikenal pasti daripada pemikiran mereka tentang beberapa perkara seperti gambaran mental, perwakilan, pemberian makna, penaakulan, dan penyelesaian masalah yang berkaitan pembahagian nombor bulat. Dalam kajian ini, pemahaman merujuk kepada konsepsi guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat yang melibatkan gambaran mental tentang nombor bulat, bahagi dan ayat matematik bahagi; perwakilan pembahagian nombor bulat yang melibatkan ayat matematik bahagi, dan gambar rajah selanjar dan diskret; makna tentang pembahagian nombor bulat yang melibatkan makna bahagi, makna nombor bahagi, makna hasil bahagi dan makna nombor yang dibahagi, jenis penaakulan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat; dan cara penyelesaian masalah yang melibatkan pembahagian nombor bulat dengan nombor bulat.

Pembahagian. Secara formal, pembahagian boleh didefinisi berasaskan $ac = b$. Dalam hubungan ini, a bahagi b (juga ditulis sebagai a|b) dengan keadaan $a, b \in Z$ (**Z** ialah nombor integer), $a \neq 0$, dan $c \in Z$. Bagi kes yang membabitkan b boleh dibahagikan oleh a, maka a dikenali sebagai nombor bahagi bagi b. Dalam hal ini, a juga dikenali sebagai faktor bagi b, manakala b pula disebut sebagai gandaan bagi a, atau nombor yang dibahagi. (Weiss, 1971). Ringkasnya, algoritma pembahagian secara simbolik ialah $b = qa + r$, dengan keadaan $0 \leq r < a$, $a, b \in Z$, dan a > 0, maka wujud nilai integer unik q (quotient) dan r (remainder).

Dari sudut operasi, pembahagian melibatkan dua proses iaitu, pemetakan dan pengukuran. Pemetakan bermaksud mengenal pasti bilangan kuantiti yang diterima oleh setiap penerima, sekiranya jumlah bahan dan bilangan penerima diketahui terlebih dahulu (Van de Walle, 2010). Pemetakan dapat dijelaskan dalam dua keadaan, iaitu agihan seragam serta salingan dan darab. Bagi kes b ÷ a, agihan seragam bermaksud mengagihkan sejumlah bahan b, kepada sejumlah penerima c. Keseragaman agihan bergantung pada bilangan bahagian yang dibentuk pada a untuk diberi kepada c penerima dengan sama banyak (Anghileri & Johnson, 1992). Salingan dan darab pula merujuk proses pengiraan yang melibatkan salingan suatu nombor dan darabkan dengan nombor yang satu lagi. Misalnya, bagi kes b ÷ a, a disongsangkan dan didarabkan dengan b. Hasil bahagi bermaksud jumlah a yang perlu diagihkan kepada setiap unit c dalam b.

Pembahagian digunakan untuk mengagihkan objek kepada kumpulan yang sama banyak (Baker, Aufman & Lockwood, 2006). Pembahagian ialah sejenis operasi aritmetik yang menetapkan satu set kepada beberapa himpunan atau bahagian setara yang dikenali sebagai subset. Bilangan elemen dalam set yang dibahagi itu dikenali sebagai nombor yang dibahagi (*dividend*); manakala bilangan elemen dalam subset atau bilangan subset yang setara dikenali sebagai nombor bahagi (*divisor*), dan bilangan subset setara atau bilangan elemen dalam satu subset dikenali sebagai hasil bahagi (*quotient*) (Lial & Salzman, 2010). Dalam kajian ini, pembahagian nombor bulat melibatkan pembahagian nombor bulat dengan nombor bulat.

Nombor Bulat. Nombor bulat ialah nombor kardinal dalam set terhingga, iaitu elemen nombor dalam set terhingga. Jika A ~ {1,2,3, ... m}, maka $n(A) = m$, dan $n\ (\emptyset) = 0$, yang mana $n(A)$ menyumbangkan kekardinalan set A. Dengan itu, set bagi nombor bulat ditulis sebagai $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, yang mana tiga titik di belakang urutan nombor bermakna urutan ini tidak terhingga dan tiada nombor yang terbesar (Calvin & Duane, 2003). Nombor bulat ialah nombor yang digunakan untuk membilang kuantiti objek diskret (Leonard, Steve & Johnson, 2008). Dalam kajian ini, skop nombor bulat ialah nombor bulat dalam lingkungan tujuh digit

Operasi Bergabung. Operasi bergabung ialah operasi yang melibatkan dua atau lebih operasi asas, iaitu operasi tambah, tolak, darab dan bahagi, termasuk penggunaan kurungan dalam penyelesaian masalah dengan mengikut peraturan yang ditetapkan (Lial & Salzman, 2010). Peraturan bagi operasi adalah seperti berikut: kurungan diselesakan dahulu, kemudian menyelesaikan darab atau bahagi dari kiri ke kanan, akhirnya selesaikan tambah dan tolak dari kiri ke kanan juga. Dalam kajian ini, operasi yang digunakan melibatkan operasi tambah, tolak, darab dan bahagi, serta operasi bergabung dan kurungan.

Gambaran Mental. Gambaran mental ialah imej yang terhasil secara serta merta oleh seseorang tanpa melibatkan penggunaan panca indera mereka (Thompson, 1996). Gambaran mental ditafsirkan semasa seseorang mengaplikasikan pengetahuan tentang nombor bulat, nombor lapan dan 12, sifar, kosong, tiada apa-apa, bahagi, dan ayat matematik bahagi secara spontan dalam waktu dan konteks yang khusus (Von Glasersfeld, 1998).

Perwakilan. Perwakilan ialah pengetahuan seseorang yang diwakilkan semula dalam pelbagai konteks (Von Glasersfeld, 1995). Dalam kajian ini, perwakilan adalah merujuk kepada tingkah laku responden kajian mewakilkan semula pengetahuan tentang pembahagian nombor bulat daripada gambar rajah kepada ayat matematik, dan daripada ayat matematik kepada gambar rajah.

Makna. Makna ialah tafsiran yang diberikan oleh seseorang dan berlaku dalam keadaan sedar bahawa situasi tersebut mempunyai lebih daripada satu kemungkinan jawapan (Von Glasersfeld (1987). Menurut Von Glasersfeld dan Larochelle (2007), aktiviti menjelaskan tafsiran melibatkan beberapa tindakan seperti individu yang sedar dan aktif (I, individu); objek, peristiwa atau fenomena (F) yang dilakukan oleh I; hasil aktiviti khusus (H) yang bukan merupakan sebahagian pengalaman I yang serta-merta tentang F tetapi berkait dengan F melalui beberapa saling hubungan yang diketahui oleh I. Dalam memberikan makna, seseorang mentafsirkan situasi berkenaan berasaskan pengetahuan sedia ada. Dalam kajian ini, responden mentafsirkan makna pembahagian nombor bulat yang melibatkan makna bahagi, makna nombor bahagi, makna hasil bahagi dan makna nombor yang dibahagi dengan berasaskan pengetahuan sedia ada.

Penaakulan. Penaakulan merujuk kepada hal membuat pertimbangan dan penilaian dengan menggunakan akal, yang membabitkan kebolehan untuk menggunakan proses pemikiran intuisi dan logik untuk membentuk inferens dan hujah rasional berdasarkan tahap bukti empirikal dan bukti dalam keadaan tertentu; dan membabitkan proses menggunakan pengetahuan sedia ada untuk membuat kesimpulan, ramalan, atau memberikan penjelasan yang tertentu (Nik Azis, 2014a). Penaakulan boleh dibahagikan kepada tiga jenis, iaitu penaakulan deduktif, penaakulan induktif dan penaakulan abduktif (Nik Azis, 2014a). Penaakulan deduktif membabitkan proses membuat kesimpulan khusus berdasarkan pernyataan yang umum, penaakulan induktif membabitkan proses membuat kesimpulan umum berdasarkan beberapa kes khusus, dan penaakulan abduktif pula membabitkan proses membuat kesimpulan berdasarkan maklumat yang telah diketahui. Penaakulan merupakan asas penting untuk memahami matematik dengan lebih berkesan dan menjadi pengertian tentang matematik lebih bermakna, dan digunakan untuk membuat konjektur, membuktikan konjektur, memberi penerangan logikal, menganalisis, membuat pertimbangan, menilai dan memberi justifikasi terhadap semua aktiviti matematik (BPK, 2015). Dalam kajian ini, penaakulan adalah merujuk kepada jenis penaakulan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat.

Penyelesaian Masalah. Penyelesaian masalah merupakan usaha untuk mengatasi gangguan dengan mengubah suai atau membina skim tindakan dan skim operasi yang baru, dan bertumpu kepada kebolehan individu untuk membina pengetahuan yang berdaya maju dengan menggunakan proses asimilasi dan akomodasi (Von Glasersfeld, 1995). Dalam kajian ini, penyelesaian masalah merujuk kepada cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat.

Selanjar. Objek yang keluasannya digunakan menjelaskan konsep matematik dikenali sebagai objek selanjar (Van de Walle, 2010), Dalam kajian ini, objek selanjar merujuk gambar rajah, jalur kertas yang digunakan atau gambar rajah yang dilukis oleh guru bagi menjelaskan konsep bahagi, makna pembahagian nombor bulat atau ayat matematik bahagi.

Diskret. Objek yang bilangannya diguna bagi menjelaskan konsep matematik dikenali sebagai objek diskret (Watanabe, 2002) Dalam konteks kajian ini, bahan diskret merujuk objek yang boleh disingkirkan atau wujud individu atau gambar rajah yang dilukis bagi menjelaskan konsep bahagi, makna pembahagian nombor bulat, atau ayat matematik bahagi.

Limitasi dan Delimitasi

Kajian ini mempunyai beberapa limitasi, yang mana empat daripadanya adalah berkaitan dengan reka bentuk kajian, teknik pengumpulan data, responden dan teori yang digunakan.

Reka bentuk kajian ini ialah kajian deskriptif yang menggunakan temu duga klinikal dengan borang protokol sebagai instrumen. Bilangan responden yang dipilih adalah sedikit berbanding dengan jumlah sebenarnya dalam seluruh Malaysia. Responden tersebut tidak dipilih secara rawak. Dengan itu hasil kajian adalah tidak boleh digeneralisasikan kepada populasi iaitu semua guru matematik Tahun Enam di seluruh negara.

Kaedah temu duga memerlukan kecekapan pengkaji mengemas kini dan mentafsirkan tingkah laku responden. Pengkaji juga perlu memberi makna secara berterusan kepada gerak balas dan tindakan responden. Walaupun persediaan awal telah dibuat, tetapi pengkaji akur dengan beberapa perkara seperti fleksibiliti dalam penyoalan soalan temu duga, dan kebebasan dalam penyoalan secara spontan yang merupakan dua ciri penting dalam temu duga. Semasa sesi temu duga beberapa soalan mungkin perlu ditambah bergantung kepada respons responden. Ini adalah kerana gerak balas dan respons responden ialah sukar dijangka dalam sesi temu duga. Walau bagaimanapun pengkaji bertanggungjawab untuk membentuk soalan secara spontan berdasarkan respons responden. Tambahan, soalan yang dibina dalam soal selidik tidak menyeluruh. Reka bentuk soalan dalam instrumen tidak dapat menimbulkan minat responden untuk menjawabnya.

Seterusnya, responden yang dipilih mempunyai taraf pengajian dan ikhtisas berbeza iaitu ada yang mempunyai ijazah sarjana muda dan ada yang mempunyai diploma pendidikan. Selain itu, guru yang dipilih sebagai responden tidak menyelesaikan masalah dalam instrumen dengan bersungguh-sungguh dan teliti. Mereka juga tidak dapat menyampaikan pendapat mereka dengan jelas semasa sesi temu duga klinikal. Lantaran itu, responden-responden yang dipilih mempunyai jantina, latar belakang, bahasa, keturunan, tempat mengajar, kebudayaan dan agama yang berlainan, dengan itu, cara mereka berfikir, bertindak dan menjalankan aktiviti pengajaran dan pembelajaran adalah berbeza.

Menurut Nik Azis (2008), teori yang dicipta oleh manusia bukanlah bersifat mutlak dan sempurna, begitu juga dengan teori yang dipilih untuk mendasari kajian ini iaitu teori konstruktivisme radikal.

Seterusnya, kajian ini mempunyai beberapa delimitasi, yang mana tiga daripadanya membabitkan pemilihan teori, pemilihan reka bentuk kajian, dan pemilihan responden. Kajian ini menggunakan teori konstruktivisme radikal yang berlandaskan epistomologi genetik dan mengetepikan pengetahuan metafizik, mistik, dan pengetahuan diwahyukan (Nik Azis, 1999, 2008, 2014a; Steffe, 2007). Teori ini ialah teori mengetahui yang menumpukan pada pengetahuan rasional dan merupakan teori tentang perkara yang dihasilkan oleh pemikiran manusia dan sebarang perkara yang terletak di luar pengalaman manusia dianggap tidak dapat diketahui oleh pemikiran manusia.

Reka bentuk kajian ini ialah kajian deskriptif yang menggunakan temu duga klinikal dan protokol temu duga klinikal sebagai instrumen kajian. Kajian ini juga terhad kepada kemahiran pembahagian nombor bulat. Selain itu, kajian ini bertumpu kepada pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat.

Seterusnya, responden yang dipilih adalah terhad kepada 6 orang guru matematik Tahun Enam sahaja. Data yang dikumpulkan berdasarkan instrumen borang protokol yang terdapat lima tugasan yang diberikan kepada responden yang terpilih. Responden itu terdiri daripada guru-guru matematik Tahun Enam dari dua buah negeri, iaitu negeri Selangor dan Melaka. Responden yang dipilih adalah terdiri daripada guru-guru sekolah kebangsaan, dan sekolah jenis kebangsaan Cina sahaja.

Signifikan Kajian

Kajian ini bertujuan untuk mengenal pasti pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Kajian ini berharap dapat memberi maklumat tambahan kepada guru matematik sekolah rendah tentang pembahagian nombor bulat, agar guru dapat menguasai kemahiran pembahagian nombor bulat dengan lebih baik dan mengajar pembahagian nombor bulat dengan berkesan. Seterusnya, diharap guru-guru dapat mengaplikasikannya dalam topik Matematik yang lain yang melibatkan pembahagian di sekolah rendah, contohnya pembahagian wang. Dapatan kajian seumpama ini juga dapat menjadi sebahagian daripada sumber data untuk meningkatkan keberkesanan pengajaran dan pembelajaran, yang mana guru dapat menyediakan bahan bantu belajar yang sesuai atau mengajar cara penyelesaian masalah yang sesuai agar murid dapat menyelesaikan masalah yang diberi.

Dapatan kajian akan menjadi maklum balas kepada guru matematik bagi tujuan merancang pengajaran dan pembelajaran yang lebih bermakna dan mementingkan pemahaman. Dalam konteks ini guru dapat menumpukan perhatian kepada aspek metodologi dan psikologi yang utama untuk membentuk sikap yang positif dan meningkatkan motivasi murid terhadap mata pelajaran Matematik, yang mana guru perlu mengajar mengikut tahap penguasaan dan pemahaman, kehendak atau pengetahuan sedia ada murid, agar pengajaran dan pembelajarannya lebih berkesan.

Hasil kajian ini juga berharap dapat membantu penggunanya menjadi guru dan pembimbing yang lebih efisien, berkesan, dan yakin diri semasa menjalankan proses pengajaran dan pembelajaran Matematik terutamanya dalam pengajaran tentang pembahagian nombor bulat. Dapatan daripada kajian ini juga diharap dapat membantu guru menjadikan pengajaran dan pembelajaran Matematik lebih bermakna agar murid dapat menghayati keindahan dan kepentingan Matematik.

Aktiviti-aktiviti pengajaran dan pembelajaran dengan kaedah yang sesuai adalah perlu agar dapat digunakan dalam kalangan murid-murid yang lemah bagi menarik minat mereka dalam mata pelajaran matematik. Dengan adanya maklumat ini, guru dapat mengubahsuai kaedah pengajaran dan pembelajaran mereka agar murid dapat mempelajari matematik dengan lebih seronok dan bermakna .

Hasil kajian ini diharap dapat menjadi asas perancangan pendidikan kepada pihak yang terlibat dengan pengurusan pendidikan khususnya pegawai di Pejabat Pendidikan Daerah, Jabatan Pendidikan Negeri, Jemaah Nazir dan Kementerian Pendidikan agar mereka dapat merancang kurikulum dan aktiviti, serta membina modul untuk membantu guru meningkatkan pemahaman tentang pembahagian nombor bulat.

Seterusnya, dapatan kajian ini berharap dapat membantu pendidik dari Institut Pendidikan Guru Malaysia dan Universiti dalam pengajaran mereka yang berkaitan dengan pembahagian nombor bulat. Mereka akan lebih menekankan kepada pemahaman guru tentang pembahagian nombor bulat dan memastikan guru pelatih betul-betul memahami konsep pembahagian dan pembahagian nombor bulat, agar guru pelatih dapat mengajar dengan berkesan dan yakin semasa ditempatkan di sekolah.

Bahagian Pembangunan Kurikulum (BPK) dan Kementerian Pendidikan Malaysia (KPM) berharap boleh menggunakan dapatan kajian ini sebagai rujukan untuk menganalisis dan menilai kurikulum Matematik yang sedia ada. Daripada analisis yang dibuat, satu pentaksiran yang lebih tepat dapat diperoleh terhadap keupayaan kurikulum Matematik meningkatkan profisiensi murid dalam mata pelajaran Matematik di negara kita sekarang.

Akhir sekali, hasil kajian ini berharap dapat memberi panduan kepada pegawai yang bertanggungjawab dalam penggubalan kurikulum matematik iaitu pegawai di Bahagian Pembangunan Kurikulum, para penyelidik dan para penggubal dasar, untuk memastikan konsep pembahagian dan pembahagian nombor bulat jelas diterangkan dalam huraian sukatan mata pelajaran Matematik dan buku teks atau buku rujukan Matematik.

Rumusan

Bab Satu meletakkan asas bagi laporan kajian ini. Ia menggariskan latar belakang kajian dan mengenal pasti beberapa isu atau masalah kritikal yang berkaitan dengan bidang kajian. Kemudiannya, satu masalah kajian telah dipilih dan dihuraikan serta dijustifikasikan bagi pemilihan tersebut telah dilakukan. Seterusnya, penerangan diberikan tentang kerangka teori, tujuan kajian, dan soalan kajian. Akhir sekali, definisi istilah dikemukakan, limitasi dan delimitasi kajian dihurai, dan signifikan kajian dibincangkan. Berdasarkan asas ini, laporan kajian maju ke hadapan untuk menjelaskan dengan terperinci tinjauan dalam Bab Dua, metodologi kajian dalam Bab Tiga, dapatan kajian dalam Bab Empat, dan perbincangan, kesimpulan, dan implikasi kajian dalam Bab Lima. Seterusnya, segala rujukan disenaraikan di bawah tajuk Rujukan, manakala bahan sokongan dan tambahan pula dilampirkan di bawah tajuk Lampiran.

BAB 2 TINJAUAN LITERATUR

Pengenalan

Bab ini mengandungi tujuh bahagian, iaitu pengenalan, perbincangan lanjut tentang konstruktivisme radikal, perbincangan konseptual tentang istilah psikologi melibatkan pemahaman, perbincangan konseptual tentang istilah matematik melibatkan pembahagian, perbincangan konseptual tentang istilah lain melibatkan gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan dan penyelesaian masalah, serta kajian relevan dan rumusan.

Perbincangan konseptual tentang istilah pemahaman terbahagi kepada dua bahagian iaitu konsep pemahaman, dan pemahaman insrtumental, relasional dan formal, pemahaman prosedural dan kopseptual, perspektif pemahaman, teori perkembangan pemahaman, pemahaman berlandaskan teori tiga dunia matematik, pandangan sodiolagi tentang pemahaman, pemahaman berlandaskan teori konstruktivisme radikal dan pemahaman berlandaskan teori pemprosesan maklumat. Perbincangan konseptual tentang istilah pembahagian juga terbahagi kepada dua bahagian iaitu konsep pembahagian dan operasi bahagi. Dalam operasi bahagi terbahagi pula kepada tiga jenis iaitu pembahagian sebagai pemetakan, pembahagian sebagai pengukuran dan algoritma pembahagian. Terdapat juga perbincangan tentang gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan dan penyelesaian masalah. Dalam kajian relevan terdapat pengajaran dan pembelajaran matematik dengan konstruktivisme radikal, pemahaman pembahagian dan perwakilan dalam pengajaran dan pembelajaran pembahagian, penaakulan dalam penyelesaian masalah matematik, dan penyelesaian masalah dalam pendidikan matematik.

Teori Kajian

Dua teori yang mengandaikan pengetahuan dibina oleh guru Matematik Tahun Enam dibincangkan dalam bahagian ini. Teori yang dimaksudkan ialah teori konsruktivisme radikal dan teori pemprosesan maklumat. Dua aspek dijelaskan di bawah konstruktivisme radikal, iaitu prinsip asas konstruktivisme radikal, proses pembinaan pengetahuan dan perbandingan di antara konstruktivisme radikal dengan teori pemprosesan maklumat.

Teori Konstruktivisme Radikal. Teori Konstruktivisme Radikal adalah berasaskan teori genetik Piaget (1950), epistemologi dikembangkan oleh Von Glasersfeld, manakala aspek metodologi dalam pendidikan matematik pula dikembangkan oleh Steffe. Teori ini juga dikenali sebagai Teori Binaan Fahaman (Von Glasersfeld, 2007). Menurut Von Glasersfeld (2007), perkataan "radikal" bermaksud penekanan serius terhadap konsep fahaman binaan. Menurut teori konstruktivisme radikal, kognisi manusia berlaku secara fungsi biologi dan bukannya berasaskan perhubungan di antara manusia dengan manusia, atau manusia dengan persekitaran (Piaget, 1950). Justeru, dalam apa keadaan sekali pun, teori konstruktivisme radikal tetap mengandaikan pengetahuan terbentuk dalam diri manusia dan peranan manusia ialah sentiasa membina pengetahuan berasaskan apa yang diketahui berdasarkan pengalaman lepas (Siti Rahaimah & Noraini, 2014). Dengan perkataan lain, manusia dianggap hanya mampu membina pengetahuan dalam dunia yang dialaminya secara sedar.

Von Glasersfeld (1995) mengajukan dua prinsip asas konstruktivisme radikal. Prinsip pertama mengatakan pengetahuan tidak diterima secara pasif sama ada melalui deria atau melalui cara berkomunikasi, atau pengetahuan dibina oleh individu yang berfikir secara aktif. Dengan kata lain, andaian bahawa bahasa dapat digunakan bagi menyampaikan pengetahuan kepada seseorang boleh dipertikaikan, ini kerana manusia mempunyai batasan untuk membina pengetahuan, bergantung pada tindakan asimilasi dan akomodasi yang berlaku pada diri individu tersebut untuk membentuk pengetahuan yang berdaya maju (Siti Rahaimah & Noraini, 2014). Prinsip kedua pula, membabitkan "metafora manusia" yang menyatakan fungsi kognisi adalah adaptif, dalam pengertian biologi, dan cenderung ke arah kesesuaian atau daya maju, atau kognisi berperanan dalam mengorganisasikan pengalaman seseorang dan bukan dalam menemui realiti ontologi yang objektif. Berdasarkan kedua-dua prinsip tersebut, proses pembinaan pengetahuan dianggap berlaku secara berterusan oleh manusia (Siti Rahaimah & Noraini, 2014).

Proses Pembinaan Pengetahuan. Menurut teori konstruktivisme radikal, aktiviti kognisi bersifat instrumental dan boleh tersilap (Von Glasersfeld, 2007). Ini kerana pengetahuan dibina oleh seseorang adalah terbatas kepada pengalaman yang mereka pernah alami semata-mata. Ini bermaksud pengalaman dibentuk dan distrukturkan oleh seseorang berdasarkan makna yang diperoleh daripada aktiviti pengamatan dan persepsi mereka. Walau bagaimanapun, teori konstruktivisme radikal tidak menolak kewujudan realiti dunia luar, tetapi teori ini menolak pandangan bahawa manusia berupaya mengetahui realiti tersebut dan menolak kemampuan seseorang untuk mewakilkan pengetahuan yang wujud di persekitaran dunia luar (Steffe, 2000).

Menurut Cobb & Steffe (2011), teori konstruktivisme radikal merupakan suatu teori “mengetahui”, bukan teori berkaitan “pengetahuan”. Ini bermaksud, individu membina pemahaman mereka sendiri dengan membentuk blok asas pengetahuan yang dikenali sebagai skim. Dengan menerusi koordinasi skim tindakan dan skim operatif, pengetahuan matematik guru dapat ditafsirkan menerusi tingkah laku dan bukan lisan guru yang dilihat. Semasa proses pembinaan, guru sebenarnya menyusun dan mengorganisasikan persekitaran yang dialami mereka hasil daripada skim yang berfungsi dalam mental masing-masing. Menurut Von Glasersfeld (2007) terdapat tiga komponen utama terlibat dalam pembentukan skim tindakan, iaitu bahagian keadaan permulaan, bahagian aktiviti dan bahagian hasil. Bahagian keadaan permulaan ialah bahagian pengecaman keadaan tertentu yang disebut sebagai keadaan permulaan (peristiwa khusus) atau keadaan pencetus. Seterusnya bahagian aktiviti ialah bahagian aktiviti khusus yang berkaitan dengan keadaan permulaan, dan aktiviti itu membabitkan tindakan atau operasi tertentu. Akhirnya, bahagian hasil adalah bahagian jangkaan bahawa pelaksanaan aktiviti khusus akan mengeluarkan hasil atau keputusan tertentu yang sudah biasa dialami.

Pengetahuan perlu dibina secara aktif oleh setiap individu dan proses pembinaan itu bersifat rekursif (berulang-ulang) (Nik Azis, 2008). Contohnya, blok binaan bagi sesuatu pemahaman adalah terdiri daripada hasil proses pembinaan terdahulu. Justeru, perbezaan antara struktur pemahaman dengan kandungan pemahaman bersifat relatif dalam konteks pembinaan tertentu.

Semasa proses membina pemahaman, guru berkemungkinan menghadapi ketidakmampuan mengasimilasikan situasi baru dengan pengalaman yang pernah dilaluinya menyebabkan berlakunya gangguan dalam diri guru dan akhirnya cenderung mengakibatkan guru tersebut kecewa dan mengelak daripada terus memahami pengetahuan tersebut kecuali mereka dapat dikesan semula dan dihubungkan kembali dengan pengalaman yang lepas bagi meneruskan proses membina pemahaman (Von Glasersfeld. 2007). Dalam usaha mengasimilasikan situasi pembelajaran baru, gangguan yang dihadapi oleh guru berkemungkinan dapat membantu mereka mengenali sebilangan sifat situasi yang secocok dengan pengalaman sedia ada dan seterusnya memberikan pemahaman kepada mereka.

Pendukung konstruktivisme radikal berpendapat pengetahuan atau pemikiran manusia berkembang secara perlahan-lahan melalui satu siri transformasi (Nik Azis, 2008, 2014a). Dalam proses transformasi itu, satu struktur konsepsi akan diubah secara perlahan-lahan untuk membentuk struktur konsepsi yang lebih canggih. Unsur-unsur asas yang mendasari struktur tersebut merupakan transformasi daripada unsur-unsur terdahulu. Ringkasnya, sebarang struktur konsepsi yang baru adalah terbentuk hasil daripada penyusunan (organisasi) atau pengubahsuaian (modifikasi) struktur terdahulu.

Pendukung konstruktivisme radikal berpendapat keempat-empat faktor perkembangan intelek, iaitu pengalaman fizikal, kematangan, keseimbangan, dan interaksi sosial perlu diberi perhatian sewajarnya dalam membincangkan proses pembelajaran. Ini disebabkan setiap faktor itu secara sendirinya tidak mencukupi untuk menjelaskan perkembangan intelek (Steffe, 2007).

Satu perkara asas dalam konstruktivisme radikal ialah struktur konsepsi. Menurut pendekatan teori konstruktivisme radikal, kognisi berkembang melalui pengubahsuaian dan transformasi struktur konsepsi, dan struktur konsepsi itu dianggap sebagai mewakilkan realiti bagi seseorang individu.

Pendukung konstruktivisme radikal berpendapat bahawa perbincangan awal yang bermakna tentang proses mengetahui tidak boleh dilakukan dengan sekadar menerima masyarakat, ejen sosiobudaya atau interaksi sosial sebagai suatu yang diberikan dan bukan sebagai struktur konsepsi yang dibina oleh individu (Nik Azis, 2008).

Pendukung konstruktivisme radikal menggunakan pendekatan pragmatik untuk meneliti persoalan tentang realiti, kebenaran, bahasa, komunikasi, dan pemahaman dari perspektif manusia (Nik Azis 1999). Menurut pendekatan tersebut, ilmu yang diwahyukan tidak boleh disamakan dengan pengetahuan rasional. Oleh sebab pengetahuan yang dimiliki manusia dibina oleh mereka sendiri berdasarkan pengalaman hidup, maka manusia tidak mungkin dapat mengetahui keadaan dunia sebenar. Dalam konteks yang sama, pemikiran manusia tidak berupaya untuk membentuk perwakilan yang tepat tentang dunia sebenar.

Menurut pendukung konstruktivisme radikal, pemikiran manusia semata-mata tidak berupaya untuk mengetahui sebarang perkara dengan tepat. Malah untuk menyokong dakwaan tentang pengetahuan yang tepat tentang dunia sebenar, kita perlu memastikan setiap aspek gambaran yang kita bina tentang dunia ini berdasarkan persepsi dan konsepsi kita merupakan perwakilan yang tepat dan sebenar tentang dunia seperti sepatutnya. Untuk memastikan kita telah membentuk satu kesepaduan yang baik, kita perlu membandingkan gambaran yang dibina dengan apa yang sepatutnya diwakili oleh gambaran tersebut. Bagaimanapun, kita tidak berupaya untuk melakukan perkara tersebut kerana kita tidak dapat keluar daripada cara kita melihat dan mengkonsepsikan alam ini.

Persepsi manusia dan pertimbangan yang dibuat oleh manusia berdasarkan persepsi mereka dipengaruhi sistem nilai, falsafah hidup, konteks, dan sikap mereka. Tanpa bimbingan ilmu yang diwahyukan, manusia tidak dapat menemui kebenaran mutlak. Realiti yang dibina oleh manusia melalui kekuatan akal semata-mata merupakan realiti yang subjektif (Nik Azis ,2008).

Konsepsi dan persepsi yang dimiliki oleh manusia dibentuk melalui proses pengabstrakan berlandaskan pengalaman duniawi, maka pendukung konstruktivisme radikal menegaskan bahawa konsepsi dan persepsi tersebut tidak dapat menangani sebarang perkara yang terletak di luar pengalaman manusia. Menurut beliau lagi, satu slogan yang secocok dengan gagasan konstruktivisme radikal ialah pemikiran manusia hanya dapat mengetahui apa yang dibentuk sendiri olehnya (Nik Azis, 2014a).

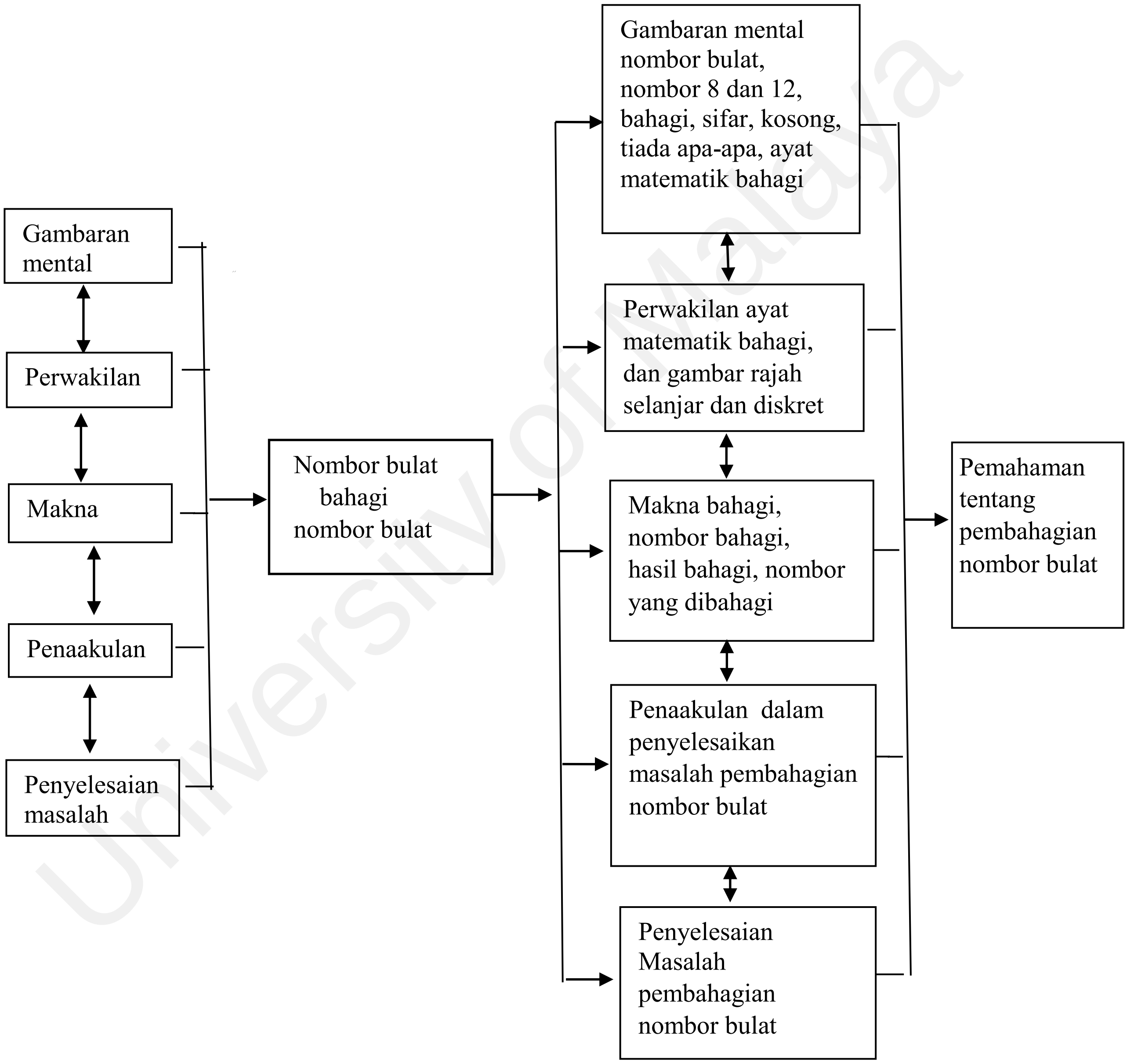
Perbandingan Antara Konstruktivisme Radikal Dengan Teori Pemprosesan Maklumat. Teori pemprosesan maklumat mengadaptasikan perspektif dan tatacara kecerdasan tiruan dan simulasi komputer untuk membentuk bahasa baru bagi menghuraikan model psikologi membolehkan tingkah laku manusia boleh diramal dan dikawal, manakala konstruktivisme radikal hanya bertumpu pada pengetahuan rasional dan dengan itu, mengetepikan pengetahuan metafizik, mistik, dan pengetahuan yang diwahyukan (Nik Azis, 2008; Steffe, 2007).

Pendukung teori pemprosesan maklumat yang berlandaskan falsafah realisme berpendapat bahawa matlamat utama pembelajaran matematik adalah untuk menguasai kemahiran untuk memperoleh, memproses, menyimpan, dan menggunakan maklumat matematik dengan berkesan, manakala pendukung konstruktivisme radikal yang berlandaskan falsafah pragmatisme berpendapat bahawa matlamat utama pembelajaran matematik ialah pembinaan kekuatan matematik oleh semua murid.

Teori pemprosesan maklumat merupakan satu bentuk fahaman kelakuan yang melihat proses kognitif sebagai fungsi tingkah laku adaptif, manakala konstruktivisme radikal merupakan satu fahaman mental (mentalisme) (Nik Azis, 1999, 2014a; Cobb & Steffe, 2011). Satu ciri penting fahaman mental ialah fahaman ini bertumpu kepada kajian tentang perkara yang berkait dengan kesedaran dan pemikiran manusia (mental atau jiwa). Fahaman kelakuan menterbalikkan perspektif yang dimajukan oleh fahaman mental. Contohnya, pendukung fahaman kelakuan berusaha untuk meramalkan, mengawal, menerangkan atau membentuk model tingkah laku. Fahaman ini bertumpu semata-mata kepada tingkah laku yang boleh dilihat, dan bukan kepada kesedaran atau mental manusia (Nik Azis, 1999, 2014a). Pendukung teori pemprosesan maklumat yang bersifat fahaman kelakuan hanya membuat kajian untuk menentukan secara objektif pengaruh rangsangan luar terhadap tingkah laku manusia dan ia hanya berminat terhadap cara manusia memproses maklumat, manakala pendukung konstruktivisme radikal membuat kajian untuk memahami pemikiran manusia dan kesedaran manusia.

Berdasarkan tinjauan teori, dapat diringkaskan bahawa teori konstruktivisme radikal merupakan teori yang menganggap guru sebagai individu yang sentiasa aktif membina pengetahuan (Siti Rahaimah & Noraini, 2014). Pengetahuan pemahaman pembahagian nombor bulat berasaskan teori ini merupakan pemahaman pembahagian nombor bulat miliki diri responden kajian masing-masing, iaitu guru Matematik Tahun Enam. Ia bukannya konsep pemahaman pembahagian nombor bulat yang terdapat dalam buku matematik ataupun penilaian terhadap pengetahuan guru berasaskan betul atau salah, tetapi ia merujuk kepada pemahaman pembahagian nombor bulat yang dimiliki dan dilakukan oleh guru sendiri. Dengan itu, konstruk radikal adalah lebih sesuai digunakan dalam kajian ini daripada teori pemprosesan maklumat untuk mengenal pasti pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat.

Kerangka Konseptual. Kerangka konseptual atau model analitis merujuk persembahan visual atau bertulis yang menjelaskan secara grafik atau naratif tentang konsep atau konstruk asas yang hendak dikaji dan anggapan tentang saling hubungan antara mereka (Miles & Huberman, 1994; Creswell, 2012; Nik Azis, 2014a). Antara lain, kerangka konseptual memainkan beberapa peranan penting:



Rajah 2.1 Kerangka konseptual bagi kajian pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat berlandaskan Konstruktivisme Radikal.

(a) membantu pengkaji dalam pengenalpastian konstruk dan subkonstruk asas, utama, penting atau kritikal yang akan diberikan perhatian dalam kajian; (b) membantu pengkaji dalam membuat penjelasan tentang saling hubungan yang mungkin dalam kalangan konstruk dan subkonstruk asas; (c) membekalkan peluang kepada pengkaji untuk mengumpulkan konstruk dan subkonstruk utama dalam satu bakul intelektual bagi melicinkan proses analisis dan sintesis; dan (d) membekalkan pengkaji dengan tapak atau sauh bagi proses pengumpulan dan analisis data serta interpretasi dan kesimpulan hasil kajian (Nik Azis, 2014a).

Perkara penting yang perlu difahami tentang kerangka konseptual ialah ia merupakan satu konsepsi yang dimiliki oleh pengkaji tentang perkara utama yang hendak diteliti olehnya, saling hubungan antara perkara tersebut, dan mengapa saling hubungan seperti itu terbentuk. Lazimnya, kerangka konseptual terdiri daripada suatu yang dibentuk sendiri oleh pengkaji berdasarkan literatur yang dibaca, kerangka teori yang digunakan, dan ciri kajian yang hendak dijalankan, bukan sekadar suatu berbentuk sudah siap yang diperoleh daripada literatur yang dibaca.

Rajah 2.1 menunjukkan kerangka konseptual kajian bagi kajian pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat yang terdiri daripada lima konstruk utama, iaitu gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan dan penyelesaian masalah. Konstruk matematik pula ialah nombor bulat bahagi nombor bulat. Seterusnya, terdapat lima subkonstruk, iaitu gambaran mental tentang nombor bulat, nombor 8 dan 12, bahagi, sifar, kosong, tiada apa-apa, dan ayat matematik; perwakilan bagi ayat matematik, dan gambar rajah selanjar dan diskret; makna bagi bahagi, nombor bahagi, hasil bahagi dan nombor yang dibahagi; penaakulan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat; dan penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat. Hasilnya ialah pemahaman tentang pembahagian nombor bulat. Konstruk utama dan subkonstruk dihubungkaitkan antara diri mereka dengan anak panah.

Pemahaman

'Pemahaman' ialah sesuatu yang kompleks dan boleh membawa berbagai-bagai-bagai makna terutamanya dalam matematik. Dalam bahagian ini, perbincangan pemahaman terbahagi kepada dua bahagian iaitu konsep pemahaman, dan pemahaman dalam konstruktivisme radikal.

Konsep Pemahaman. Seseorang itu mungkin boleh dikatakan telah mendapat satu maklumat baru atau pengetahuan baru tetapi adakah dia benar-benar memahaminya? Apabila seseorang mengetahui sesuatu, dia mengutarakan apa yang diketahuinya secara lisan atau mempamerkan kemahirannya, tetapi bolehkah dikatakan dia benar-benar faham?

Melihat atau mengukur pemahaman yang dikuasai seseorang tidak semudah melihat pengetahuan yang sedia ada pada diri seseorang itu. Seseorang itu boleh memberikan jawapan atau menunjukkan kemahiran berulang-ulang tetapi dengan pemahaman yang paling minimum. Walau bagaimanapun, pemahaman mengatasi pengetahuan. Sebagai contoh, jika seseorang itu memang jelas pemahamannya tentang konsep pembahagian nombor bulat, tidak kira bagaimana bentuk soalan diajukan tentunya boleh dijawab dengan betul dan tepat. Katakan membahagi sebilangan objek kepada beberapa kumpulan, operasi yang dipilihnya tentu yang betul, tepat dan konsisten.

Pemahaman Instrumental, Relasional Dan Formal. Menurut Skemp (1978, 1989), pemahaman dikategorikan kepada tiga jenis iaitu pemahaman instrumental, pemahaman relasional dan pemahaman formal.

Pemahaman instrumental ialah pemahaman menghafal peraturan yang sesuai untuk mencari penyelesaian bagi sesuatu masalah tertentu tetapi tidak memahami 'mengapa' di sebalik penyelesaian itu. Orang yang mempunyai pemahaman jenis ini, tidak mampu untuk menyelesaikan masalah dalam keadaan yang berbeza. Sebagai contoh, $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$, jawapan diperoleh tepat tetapi tidak dapat menerangkan alasan di sebaliknya.

Pemahaman relasional atau dikenali sebagai pemahaman konseptual ialah pemahaman menghubungkan atau mengaitkan sesuatu prosedur atau peraturan dengan lebih umum. Sebagai contoh untuk soalan'$12 \div 3 = 4$' jika orang tersebut mempunyai pemahaman relasional, beliau akan dapat menghuraikan pemahamannya dengan jelas'$12 \div 3$' bermaksud '12 objek diagihkan kepada 3 kumpulan , setiap kumpulan ada 4 ahli' atau '12 objek dikumpulkan 3 dalam satu kumpulan, terdapat 4 kumpulan. Berbanding dengan murid yang mempunyai pemahaman instrumental mungkin boleh memberi jawapan yang betul tetapi tidak boleh menerangkan apa yang dilakukan. Pemahaman relasional ialah pemahaman sebenar dan menunjukkan seseorang itu benar-benar faham. Ia tidak dapat dikuasai secara hafalan tetapi memerlukan pembentukan skema atau set struktur konsep yang boleh menyediakan murid supaya mampu menyelesaikan masalah yang tidak rutin.

Pemahaman formal ialah pemahaman mengaitkan simbol matematik dan tata tanda dengan idea matematik yang relevan dan menggabungkan semua idea ini dengan rantaian alasan yang logik. Harus juga disedari bahawa pemahaman instrumental juga penting sebagai contoh penggunaan matematik dalam kehidupan seharian seperti penggunaan formula untuk mencari isi padu atau luas dan sebagainya. Walau bagaimana pun, dalam keadaan tertentu pemahaman instrumental tidak memadai dan pemahaman relasional diperlukan. Pembelajaran yang menekankan pemahaman dapat membantu murid mengingat dan menggunakan langkah-langkah dan prosedur dengan betul.

Pemahaman Prosedural dan Konseptual. Pemahaman konseptual yang mendalam dibina untuk memberikan makna kepada matematik di mana murid bukan hanya perlu tahu bagaimana untuk mengaplikasikan kemahiran dan ilmu pengetahuan malah bila dan bagaimana untuk mengaplikasikannya (Hope, 2006; Wisconsin, 2007). Pemahaman konseptual terdiri daripada hubungan yang dibina secara internal dan dihubungkan dengan idea yang telah wujud dalam pemikiran kita. Ia melibatkan pemahaman tentang idea dan prosedur matematik dan juga pengetahuan tentang fakta aritmetik asas. Murid akan menggunakan pemahaman konseptual matematik apabila mereka mengenal pasti dan mengaplikasikan prinsip-prinsip matematik, mengaplikasikan fakta dan definisi serta membandingkan konsep-konsep yang berkaitan (Mohamad Johari, 2007; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012).

Membina pemahaman konseptual matematik secara mendalam mestilah menjadi matlamat utama murid (Wisconsin, 2007; Schneider & Stern, 2010). Ini adalah untuk memberi makna kepada matematik di mana murid bukan sahaja perlu tahu bagaimana untuk mengaplikasikan kemahiran dan ilmu pengetahuan malah mestilah tahu bila dan bagaimana untuk mengaplikasikannya. Malah, pengajaran di bilik darjah juga hendaklah menumpukan murid dengan pemikiran matematik peringkat lebih tinggi dan memberi tumpuan kepada pemahaman konseptual lebih daripada biasa. Matematik sepatutnya dilihat sebagai satu kesatuan keseluruhan yang terbina daripada idea yang besar dan berhubungan. Ia bukanlah satu kumpulan kemahiran dan idea yang abstrak serta tiada makna yang terpisah-pisah.

Terdapat kajian dan teori memfokuskan kepada tertib jenis pemahaman yang perlu dipunyai dahulu oleh murid sama ada pemahaman prosedural atau pemahaman konseptual (Rittle-Johnson dan Koedinger, 2009). Menurut kajian, (Silver, 1986; Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Lefevre, 1986; Isleyen & Isik Ahmet, 2003; Schneider & Stern, 2010), murid menguasai pemahaman prosedural dan pemahaman konseptual secara berasingan. Murid yang tidak boleh mengaitkan antara prosedur dan konsep akan menghadapi masalah dalam pembelajaran matematik dan murid demikian hanya boleh menyelesaikan masalah lazim sahaja.

Di Barat, pemahaman matematik secara pemahaman konseptual ini telah dipromosikan oleh National Council of Teachers of Mathematics dalam *the Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM 2000). *Principles and Standards for School Mathematics* mengharapkan murid yang berada di Gred 6 – 8 mampu untuk mempersembahkan, menganalisis dan menggeneralisasikan dengan menggunakan gambar rajah, graf, perkataan-perkataan dan ciri-ciri simbolik. Mereka juga sudah sepatutnya mampu menghubung dan membandingkan bentuk persembahan yang berbeza untuk sesuatu hubungan dan mengenal pasti sesuatu fungsi itu linear atau bukan linear serta membezakan ciri-cirinya dengan menggunakan gambar rajah, graf dan persamaan. NCTM percaya bahawa setiap murid sepatutnya mempelajari isi kandungan dan proses matematik dengan pemahaman (Hope, 2006).

Murid menggunakan pemahaman konseptual yang mereka ada untuk menghadapi situasi yang baru dan kompleks, melatih kemahiran asas mereka dan mencari penyelesaian kepada pelbagai masalah yang hadapi mereka di sekolah dan juga di luar dari sekolah. Murid sebenarnya dapat memperkembangkan kemampuan menyelesaikan masalah mereka daripada pengalaman menyelesaikan masalah dalam proses perkembangan matematik mereka di bilik darjah (Wisconsin, 2007). Malah, matematik dilihat sangat penting dalam membina pemikiran manusia menjadi lebih kreatif dan mampu menganalisis masalah dan merancang masa depan sebagaimana yang dinyatakan oleh *Institute for The Promotion of Teaching Science and Technology* di Thailand (Natcha & Satoshi 2006).

Menurut teori 'konsep-dahulu' (concepts-first), murid menggunakan pengetahuan konseptual sedia ada dalam memilih prosedur untuk menyelesaikan sesuatu masalah matematik (Mohamad Johari. (2007). Bukti yang konsisten dengan perkembangan ini boleh dilihat dari segi pembelajaran aritmetik mudah sehingga kepada *'proportional reasoning'* (Dixon dan Moore, 1996; Hiebert & Wearne, 1996; Mohamad Johari, 2007). Teori dan bukti ini digunakan dalam pemulihan matematik dengan menekankan kepada pemahaman konseptual sebelum pemahaman prosedural (Putnam, Heaton, Prewat & Remillard, 1992).

Kedua-dua aspek pemahaman ini memainkan peranan yang penting dalam pendidikan matematik. Matematik menjadi satu penyatuan idea dan kaedah yang saling berkait dibina oleh murid, lebih baik daripada hanya satu pengumpulan langkah-langkah dan algoritma yang mesti dihafal. Murid perlu dapat melihat bagaimana pengumpulan langkah-langkah dan algoritma yang telah dihafal ini berkaitan dengan sesuatu konsep matematik yang dipelajari (Suhaidah, 2006)

Lampert (1986) mencadangkan satu model pemahaman yang terdiri daripada empat cara seseorang itu "mengetahui" pengetahuan intuitif, pengetahuan konkrit, pengetahuan prosedural atau komputasional, pengetahuan konseptual.

Pengetahuan intuitif ialah berkaitan dengan apa yang seseorang murid itu boleh lakukan pada peringkat awal. Pengetahuan konkrit ialah keupayaan untuk memanipulasi objek untuk menyelesaikan masalah. Pengetahuan prosedural atau komputasional ialah proses menggunakan peraturan dan prosedur yang melibatkan simbol dan manipulasi simbol untuk menyelesaikan masalah. Pengetahuan konseptual ialah kebolehan untuk menggunakan pengetahuan dalam masalah situasi sebenar.

Mengenal pasti atau mendefinisikan keempat-empat jenis pemahaman ini dapat menerangkan bagaimana murid menggunakan sesuatu peraturan atau prosedur tanpa mengendahkan 'mengapa'. Murid diperkenalkan dengan pengetahuan prosedural sama ada selepas diperkenalkan model konkrit atau tanpa model konkrit. Jelaslah di sini, murid boleh memanipulasi simbol untuk mendapatkan jawapan tanpa mengendahkan sama ada jawapan itu munasabah atau tidak atau mungkin salah! Jadi pemahaman murid dapat dilihat daripada pelbagai pengetahuan yang ditunjukkan melalui jawapan mereka sama ada bercanggah atau saling mengesahkan satu sama lain.

Prosedur ialah langkah spesifik yang diambil satu persatu (Effandi Zakaria, Norazah & Sabri Ahmad, 2007). Prosedural pula ialah pembelajaran berkenaan hukum, prinsip dan persamaan yang difahami secara ringkas sahaja iaitu setakat mengetahui prinsip pada nama dan pernyataan. Pemahaman prosedural merujuk kepada satu tahap pemahaman yang kebanyakannya melibatkan fakta dan algoritma dan tidak memerlukan ilmu pengetahuan yang mendasari idea (Hope 2006). Ia juga melibatkan keupayaan membaca dan melukis graf, membuat binaan geometri dan menjalankan kemahiran bukan pengiraan seperti pembundaran (Effandi Zakaria, Norazah & Sabri Ahmad, 2007).

Pengetahuan prosedural ialah pengetahuan tentang simbol-simbol matematik yang melibatkan kedua-dua pengetahuan iaitu pengetahuan tentang sistem simbol dalam matematik dan syarat-syarat penggunaannya. Secara amnya, ia merujuk kepada gaya dan bentuk persamaan matematik yang ditulis dan bukan kandungan matematik. Ia tidak merujuk kepada makna dalam matematik. Seterusnya pengetahuan prosedural boleh juga dilihat sebagai pengetahuan tentang algoritma atau ciri-ciri. Ia termasuk pengetahuan tentang prosedur langkah demi langkah yang digunakan dalam menyelesaikan masalah matematik dan ia tetap juga tidak memberi makna dalam matematik. Pengetahuan ini hanya bermakna sekiranya dikaitkan dengan asas konseptual (Hiebert & Lefevre 1986). Tambahan lagi, Nicole (2007) menyokong pendapat di atas dengan menyatakan bahawa pengetahuan prosedural dikatakan pengetahuan yang tidak begitu bermakna kerana ia tidak berhubungan dengan bahagian-bahagian maklumat yang lain dan hanya mengandungi tahap pengetahuan di permukaan (*surface*) sahaja.

Menurut Hope (2006), pemahaman prosedural bagi matematik ialah satu ilmu pengetahuan berkenaan ciri-ciri dan prosedur yang digunakan oleh seseorang dalam melaksanakan kerja harian atau kerja berkaitan matematik dan juga simbol yang digunakan untuk mewakili matematik.

Perspektif Pemahaman. Pemahaman boleh dihuraikan dengan tiga perspektif: keupayaan murid untuk mengenal pasti konsep dalam pelbagai sistem perwakilan, keupayaan murid untuk memodelkan konsep tersebut kepada salah satu sistem perwakilan dan murid boleh mewakilkan konsep tersebut dari satu sistem perwakilan kepada perwakilan yang lain (Lesh, Post & Behr, 1987; Steffe & Thompson, 2000). Sistem perwakilan yang dimaksudkan ialah situasi sebenar, model manipulatif, gambar rajah, secara lisan dan perwakilan simbolik.

Perkins (1993) pula, telah menamakan konsep pemahaman sebagai perspektif pencapaian tentang pemahaman selaras dengan beberapa pandangan tentang pemahaman dan amalan guru yang berkebolehan mengajar untuk pemahaman.

Perspektif ini membayangkan fahaman konstruktivisme yang menonjol dalam teori pembelajaran semasa dan menawarkan pandangan yang lebih spesifik. Perspektif ini membantu untuk menerangkan apa itu pemahaman dengan menjadikan yang implisit kepada lebih eksplisit dan menjadikan yang khusus kepada lebih umum.

Perspektif pencapaian pemahaman menyatakan bahawa pemahaman sesuatu topik yang dipelajari dengan menunjukkan pelbagai pemikiran yang mendalam tentang topik tersebut seperti: menerangkan, mengumpulkan bukti, memberi contoh, menggeneralisasikan, menggunakan konsep dan membuat analogi, menerangkan dengan cara lain dan sebagainya.

Pencapaian pemahaman bukan bererti menghabiskan masa membuat latihan tetapi lebih kepada keperluan memberikan tumpuan atau pemikiran yang lebih mendalam. Apabila murid mempelajari konsep pembahagian, mereka perlu melalui beberapa tahap pemahaman.

Teori Perkembangan Pemahaman. Pirie dan Kieren (1994) telah menyarankan satu lagi teori perkembangan pemahaman matematik yang menyeluruh, dinamik, berperingkat tetapi tidak linear iaitu satu proses berulang yang unggul. Teori ini menggambarkan satu model di mana murid membina pengetahuan baru secara aktif dan dapat melihat kaitan dengan sesuatu pengetahuan yang telah mereka fahami. Murid sendiri terlibat dalam menyusun pengetahuan mereka secara berterusan. Model ini mengandungi lapan peringkat perkembangan pemahaman yang boleh dicapai oleh seseorang.

Peringkat pertama bermula dengan pengetahuan primitif. Primitif di sini tidak bermakna pengetahuan matematik yang rendah tetapi sebagai titik permulaan sesuatu perkembangan pemahaman sesuatu topik. Ianya sebagai satu anggapan tentang kebolehan murid pada peringkat awal yang dibuat oleh penyelidik. Pengetahuan sedia ada yang dipunyai oleh seseorang murid itu sebagai titik permulaan untuk perkembangan pemahaman seterusnya.

Pemahaman peringkat kedua pula dinamakan membuat imej, di mana murid diminta membezakan antara perkara yang telah diketahui dan menggunakannya untuk menyelesaikan masalah yang serupa.

Dalam pemahaman peringkat ketiga, murid boleh menggunakan pembinaan mental tanpa melakukan aktiviti tertentu untuk mendapatkan jawapan. Contohnya, apabila seseorang murid itu boleh terus membandingkan dua pembahagian tanpa melakarkan bentuknya, murid ini dikatakan telah mempunyai imej.

Apabila seseorang murid itu boleh memanipulasi atau menggabungkan beberapa aspek imej untuk membina konteks yang spesifik dan sifat-sifat yang berkaitan. Ini bermaksud dia berada di pemahaman peringkat keempat. Peringkat ini dinamakan peringkat mengenal sifat *(property noticing)*.

Peringkat kelima iaitu peringkat membentuk *(formalising)*. Apabila seseorang murid itu boleh menerbitkan satu cara atau nilai umum daripada sifat yang dikenali, murid ini telah sampai ke tahap pemahaman peringkat kelima, Sebagai contoh, seseorang murid itu tahu bagaimana melakukan pembahagian dengan hanya menggunakan konsep nombor dan simbol-simbol yang melibatkan pembahagian tanpa merujuk kepada makna fizikal.

Peringkat keenam ialah peringkat memerhati atau mengamati *(observing)*. Seseorang murid yang boleh membentuk, mengimbas dan menyusun aktiviti formal boleh menzahirkannya sebagai teorem. Di peringkat ini, seseorang murid itu dapat melihat akibat sesuatu tindakan dalam pemikirannya dan boleh menyusun kepada tahap yang lebih abstrak. Penstrukturan pula berlaku apabila seseorang murid itu cuba memikirkannya sebagai teori. Ini bermakna seseorang itu sedar bagaimana sekumpulan teorem berkaitan dan perlukan penjelasan yang lebih mendalam. Sebagai contoh, murid boleh membina satu formula mencari hasil bahagi daripada dua nombor bulat.

Peringkat terakhir ialah mereka cipta. Pada peringkat ini, seseorang murid itu telah mempunyai pemahaman yang jelas dan tersusun. Murid ini mungkin boleh mereka cipta sesuatu soalan yang baru yang menjurus kepada konsep baru. Sebagai contoh : Apakah bentuk rupa nombor-nombor a/b/c/d ? (Pirie & Kieren, 1994).

Perkembangan pemahaman dalam model Pirie & Kieren ini diwakilkan dengan pergerakan pemahaman ke hadapan dan ke belakang antara peringkat-peringkat. Apabila seseorang murid diajukan satu soalan yang tidak boleh diselesaikan dengan serta merta, murid perlu mengimbau kembali kepada peringkat yang lebih dalam (rendah) untuk membina pemahaman. Setiap murid mungkin mengambil cara dan jangka masa yang berbeza. Imbasan berulang membolehkan murid membina pemahaman yang lebih luas, canggih dan mendalam.

Semasa pemahaman murid bergerak dari satu peringkat ke satu peringkat yang lain, pemahaman matematik murid akan berkembang. Model Pirie & Kieren ini boleh membantu mewakilkan pemahaman murid tentang satu topik matematik yang dipilih.

Pemahaman Berlandaskan Teori Tiga Dunia Matematik. Teori Tiga Dunia Matematik diperkenalkan oleh David Tall (2008a). Teori ini merupakan teori tentang pemikiran dalam matematik. Teori ini terdiri dari:

a. Dunia Perwujudan-konsep: persepsi, atau gambaran objek, termasuk pengenalan pola, melihat persamaan dan perbezaan awalnya masih diamati langsung, kemudian kita harus menggambarkan apa yang terletak di dalam fikiran kita.

b. Dunia Simbolis Konseptual: tindak lanjut dari dunia penjelmaan melalui tindakan (mengira) dan disimbolkan kembali. Boleh digunakan dalam algebra dan aritmetik.

c. Dunia formal Aksiomatik: Penggunaan definisi dan aksioma. Perwakilan konsep dan simbol, seterusnya lebih lanjut dengan menggunakan bahasa untuk mendefinisikan dan merumuskan aksiom,

Pandangan Sosiologi Tentang Pemahaman. Daripada pandangan sosiologi, Cobb (2005) menerangkan definisi pemahaman dari dua perspektif yang berbeza, iaitu koordinasi kognitif bagi murid yang belajar dalam kumpulan dalam kumpulan kecil dan interaksi sosiologi bagi murid yang belajar dalam kumpulan besar. Menurut mereka, murid yang berinteraksi dalam kumpulkan kecil membina pemahaman individu yang terhasil daripada koordinasi kognitif semasa berinteraksi dengan rakan-rakan. Interaksi sosiologi pula bermaksud bahasa dan budaya persekitaran kelas di mana interaksi berlaku. Kedua-dua perspektif yang diutarakan oleh Cobb didapati menganggap pemahaman sebagai makna matematik yang diberi oleh murid tersebut terhasil daripada tafsiran tanda, simbol, perwakilan dan perkataan yang dilakukan semasa berinteraksi dengan rakan lain.

Pemahaman Berlandaskan Konstruktivisme Radikal. Menurut konstruktivisme radikal, pemahaman dianggap sebagai keupayaan individu untuk membina skim tindakan dan skim operasi yang berdaya maju. (Nik Azis, 2008, 2014a). Menurut Von Glaserfeld (2007), fikiran individu menjalankan dua fungsi: (a) membina pengetahuan baru (penjanaan skim tindakan dan skim operasi), dan (b) membentuk tema bagi skim tindakan dan skim operasi yang dibina (penjanaan konsep).

Bynner (2006) dan Gray (2007) mendefinisikan pemahaman sebagai asimilasi terhadap skim seseorang. Definisi tersebut merupakan pengubahsuaian pada pandangan Skemp (1978) yang menyatakan pemahaman sebagai asimilasi terhadap skim yang "sesuai". Mereka menggugurkan perkataan "sesuai" dan meninjau operasi skim yang diandaikan sebagai asas kepada pembentukan pemahaman murid semasa menghadapi gangguan dan menyelesaikan masalah.

Gray (2007) juga berpendapat bahawa pemahaman dalam kajian mereka adalah merujuk kepada makna yang dimiliki oleh seseorang tetapi bukannya, perbandingan dua bentuk pemahaman yang berbeza bagi mencari salah atau betul jawapan yang diberikan. Beliau juga menegaskan bahawa frasa "konsep bagi x" dan "pemahaman bagi x" sering kali digantikan dalam laporan kajian mereka yang membawa maksud struktur konseptual seseorang yang terbentuk dengan pelbagai cara bagi memahami tentang x.

Pendukung konstruktivisme radikal berpendapat bahawa kesedaran rasional dan pemahaman konsepsi memerlukan peneguhan intrinsik. Pada umumnya, terdapat beberapa idea asas yang berkait dengan pemahaman matematik, iaitu: refleksi, usaha berturut-turut, bahan konkrit dan pembimbing intuitif.

Pemahaman matematik tidak dapat dicapai tanpa refleksi. Refleksi itu pula perlu dilakukan oleh setiap murid sendiri. Bagaimanapun, guru yang mempunyai beberapa pengetahuan tentang tahap perkembangan konsepsi bagi seseorang murid akan mempunyai peluang lebih baik untuk membimbing murid melakukan pengabstrakan refleksi yang canggih berbanding guru yang hanya bergantung kepada sukatan pelajarannya yang telah ditetapkan terlebih dahulu oleh penggubal kurikulum (Nik Azis, 2014a).

Pemahaman matematik membabitkan dua jenis pengabstrakan, iaitu pengabstrakan empirik dan pengabstrakan reflektif (Von Glasersfeld, 1995, 2005; Von Glasersfeld & Larochelle, 2007; Nik Azis, 2014a). Oleh itu, para murid perlu melakukan aktiviti refleksi secara berturutan dan bukan sekali sahaja. Sebarang usaha yang berturut-turut pula memerlukan daya motivasi yang tinggi dan tidak mudah pudar. Satu sumber motivasi yang penting ialah dorongan dalaman untuk membentuk organisasi kognitif yang memuaskan, iaitu satu cara berdaya maju bagi menguruskan aspek pengalaman tertentu. Fakta ini menonjolkan satu dimensi berbeza tentang konsepsi peneguhan kerana apa yang membawa akibat yang mendatangkan kepuasan dalam kes ini dijanakan secara menyeluruh dalam diri individu berkenaan. Peneguhan yang dijanakan sendiri (peneguhan intrinsik) mempunyai potensi besar dalam organisma yang bersifat kognitif dan reflektif.

Walaupun pengabstrakan refleksi sentiasa bermula berlandaskan pengalaman motor deria tertentu, ia tidak disebabkan oleh pengalaman tersebut. Oleh itu, tidak terdapat sebarang program membabitkan tindakan motor deria atau manipulasi bahan konkrit khusus yang boleh menjamin bahawa para murid akan melakukan proses pengabstrakan. Bagaimanapun, ini bukan bermaksud alat bantu mengajar adalah tidak penting dalam pembelajaran matematik. Pada asasnya, bahan persepsi adalah berguna sebagai landasan bagi pelancaran aktiviti tertentu.

Aktiviti yang boleh mencetuskan proses pengabstrakan refleksi adalah berbeza bagi jenis murid yang berlainan (Nik Azis, 2008). Oleh itu, guru tidak boleh menganggap dirinya sebagai seorang mekanik yang bertugas memindahkan pengetahuan matematik daripada pemikirannya kepada pemikiran para murid. Sebaliknya, para guru sepatutnya melihat diri mereka dan berfungsi sebagai pembimbing intuitif atau bidan bagi kelahiran atau pembentukan pemahaman matematik untuk setiap murid.

Menurut Steffe dan Thompson (2000) pemahaman dan penyelesaian masalah yang terlibat entiti abstrak seperti konsep dan saling hubung matematik bergantung pada operasi mental dan tidak ada cara untuk memerhatikan operasi mental secara langsung. Paling baik, pengkaji boleh membuat inferens tentang operasi tersebut daripada pelbagai manifestasi yang boleh diperhatikan.

Tafsiran pemahaman yang diutarakan oleh beberapa pengkaji dari pemahaman yang diutarakan konstruktivisme radikal seperti Enns (2004), Dykstra (2007), Steffe (2007, 2008), dan Nik Azis (2008, 2014a) adalah selari dengan pandangan Von Glasersfeld (1995, 2005, 2007) yang beranggapan bahawa pengetahuan bersifat sepadan, bukan secocok. Jika pemahaman dilihat dari sudut perbandingan secara objektif, maka ia sering kali ditakrifkan sebagai sepadan. Misalnya, pengikut fahaman realis menganggap kemampuan seseorang untuk mengetahui kebenaran secara tepat dan jitu. Namun, bagi pengikut fahaman pragmatis, mereka menganggap manusia mempunyai limitasi untuk mengetahui kebenaran dunia luar. Manusia dianggapkan cenderung membina pemahaman mengikut pemikiran mereka sendiri. Mereka juga dianggap mempunyai kecenderungan untuk melakukan kesilapan.

Pemahaman bergantung kepada konteks matematik dan apa yang diharap daripada murid. Oleh itu untuk mengetahui apa yang sebenarnya murid fahami banyak bergantung kepada bagaimana guru mengenali, mengumpul dan menterjemahkan bukti yang ada. Proses pembinaan pengetahuan dan definisi pemahaman bagi kajian ini adalah pola pemikiran yang dimiliki oleh responden kajian semasa melakukan aktiviti dalam konteks tugasan yang berlainan seperti gambaran mental, perwakilan, pentafsiran, perbandingan, menyelesaikan masalah (Siti Rahaimah & Noraini, 2014). Pola pemikiran guru diandaikan dapat ditafsirkan oleh pengkaji secara memerhatikan tingkah laku guru yang dianggapkan berlaku secara berulang kali pada masa yang berlainan dan dalam tugasan yang berbeza di sepanjang sesi temu duga klinikal yang dijalankan. Dengan itu mengkaji pemahaman guru tentang pembahagian nombor bulat adalah perlu untuk mengetahui pemahaman murid tentang pembahagian nombor bulat.

Pemahaman Berlandaskan Teori Pemprosesan Maklumat. Teori pemprosesan maklumat merupakan satu teori yang memberi tumpuan kepada cara manusia memproses maklumat yang diterima. Pemprosesan maklumat dilakukan mengikut urutan, iaitu bermula dengan mengumpul maklumat, kemudian merekod dan menyimpan maklumat, mengingat dan mendapat kembali maklumat, membuat keputusan, mengubah keadaan pengetahuan dalam pemikiran dan menterjemahkan pengetahuan kepada bentuk output tingkah laku. Teori ini juga menganggap manusia sebagai satu alat pemprosesan maklumat atau komputer yang menerima input daripada persekitaran, memproses maklumat tersebut dan bertindak terhadap keputusan yang dibuat berdasarkan maklumat yang diproses (Nik Azis, 2008)

Menurut teori pemprosesan maklumat, terdapat empat kepercayaan yang menjadi asas utama dalam teori ini. Pertama, mereka percaya bahawa aktiviti berfikir adalah sama dengan aktiviti memproses maklumat. Dalam konteks ini, apabila seseorang meneliti, mengekod, mewakili dan menyimpan maklumat dari persekitaran, individu tersebut sebenarnya sedang berfikir. Kedua, terdapat empat mekanisme penting yang menghasilkan perubahan dalam kemahiran kognitif seseorang, iaitu pengekodan, pembinaan strategi, pengantomisasi dan generalisasi. Dalam konteks ini, apabila seseorang menyelesaikan masalah, dia perlu mengekodkan maklumat penting dalam masalah tersebut dan menggabungkannya dengan pengetahuan sedia ada bagi membina strategi yang dapat membantu menyelesaikan masalah berkenaan. Ketiga, perkembangan ialah hasil daripada perubahan diri seseorang. Dalam konteks ini, pendukung teori pemprosesan maklumat berpendapat bahawa seseorang budak memainkan peranan aktif terhadap perkembangan dirinya, kerana mereka akan menggunakan segala pengetahuan dan strategi daripada penyelesaian masalah lalu untuk disesuaikan dengan masalah baru. Dengan itu, budak tersebut dapat membina respon yang baru dan lebih sofistikated berdasarkan pengetahuan lampau. Keempat, tugasan yang diberikan perlu mengikut peringkat perkembangan. Contohnya, tugasan yang diberikan kepada seseorang murid perlulah mengikut peringkat perkembangannya agar tidak menjadi halangan kepada pencapaian murid tersebut.

Teori pemprosesan maklumat mengaitkan pemahaman dengan keupayaan individu untuk menghubungkaitkan sesuatu idea atau prosedur dengan rangkaian dalaman sedia ada melalui penggunaan hubungan yang lebih banyak dan lebih kuat.

Pemahaman matematik berkaitan dengan refleksi, usaha berturut-turut, bahan konkrit dan pembimbing intuitif. Dengan itu, adalah lebih baik kita mengkaji pemahaman matematik guru sebagai pembimbing intuitif bagi pembentukan pemahaman matematik murid berlandaskan konstruktivisme radikal.

Pembahagian

Perbincangan tentang pembahagian dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu konsep pembahagian, dan operasi bahagi. Sebelum mempelajari operasi bahagi, murid perlu tahu konsep pembahagian terlebih dahulu. Operasi bahagi ialah operasi matematik yang terakhir diajar di sekolah rendah, selepas operasi tambah, tolak dan darab (Bahagian Pembangunan Kurikulum, 2015). Sebenarnya kita sudah pun menggunakan idea pembahagian dalam aktiviti seharian sebelum idea operasi bahagi dimantapkan. Ini jelas kelihatan apabila kita cuba berkongsi sejumlah gula-gula bersama-sama kawan-kawan atau cuba meneka berapa batang pensel berharga 50 sen yang boleh dibeli dengan wang dua ringgit. Untuk menyelesaikan masalah ini, kita perlu menggunakan operasi darab dan operasi bahagi. Adalah tidak wajar mengembangkan konsep operasi bahagi secara berasingan daripada konsep operasi darab. Ini kerana operasi bahagi dikaitkan dengan operasi darab sebagaimana operasi tolak dikaitkan dengan operasi tambah (Bahagian Pendidikan Guru, 1998).

Konsep Pembahagian. Konsep pembahagian biasanya diajar di sekolah rendah dengan menggunakan model perkongsian dan penolakan berulang (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Squire & Bryant, 2002; Parmar, 2003; Nusrat Fatimah & Lawson, 2007). Dalam model perkongsian, dividen mewakili saiz objek atau nombor objek, yang akan dibahagikan kepada beberapa kumpulan kecil yang sama. Bilangan kumpulan kecil yang sama objek yang diwakili oleh pembahagi dan saiz atau bilangan objek dalam setiap kumpulan kecil ialah hasil bahagi (jawapan soalan pembahagian). Model ini hanya berjaya digunakan apabila melibatkan nombor bulat. Sharp dan Adams (2002) mengatakan perkongsian adalah intuitif apabila nombor itu ialah nombor bulat.

Satu lagi model mewakili pembahagian ialah penolakan berulang. Dalam model ini, dividen adalah saiz atau bilangan objek seperti dalam model perkongsian, manakala pembahagi ialah saiz atau bilangan satu kumpulan kecil dan jumlah bilangan kumpulan kecil adalah hasil bahagi. Model penolakan berulang dapat menerangkan situasi apabila dividen dan pembahagi adalah nombor bulat.

Beberapa orang penyelidik (Brendefur & Pitingo, 1998; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012) mencadangkan reka bentuk strategi pengajaran untuk menyediakan murid dengan cara untuk mewakili masalah pembahagian.

Kadar atau model nisbah berdasarkan hubungan pendaraban antara dua kuantiti yang serupa (nisbah), atau yang berlainan (kadar) kuantiti. Ia menganggap dividen dan pembahagi sebagai salah satu pasangan nombor dari satu set pasangan nombor tak terhingga yang berkaitan dalam kadar yang sama. Jika salah satu kuantiti tidak diketahui, yang mengetahui hubungan pendaraban antara pasangan kuantiti yang dikenali membolehkan murid untuk menggunakan pendaraban yang sama untuk menentukan kuantiti yang tidak diketahui. Model ini sangat baik digunakan untuk menentukan semua ungkapan matematik yang melibatkan pembahagian tanpa mengira jenis nombor yang terlibat.

Terdapat banyak aspek pembahagian, dengan itu guru perlu membiasakan diri mereka dengan pelbagai situasi pembahagian serta penggunaan bahasanya. Perwakilan dengan simbol seharusnya tidak mendahului pemahaman yang mendalam tentang pelbagai aspek pembahagian dan bahasa (Nik Azis, 1999). Dengan demikian, adalah perlu kita mengkaji pemahaman guru tentang konsep pembahagian sebelum mengkaji cara atau kaedah yang digunakan oleh guru untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat dalam pelbagai situasi.

Model Operasi Bahagi. Model operasi bahagi yang biasa digunakan dalam pembelajaran pembahagian adalah seperti berikut: model pembahagian sebagai pengukuran, model pembahagian secara pemetakan dan model algoritma pembahagian.

Pembahagian Dengan Kaedah Pengukuran. Pembahagian secara pengukuran (*measurement*) atau dinamakan pembahagian secara pengumpulan adalah satu proses mencari saiz objek yang sama besar daripada sesuatu set objek yang asal atau mengenal pasti bilangan penerima dengan andaian jumlah kuantiti yang patut diterima oleh setiap penerima (Leonard, Steve & Johnson, 2008; Reys et al., 2007; Van de Walle, 2010). Menurut Faridah (2009), kaedah pengukuran melibatkan tafsiran bahawa pembahagi iaitu saiz subset adalah diketahui dan murid perlu menentukan bilangan subset. Contohnya, seseorang nelayan menangkap 12 ekor ikan. Jika ikan itu dikumpulkan 3 ekor dalam satu longgokan, berapakah longgok ikan boleh didapati?

Dalam pembahagian secara pengukuran, jumlah asal dan bilangan objek dalam setiap kumpulan kecil diberikan. Kita hanya dikehendaki mencari bilangan kumpulan kecil yang boleh didapati selepas proses pembahagian.

Pengukuran kumpulan merupakan satu kaedah pembahagian secara pengukuran. Ia merujukkan kepada tindakan mengenal pasti bilangan kumpulan yang menerima sejumlah kuantiti yang diketahui bilangannya terlebih dahulu (Gregg & Gregg, 2007; Downton, 2009; Roche & Clarke, 2009) Menurut mereka, pengukuran kumpulan seragam boleh dikategorikan pengukuran terus, penolakan seragam,dan pembahagian terus.

Pengukuran terus ialah proses mengukur yang dilakukan oleh pengukur terhadap nombor yang dibahagi. Ini bermaksud, "a ÷ b" melibatkan tindakan pengukuran yang dilakukan oleh b terhadap a. Hasil bahagi bagi operasi bahagi ini bermakna terdapat sebanyak n bilangan b di dalam kuantiti.

Penolakan seragam ialah tindakan mengukur yang dilakukan secara mengurangkan baki yang tertinggal daripada pengukuran yang telah dilakukan sebelum ini. Tindakan pengurangan seragam terus dilakukan sehingga bakinya menjadi sifar. Bilangan pengurangan yang dilakukan merupakan hasil bahagi nombor bulat tersebut. Ini bermaksud, pembahagian "$a \div b$" yang diukur secara pengurangan seragam di antara pengukur b dengan nombor yang diukur iaitu a. Hasil bahagi yang diperoleh membawa maksud terdapat n kali b di dalam kuantiti a.

Pembahagian terus ialah proses pengiraan menggunakan prosedur standard tanpa mengubah nilai pembahagi dan nombor yang dibahagi. Misalnya, "*a* ÷ *b*" boleh diselesaikan secara menyusun *a* dan *b* dalam kedudukan $a\overline{)b}$. Hasil bahagi yang diperoleh bermaksud terdapat *n* bilangan *b* dalam kuantiti *a*.

Pembahagian secara pengukuran juga boleh diwakili dengan garis nombor, tata susunan, faktor skala, agihan seragam, dan songsangan operasi darab. Pembahagian dengan garis nombor ialah operasi tolak berulang dan boleh diwakili dengan lompatan pada garis nombor. Lompatan bermula daripada nombor yang dibahagi dan bergerak ke kiri menuju ke sifar (Bahagian Pendidikan Guru, 1998).

Pembahagian dengan tata susunan memberi pola tentang kedua-dua operasi darab dan operasi bahagi. Apabila seseorang murid berkebolehan menentukan pola tata susunan yang terdiri daripada baris dan lajur yang diskret, dia boleh menulis semua fakta asas darab dan bahagi yang berkenaan (Bahagian Pendidikan Guru, 1998).

Pembahagian dengan faktor skala ialah pembahagian menggunakan skala untuk menunjukkan perbezaannya iaitu berapa kali besar atau banyak sesuatu kuantiti objek dibandingkan dengan kuantiti objek yang lain dengan mengikut skala tertentu (Bahagian Pendidikan Guru, 1998).

Pembahagian Dengan Kaedah Pemetakan. Pembahagian secara pemetakan (*partition*) atau dikenali sebagai pembahagian secara pengongsian ialah proses mencari bilangan objek dalam setiap kumpulan, apabila jumlah asal dan bilangan kumpulan (subset) diberikan atau pembahagian yang dilakukan untuk mengenal pasti bilangan kuantiti yang diberikan kepada setiap penerima, yang mana bilangannya telah diketahui (Leonard, Steve & Johnson ,2008; Reys, 2007; Van de Walle, 2010). Menurut Faridah (2009), kaedah pemetakan melibatkan tafsiran bahawa pembahagi, iaitu bilangan subset, adalah diketahui dan murid perlu menentukan saiz bagi setiap subset. Contohnya, apabila murid perlu mengosingkan sejumlah objek secara sama banyak dengan beberapa orang kawan, atau apabila mengagihkan sekumpulan murid kepada sebilangan kumpulan kecil yang tertentu.

Menurut kajian (Downton, 2009; Roche & Clarke, 2009), agihan seragam bermaksud mengenal pasti bilangan elemen yang perlu diagihkan kepada setiap kumpulan, yang mana bilangan kumpulan telah diketahui. Menurut mereka, agihan seragam boleh dibahagikan kepada dua kategori, iaitu 'agihan kepada' dan 'agihan keluar'.

'Agihan kepada' ialah pemindahan terus dengan sama banyak sejumlah objek kepada bilangan penerima yang telah dikenal pasti terlebih dahulu. Contohnya, bagi kes "A ÷ B", jumlah objek ialah A, manakala bilangan penerima yang perlu diagihkan ialah B. Keseragaman agihan bergantung kepada bilangan pembahagian yang perlu dibuat oleh A kepada penerima B dengan sama banyak.

'Agihan keluar' atau dikenali sebagai pembahagian secara penolakan berulang ialah pemindahan sejumlah elemen daripada sekumpulan elemen sehingga habis dipindahkan. Contohnya, bagi kes "C ÷ D" , jumlah asal C ditolakkan beberapa kali dengan D sehingga menjadi sifar. Dengan kata lain, tindakan mengagihkan secara seragam berlaku daripada bilangan proses penolakan berulang tersebut. Konsep bahagi sebagai operasi tolak berulang berkait rapat dengan konsep bahagi sebagai proses pengumpulan (Bahagian Pendidikan Guru, 1998). Contohnya, dalam penyelesaian '15 dibahagi dengan 3', murid digalakkan bertanya kepada diri sendiri: "Dalam 15 ada berapa 3?" Dengan menggunakan pembilang, murid boleh menentukan 5 kumpulan 3. Murid juga digalakkan bertanya kepada diri sendiri:

"Berapa kalikah 3 boleh ditolak daripada 15?" Daripada proses operasi tolak berulang, didapati 3 boleh ditolak 5 kali daripada 15. Oleh itu '15 ÷ 3 = 5'.

Pembahagian secara songsangan operasi darab iaitu proses bahagi akan "membalikkan" proses darab (Bahagian Pendidikan Guru, 1998). Dalam setiap fakta asas darab ada tiga nombor yang terkandung dalam ayat matematik bahagi yang berkenaan, dan operasi bahagi merupakan proses mencari faktor yang tertinggal dalam ayat matematik darab yang berkenaan. Menurut (Downton, 2009; Roche & Clarke, 2009, Faridah, 2009, Fan, 2011), pembahagian secara songsangan operasi darab ialah pengukuran yang dilakukan oleh pembahagi kepada nombor yang dibahagi. Bagi kes partitif, proses sebaliknya berlaku, iaitu pembahagi diukur oleh nombor yang dibahagi. Contohnya, bagi kes "a ÷ b = c", pengukur ialah b, manakala nombor yang diukur ialah a. Hasil bahagi yang diperoleh iaitu c bermaksud bilangan kuantiti yang diagihkan daripada a dengan sama banyak kepada setiap unit dalam b. Contoh yang lain, "12 ÷ 3 =( )", boleh tanya soalan begini "Apakah nombor didarab dengan 3 hasilnya 12?" atau "Ada berapakah 3 dalam 12?" dengan menggunakan operasi darab iaitu 4 × 3 = 12, maka jawapan bagi soalan tersebut akan didapati.

***Algoritma Pembahagian*.** Mengetahui pelbagai pentafsiran untuk operasi bahagi tidak bermaksud bahawa seseorang murid sudah boleh mengira hasil bahaginya. Dalam pengiraan seperti "Berapa kumpulan 76 dalam satu set 2381?", prosedur pengiraan yang sistematik adalah mustahak. Seperti untuk operasi yang lain, prosedur pengiraan yang sistematik ini dikenali sebagai algoritma (Bahagian Pendidikan Guru, 1998).

Algoritma pembahagian merupakan algoritma yang paling sukar baik diajar mahupun dimahirkan (Bahagian Pendidikan Guru, 1998). Ini disebabkan beberapa unsur terlibat dalam pengendaliannya, iaitu: pengiraan dari arah kiri ke kanan, fakta asas bahagi dan tolak, penganggaran, algoritma darab dan tolak, dan langkah-langkah yang coraknya berbeza dan berlainan (Bahagian Pendidikan Guru, 1998).

Justeru itu, disarankan bahawa pengajaran topik pembahagian secara formal ditundakan sehingga murid telah memperoleh kemahiran asas yang sempurna dalam operasi pembahagian (Bahagian Pendidikan Guru, 1998).

Terdapat beberapa cara untuk mengembangkan algoritma untuk operasi pembahagian. Pada asasnya terdapat dua algoritma yang berlainan digunakan untuk mengira hasil bahagi, iaitu: algoritma penolakan dan algoritma distribusi (Bahagian Pendidikan Guru, 1998). Algoritma penolakan ialah algoritma dengan pengiraan menggunakan operasi tolak berulang dalam pembahagian, manakala algoritma distributif merupakan algoritma lazim (bentuk lazim) digunakan. Ia berkecenderungan mekanikal dan menggalakkan penghafalan.

Ramai guru sekolah masih menggunakan algoritma distribusi sahaja dalam penyampaian algoritma operasi bahagi. Pada hakikatnya kedua-dua cara mempunyai kelebihannya dan harus diteliti. Mana satu yang digunakan terpulang kepada guru sendiri sesuai dengan kebolehan murid yang diajar. Dicadangkan pada peringkat awal, algoritma penolakan disampaikan dahulu untuk pemahaman proses, kemudian disusuli dengan algoritma distribusi untuk pengiraan laju dan cekap. Algoritma distribusi dibahagikan kepada dua iaitu pembahagian panjang dan pembahagian pendek.

Pembahagian panjang (*long division*) adalah satu algoritma pengiraan yang lazim digunakan. Pengiraannya adalah dari satu digit ke satu digit mengikut nilai digit iaitu daripada digit sebelah kiri ke sebelah kanan dalam suatu nombor bulat, sehingga semua digit dalam nombor bulat itu digunakan (Bahagian Pendidikan Guru, 1998;).manakala pembahagian pendek pula sama dengan pembahagian panjang, hanya ia tidak menunjukkan langkah demi langkah dengan kiraannya buat di sebelah digit sahaja.

Daripada kajian Campbell (1996) terhadap 19 orang guru pelatih tentang pemahaman pembahagian berbaki, didapati hanya 2 orang guru sahaja dapat mengenali baki dan hasil bahagi dengan betul. Kajian mengenai pemahaman guru pelatih tentang pembahagian tanpa baki (Zazkis & Campbell, 1996; Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero, 2009), menunjukkan bahawa ramai guru menggunakan pembahagian panjang sebagai aktiviti prosedur, ini menunjukkan dengan jelas mereka lemah dalam pemahaman konseptual.

Terdapat banyak cara atau kaedah dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat. Dengan itu, adalah perlu kita mengkaji pemahaman guru tentang pembahagian nombor bulat dengan melalui cara atau kaedah yang digunakan oleh guru dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat dalam pelbagai situasi.

Gambaran Mental

Menurut Steffe (2009), gambar mental merupakan pengetahuan tulen bagi seseorang murid yang tercetus hasil daripada pengalaman lampau yang terbina daripada pengetahuan yang berdaya maju. Operasi mental manusia tidak boleh ditaksirkan sebagai bersifat statik dan tidak dapat disalin daripada mana-mana tempat (Von Glaserfeld, 1987;Thompson, 1996; Thompson & Siegler, 2010). Seterusnya, Nik Azis (1999) menyatakan gambaran mental merupakan imej tentang sesuatu yang terbentuk secara spontan apabila murid menggunakan skim yang khusus pada waktu tertentu untuk mentafsirkan perkataan atau simbol yang diberikan.

Pendekatan konstruktivisme radikal menegaskan konsep atau skim tidak wujud secara semula jadi dalam benda tertentu tetapi perlu dibina oleh setiap individu melalui pengabstrakan reflektif. Pengabstrakan reflektif pula adalah saling berkait dengan pengabstrakan empirik. Langkah awal bagi pengabstrakan empirik membabitkan pengalaman konkrit. Melalui pengabstrakan tersebut, individu dapat membentuk pengetahuan figuratif. Figuratif ialah sebarang perkara yang membabitkan unsur deria, aktiviti motor atau perwakilan unsur. Menurut pendekatan ini, semua bentuk pengabstrakan bermula dengan tindakan tertentu. Oleh itu, aktiviti membuat refleksi terhadap prosedur mental sendiri bermula dengan pengabstrakan pola-pola operatif daripada tindakan motor deria.

Selain itu, pendekatan konstruktivisme radikal menegaskan bahawa pemikiran manusia berupaya menggambarkan perkara yang belum atau pernah dialami sendiri. Dengan kata lain, istilah "perwakilan mental" atau gambaran mental merujuk tindakan membina sesuatu perkara secara persepsi atau rekaan semata-mata dan tidak terdapat benda terdahulu yang berfungsi sebagai "benda asal" yang perlu disalin, ditiru atau diwakili semula.

Menurut Von Galsersfeld (1988), istilah "perwakilan semula" atau "gambaran mental" merujuk kepada satu usaha mengadakan atau membentuk semula sesuatu pengalaman lalu tanpa isyarat motor deria. Gambaran mental merupakan sesuatu yang digambarkan oleh seseorang individu dalam pemikirannya tentang benda yang khusus apabila bahan deria yang relevan sebenarnya tidak ada dalam ruang penglihatan individu tersebut. Gambaran mental sentiasa terdiri daripada tindakan memainkan semula, mencipta semula atau membina semula sesuatu pengalaman lalu berdasarkan ingatan dan bukan terdiri daripada gambaran tentang perkara yang lain atau gambaran tentang dunia sebenar.

Menurut Nik Azis (1999), istilah "gambaran mental" merujuk proses mewakilkan semula satu gabungan pengalaman tertentu kepada diri sendiri apabila sesuatu perkataan dilafazkan, walaupun pada ketika itu tidak ada satu pun unsur bagi gabungan tersebut hadir dalam domain pengalaman semasa. Dengan kata lain, pembentukan gambaran mental membabitkan kebolehan seseorang individu untuk menggambarkan sesuatu yang dikaitkan dengan perkataan khusus yang dilafazkan, apabila dia mendengar pola bunyi bagi perkataan. Gabungan unsur pengalaman yang membentuk sesuatu konsep yang dikaitkan dengan perkataan khusus oleh seseorang individu sebenarnya terdiri daripada gabungan pengabstrakan yang dibuat oleh individu tersebut berdasarkan pengalamannya. Dengan itu, adalah penting kita mengkaji gambaran mental guru tentang pembahagian nombor bulat kerana ia merupakan pengetahuan tulen guru tentang pembahagian nombor bulat.

Selain itu, kajian Thompson dan Siegler (2010), gambaran mental guru dan murid dibahagikan kepada empat bidang dalam pedagogi dan psikologi: (1) gambaran mental guru dan murid terhadap aktiviti matematik -jenis aktiviti yang mereka berharap dapat menyertai dan jenis hasil aktiviti harus didapati, (2) Imej-imej latar belakang murid dan guru-guru tentang situasi segera diberi yang dalam pemahaman mereka, (3) imej murid dan guru tentang aktiviti berkaitan dengan simbol dan apa yang mungkin berlaku semasa mereka terlibat; (4) imej yang diselaraskan boleh disatukan dalam operasi mental dan boleh membantu dalam penyediaan bahan konseptual membentuk situasi.

Perwakilan

Semenjak zaman pre-Socratics lagi, isu mengenai andaian epistemologi tentang perwakilan telah hangat diperbincangkan (Von Glasersfeld, 1995, 2001). Lantaran, perkembangan teori psikologi telah menerima pengaruh yang besar terhadap pandangan epistemologi tersebut mengikut perkembangan masa. Fahaman psikologi dengan teori perwakilan masing-masing yang dimaksudkan adalah seperti Teori Tingkah Laku dengan Perwakilan Luarannya, Teori Pemprosesan Maklumat dengan Perwakilan Mental dan Teori Konstruktivisme Radikal dengan Perwakilan Semula Pengalaman. Teori-teori tersebut telah meletakkan asas andaian tersendiri sebagai teras kepada perkaitan di antara perwakilan dengan makna pembahagian yang diwakilkan.

Teori Tingkah Laku Dengan Perwakilan Luaran. Teori tingkah laku telah mengutarakan idea berkaitan perwakilan luaran yang terdiri daripada lima bentuk perwakilan secara khusus, iaitu: situasi dunia sebenar, bahan manipulatif, piktorial, simbol, dan simbol penulisan (Lesh, Post & Behr, 1987; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012; Lesh & Fennewald, 2013; Roche & Clarke, 2013). Oleh itu, kebolehan seseorang murid memilih, mewakili, menterjemah, mengaplikasikan perwakilan menggambarkan tahap pemahaman mereka tentang pembahagian. Dengan kata lain, cara mewakilkan pembahagian dianggap sebagai suatu bentuk kemahiran yang boleh dipelajari, dilatih, dan dipindahkan menerusi saluran komunikasi daripada guru kepada murid. Perincian tentang elemen-elemen dalam Perwakilan Luaran adalah seperti berikut:

1) Situasi Dunia Sebenar: Merupakan perwakilan yang dibentuk berasaskan interaksi manusia dengan persekitaran kehidupan manusia. Misalnya, bahan-bahan yang biasa digunakan dalam kehidupan seharian adalah seperti kek, piza, biskut, kain, buah-buahan, coklat yang diintegrasikan dengan unsur-unsur kehidupan dan digunakan sebagai mewakili pembahagian.

2) Bahan Manipulatif: Merupakan bahan konkrit yang direka oleh guru atau bahan siap yang dibeli dari kedai sebagai alat manipulatif bagi kegunaan pengajaran dan pembelajaran. Misalnya, kertas lipatan, rod kuisenair, blok aritmetik, cip berwarna yang digunakan sebagai medium bagi mewakilkan nombor, simbol, operasi yang melibatkan pembahagian.

3) Piktorial: Merupakan Model Lakaran Statik yang terlibat dalam mengitlakkan idea matematik yang dipelajari dalam kelas. Ia juga dikenali sebagai gambar dan rajah geometri sekata yang biasa digunakan dalam kelas seperti, gambar guli, gambar kereta, rajah segi tiga sama sisi, segi empat sama, dan jadual matriks untuk digunakan bagi mewakilkan pembahagian.

4) Bahasa pertuturan: Merujuk kepada bahasa yang digunakan dalam komunikasi formal yang digunakan dalam kehidupan seharian seperti: ‘enam bahagi dua’, atau bahasa tak formal seperti, ‘enam diasingkan kepada dua’ bagi menggambarkan pembahagian yang khusus. Selain itu, bahasa juga merangkumi ayat matematik yang digunakan dalam kelas matematik seperti, ‘12÷3 = 4’ yang mewakili nilai tertentu bagi pembahagian tertentu.

5) Simbol Penulisan: Simbol penulisan yang lazimnya digunakan bagi menggambarkan pembahagian ialah a ÷ b, dengan a dikenali sebagai dividen, manakala b pula dikenali sebagai pembahagi. Misalnya, penggunaan tanda seperti ‘6÷3’ merupakan perwakilan yang bererti terdapat enam unit bahagi kepada tiga kumpulan. Suatu kajian terkenal yang berasaskan Teori Perwakilan Luaran yang pernah dijalankan oleh Lesh, Post, & Behr (1987) di bawah Projek Pembiayaan Asas Sains Kebangsaan (RNP) telah memberi fokus kepada pemahaman konsep bagi 6 subkonstruk pembahagian seperti bahagian-keseluruhan, nisbah, perpuluhan, operator dan hasil bahagi, dan perkadaran. Dalam projek tersebut, empat bentuk pengajaran eksperimen yang berbeza telah dijalankan ke atas murid sekolah rendah dan menengah rendah. Penilaian pemahaman pembahagian telah dibuat berdasarkan kebolehan murid menguasai kemahiran menggunakan lima jenis perwakilan

luaran, menterjemahkan setiap perwakilan luaran tersebut kepada perwakilan yang lain, dan mengaplikasikannya ke dalam konteks penyelesaian masalah.

Dari aspek penggunaan simbol, kajian RNP mendapati murid lebih senang menterjemahkan simbol pertuturan berbanding dengan menterjemahkan simbol penulisan. Ringkasnya, kajian yang berfokuskan perwakilan luaran cenderung menggunakan lima jenis mod perwakilan bagi melihat tingkah laku eksplisit murid seperti menterjemahkan nilai pembahagian dari satu bentuk kepada bentuk yang lain dan bukannya berfokuskan penyiasatan pemahaman berdasarkan kognitif murid. Lantaran itu, teori ini mengandaikan murid mempunyai kemampuan untuk mengetahui kebenaran dan ketepatan nilai pembahagian yang tersirat dalam perwakilan tertentu. Justeru, fokus kajian mereka adalah bertumpu pada keupayaan murid menghasilkan perwakilan yang mempunyai ciri-ciri ketepatan bagi pembahagian yang diwakilkan.

Menurut Von Galsersfeld (1995), andaian dan pandangan ini merupakan limitasi yang terdapat pada perwakilan luaran. Namun begitu, pada hakikatnya, Teori Perwakilan Luaran telah banyak memberi sumbangan ke arah meningkatkan pemahaman pembelajaran matematik amnya, dan pembahagian khasnya.

Teori Pemprosesan Maklumat Dengan Perwakilan Mental. Teori ini melihat perwakilan sebagai proses mental manusia yang bermula dari tindakan menerima maklumat oleh deria motor yang terdiri daripada penglihatan, pendengaran, sentuhan, rasa, dan bau yang kemudiannya membentuk logogen yang berstruktur sekiranya ia bersifat berbahasa seperti satu per dua' dan separuh'. Jika maklumat tersebut bukan dalam bentuk bahasa, seperti gambar atau rajah piktorial yang digunakan bagi mewakili pembahagian, ia akan membentuk imagen yang berstruktur.

Pada dasarnya, struktur logogen dan struktur imagen adalah berbeza antara satu sama lain, namun interaksi di antara kedua-dua perwakilan sentiasa berlaku yang seterusnya akan membentuk struktur bersekutu di dalam struktur mental seseorang. Saling interaksi tersebut membolehkan seseorang itu bertutur, menulis, dan melakar perwakilan pembahagian seperti yang mula-mula

Menurut Paivio (1986), jika rangsangan bukan berbahasa diterima, pemahaman yang berupa imej akan terbentuk dalam mental seseorang. Ini seterusnya memberikan tindak balas bukan berbahasa yang selaras dengan rangsangan yang diterimanya. Selain itu, perwakilan berbahasa pula adalah terdiri daripada beberapa subsistem deria yang diterima dari deria motor; ini seterusnya menghasilkan perwakilan yang berbentuk imej dalam mental seseorang. Menerusi ingatan, seseorang itu berupaya menggambarkan semula objek tersebut seperti mana deria rangsangan menerimanya. Oleh itu, Teori Pemprosesan Maklumat menganalogikan perwakilan yang dihasilkan oleh manusia sebagai proses yang berlaku dalam sebuah komputer yang bermula daripada tindakan menerima input, memprosesnya ke dalam bentuk yang difahami, dan akhirnya mengeluarkan output sebagai mana yang diterima dan diingati oleh seseorang murid. Namun, menjelang awal tahun 1990-an, fokus tentang pemahaman individu mempelajari matematik telah berubah kepada melihat manusia sebagai suatu organisma hidup yang membina pengetahuan dan bukannya menerima dan mengeluarkan kembali pengetahuan tersebut apabila dikehendaki.

Konstruktivisme Radikal Dengan Perwakilan Semula Pengalaman. Terdapat dua aspek penting yang perlu diambil perhatian bagi membolehkan sifat asas perwakilan berdasarkan konstruktivisme radikal difahami. Aspek pertama ialah berkaitan logik teori, dan kedua daripada aspek penggunaan bahasa (Von

Glasersfeld, 1995). Daripada aspek logik teori, Teori Konstruktivisme Radikal melihat perwakilan yang digunakan oleh teori lain rata-ratanya membandingkan perwakilan yang digunakan dengan apa yang sepatutnya diwakilkan di dunia luar adalah tidak munasabah. Ini adalah kerana seseorang individu tidak mampu mengetahui realiti dunia luar. Sedangkan secara praktikalnya kemampuan manusia adalah terbatas untuk mengetahui pengetahuan yang pernah dialaminya sahaja. Justeru, adalah tidak logik untuk membandingkan perwakilan yang dipaparkan oleh murid dengan apa yang mereka tidak mampu ketahui disebabkan oleh batasan pengalaman seseorang yang terhad untuk mengetahui realiti tersebut (Von Glasersfeld, 1995). Aspek kedua berkaitan sifat asas perwakilan dari perspektif konstruktivisme radikal ialah penggunaan perkataan perwakilan itu sendiri. Istilah perwakilan telah memberikan pelbagai interpretasi yang berbeza-beza dalam kalangan ahli falsafah mahu pun psikologi (Von Glasersfeld, 1995). Menurut Von Glasersfeld (1987), bagi memahami maksud perwakilan, empat pernyataan yang berasaskan Bahasa German (italik) adalah perlu difahami dengan terperinci:

(a) Lakaran itu mewakilkan (menggambarkan) bunga teratai = *Darstellen;*

(b) Jane `secara perwakilan mental' mewakilkan sesuatu pada dirinya = *Vorstellung;*

(c) Mr. Bush. mewakili (bertindak atau menggantikan) presiden =*Vertreten;*

(d) X' mewakili (terdiri dari, menunjukkan, merujuk kepada) sejumlah kuantiti yang tidak diketahui =*Bedeuten.*

Menurut Von Glasersfeld (1995), pernyataan pertama `*Darstellen* bermaksud perwakilan yang dihasilkan daripada objek luar (bunga teratai) secara menyalin dan meniru. Bagi Von Glasersfeld (1987), walaupun perwakilan tersebut dikenali oleh seseorang sebagai lakaran bagi mewakili bunga teratai, namun sebenarnya merupakan satu pandangan individu yang pernah melihatnya semata-mata berdasarkan pengalaman yang dimilikinya. Tegas Von Glasersfeld lagi, tidak ada seorang pun yang dapat menyatakan keaslian suatu lakaran kecuali orang yang melakarnya sahaja. Bagi pernyataan kedua pula, *`Vorstellung'* digunakan bagi perwakilan yang melibatkan perwakilan mental yang terhasil dari pembinaan dalaman individu yang dikenali sebagai konsep (Von Glasersfeld, 1989). Menurut Von Glasersfeld, perwakilan mental merupakan pembinaan asal yang tercetus tanpa sebarang objek luaran untuk disalin.

Bagi pernyataan ketiga, istilah *'Vertreten'* digunakan bagi menjelaskan maksud perwakilan yang berlaku secara menggantikan seseorang dalam menghadiri suatu majlis (Von Glasersfeld, 1987). Menurut Von Glasersfeld, pernah berlaku juga suatu ketika yang mana penggantian seseorang yang bukan dari manusia, tetapi ianya digantikan oleh topinya. Akhirnya, pernyataan keempat menggunakan istilah *`Bedeuten'* yang bermaksud perwakilan yang merupakan huruf, perkataan, simbol, graf dan tanda rekaan bagi menandakan suatu keadaan atau kuantiti yang tidak diketahui. Walau bagaimanapun, menandakan tidak bermaksud sepadan atau sama dengan apa yang diwakilkan (Von Glasersfeld, 1989).

Ringkasnya, bolehlah dikatakan bahawa sifat asas perwakilan mengikut Teori Konstruktivisme Radikal adalah berlandaskan memainkan semula pengalaman yang dimiliki mereka dalam bentuk imej mental dan ianya boleh diwakilkan semula berasaskan batasan pengalaman masing-masing. Misalnya, seperti yang dimaksudkan oleh perkataan *vorstellung,* seseorang murid dapat mewakilkan pembahagian yang diberikan, atau mentafsir pembahagian tersebut mengikut pemahaman yang terbina dalam diri mereka. Kejayaan seseorang murid mewakilkan atau mentafsir perwakilan pembahagian adalah bergantung pada pemahaman yang terbina dalam diri mereka.

Ini adalah kerana pemahaman merupakan blok asas kepada pengetahuan seseorang (Nik Azis, 1999, 2014a). Oleh itu, bagi teori konstruktivisme radikal, istilah perwakilan luaran atau dalaman bukanlah dikotomi yang terpisah dari diri seseorang, tetapi kedua-duanya berasaskan imej mental mereka yang boleh diwakilkan semula. Dengan kata lain, perwakilan bukan sesuatu yang disalin atau ditiru dari persekitaran mereka. Ia berlaku dari dalam dan boleh diulangi semula tanpa merujuk kepada objek dari persekitaran manusia.

Bagi teori ini, perwakilan tidak mewakilkan ia sendiri, tetapi ia perlu pentafsiran dan ditafsirkan oleh seseorang pentafsir (Von Glasersfeld, 1995). lni adalah kerana sesuatu perwakilan itu, misalnya simbol "0" tidak membawa sebarang makna bagi budak yang belum pernah mempelajari dan melihat simbol tersebut. Oleh itu, bagi Teori Konstruktivisme Radikal, isu berkaitan perwakilan tentang pengetahuan matematik sebenarnya adalah dalam lingkungan pengalaman dan imej mental yang dimiliki oleh seseorang bagi membolehkan mereka mengenali, mentafsir, dan mewakilkan semula pengetahuan tersebut. Misalnya, menurut Thompson dan Lambdin (1994), perwakilan tidak mewakili kebenaran dunia sebenar, tetapi ianya mungkin boleh diinterpretasi dalam pelbagai perspektif seperti berikut:

(a) jika •••00 dilihat sebagai satu kumpulan, maka 0 ialah satu per lima daripada satu, oleh itu ••• ialah tiga per lima daripada satu.

(b) jika ••• dilihat sebagai satu kumpulan, maka • merupakan satu per tiga daripada keseluruhan, oleh itu •••00 ialah lima per tiga daripada keseluruhan.

(c) jika • dilihat sebagai satu bulatan, maka ••000 berjumlah lima bulatan, oleh itu • ialah satu per lima daripada lima, dan ••• ialah tiga per lima daripada lima.

(d) jika • dilihat sebagai satu bulatan, maka ••• terdiri daripada tiga bulatan, oleh itu 0 ialah satu per tiga daripada tiga, dan •••00 ialah lima per tiga daripada tiga bulatan .

Jelaslah, kejayaan seseorang murid mewakilkan atau mentafsir perwakilan pembahagian bergantung pada pengetahuan yang dibina oleh mereka sendiri. Dengan kata lain, istilah perwakilan luaran atau perwakilan dalaman bukanlah dikotomi terasing dan diri seseorang, tetapi kedua-duanya berasaskan pengetahuan dan imej mental mereka yang boleh diwakilkan semula secara berulang-ulang kali. Walau bagaimana pun, perwakilan bukan merupakan sesuatu yang boleh disalin atau ditiru daripada persekitaran mereka, tetapi ianya dibina oleh murid berdasarkan pengetahuan sedia ada yang berdaya maju (Nik Azis, 2008, 2014a).

Secara keseluruhannya, ketiga-tiga teori perwakilan yang dibincangkan telah menunjukkan bagaimanakah istilah perwakilan itu ditakrifkan oleh setiap teori, di samping sumbangan mereka dalam pembelajaran pembahagian. Masing-masing mempunyai andaian dan hujah tersendiri bagi menunjukkan peranan dan kepentingan perwakilan dalam menyumbang kepada pemahaman pembelajaran pembahagian. Ternyata penekanan yang diberikan setiap teori dalam pembelajaran mahu pun kajian pembahagian adalah berlainan di antara satu sama lain. Evolusi teori perwakilan itu sendiri telah memperlihatkan bahawa tumpuan pembelajaran juga telah berubah mengikut perubahan masa yang bermula daripada tingkah laku eksplisit murid dalam Perwakilan Luaran kepada penerimaan, penyimpanan dan pengeluaran maklumat oleh Perwakilan Mental, seterusnya berubah kepada pembinaan pengetahuan dalam kognitif oleh Perwakilan Semula Pengalaman.

Bagi membolehkan teori perwakilan tersebut dipraktikkan ke dalam amalan dalam bilik darjah, seseorang guru pelatih, guru, atau penyelidik perlu memahami, memilih dan menyesuaikan andaian yang menjadi pegangan kepada setiap teori tersebut bagi melaksanakannya untuk mencapai tujuan pembelajaran mahu pun kajian mereka. Dengan itu, untuk mengkaji pemahaman guru tentang pembahagian nombor bulat adalah lebih baik menggunakan perwakilan semula pengalaman yang berkaitan dengan pembinaan pengetahuan dalam kognitif dengan pengalaman guru tentang pembahagian nombor bulat.

Makna

Menurut pendekatan konstruktivisme radikal, makna berkaitan dengan skim kognitif atau struktur konsepsi yang digunakan oleh seseorang dalam mentafsirkan dan menyusun pengalaman mereka dan skim atau struktur tersebut sentiasa terdedah untuk dipinda atau diubah oleh pengalaman yang ditafsirkan atau disusun itu. Dalam konteks ini, makna bagi sesuatu simbol, contohnya “56” adalah terdiri daripada pentafsiran seseorang tentang simbol tersebut berdasarkan skim-skim sedia ada dalam mengasimilasikan simbol tersebut (Cobb & Steffe, 2011; Nik Azis, 2008). Menurut konstruktivisme radikal lagi, makna bagi sesuatu simbol tidak sama bagi semua orang dan tidak boleh ditemui dalam realiti ontologi. Istilah makna merujuk tafsiran seseorang individu tentang sesuatu perkara yang dialaminya dengan menggunakan struktur konseptual yang sedia ada dan pada umumnya, tafsiran tersebut dipengaruhi oleh pembinaan dan organisasi yang dibuat olehnya terhadap perkara yang dialami. Seseorang individu membina makna tentang sesuatu perkara yang dialaminya dengan berasaskan pengalaman sendiri, dan makna tersebut tetap subjektif walaupun ia telah banyak kali dimodifikasi dan dihomogenkan melalui interaksi dengan orang lain (Nik Azis, 2014a).

Sesuatu perkataan itu tidak mempunyai makna sehingga diberi makna oleh seseorang pentafsir (Von Glasersfeld, 1987). Von Glasersfeld (1983) memberi pandangan bahawa apabila seseorang pentafsir, P, mentafsir atau memberi makna berkenaan sesuatu objek, O, maka aktiviti tersebut seharusnya melibatkan unsur-unsur berikut:

1. Pentafsir, P, yang aktif (Murid).

2. Objek, O, yang dialami oleh P.

3. Aktiviti khusus yang diberi makna atau ditafsirkan oleh pentafsir, P.

4. Hasil aktiviti khusus, H, yang bukan merupakan sebahagian daripada pengalaman serta merta P tentang O, tetapi berkaitan dengan O melalui beberapa saling hubungan yang diketahui oleh pentafsir, P. Menurut Von Glasersfeld (1989), kesedaran bahawa makna bukan terdiri daripada sesuatu yang wujud sebagai entiti, komoditi, atau unsur khusus dalam perkataan, teks, simbol matematik, atau perkara yang dialami, tetapi terdiri daripada sesuatu yang perlu disumbangkan oleh individu terlibat dari stor peribadinya yang mengandungi pengabstrakan terhadap perkara dialami boleh menarik perhatian kepada fakta bahawa interpretasi adalah subjektif dan sumber bagi persetujuan antara perseorangan tentang makna bagi sesuatu perkara hanya boleh didapati melalui pembinaan domain sepersetujuan.

Steffe (2007) mentafsirkan makna dalam aritmetik ialah suatu kehendak untuk bertindak. Menurut Steffe (1995) lagi dalam buku beliau, Van Engen dan Gibb juga telah memberikan pengertian umum membabitkan operasi bahagi yang membezakan antara operasi minda dan operasi fizikal. Menurut tafsiran beliau, “seseorang murid perlu memahami bahawa sesuatu simbol seharusnya membolehkannya menjalankan operasi tersebut secara minda yang mungkin sukar untuk menjalankan secara sebenarnya. Walau bagaimanapun, apabila murid tersebut diminta memberi makna bagi $20\overline{)60}$, ia boleh melakukannya”.

Pendekatan konstruktivisme radikal menganggap pengetahuan matematik sebagai skim tindakan dan skim operasi yang dikoordinasi dan dibina oleh seseorang pada masa tertentu. Skim merupakan aktiviti mental yang menjadi bahan bagi proses refleksi dan pengabstrakan. Konstruktivisme radikal menegaskan bahawa pemahaman matematik membabitkan proses pengabstrakan yang kompleks. Dalam konteks ini, makna bagi simbol matematik adalah berkaitan dengan tindakan tertentu. Sehubungan itu, seseorang boleh mempelajari konsep matematik melalui pengabstrakan yang dibuat berlandaskan tindakan dan aktiviti deria yang khusus.

Makna terbentuk apabila hubungan sesuatu pengetahuan matematik dengan pengetahuan matematik dan pengetahuan lain dalam struktur kognitif dapat dijelaskan dan difahami dengan baik (Naquib, 1991, 2001). Antara lain, hubungan antara unsur-unsur dalam struktur kognitif menerangkan tingkatan martabat atau pemeringkatan dan keterbelakangan unsur itu dari segi tingkatan dan ruang.

Menurut al-Ghazali (1993), makna yang diperoleh melalui proses intuisi adalah bersifat khusus, terhad, dan tidak menyeluruh, manakala makna yang diperoleh melalui proses ilham pula adalah bersifat mendalam, meluas, dan menyeluruh. Dengan ketibaan makna, seseorang dapat memahami tempat yang sebenar bagi sesuatu perkara dalam urutan dan fitrah kejadian (Naquib, 2001). Secara ringkas, sumber-sumber ilmu tersusun secara mencancang dan bukan secara mengufuk seperti dalam tradisi keilmuan barat moden. Namun begitu, ilmu yang berasaskan sumber metafizik (wahyu, ilham, dan intuisi) tidak terpisah daripada pengetahuan yang berasaskan sumber rasional dan empiris (pancaindera dan akal fikiran). Mereka saling melengkapkan antara satu sama lain. Bagaimanapun, keutuhan dan kewibawaan ilmu wahyu sebagai suatu yang mutlak, muktamad, dan pemutus sentiasa diakui.

Kejayaan menghasilkan murid yang mampu memahami makna matematik merupakan harapan besar KSSR. Namun, hasrat ini juga merupakan suatu cabaran besar yang perlu dihadapi kerana ianya memerlukan pelaksanaan yang bersepadu dan konsisten oleh semua guru matematik. Cabaran ini timbul kerana pengajaran dan pembelajaran matematik di Malaysia telah lama dilaksanakan dengan memberi fokus terhadap kemahiran mengira dan algoritma (Noraini, 2006; Parmjit, 2005).

Menurut Kamii (2001), kaedah pembelajaran sebegini tidak dapat memberikan pemahaman makna matematik kepada murid sekolah rendah kerana mereka tidak dapat menghayati dan memahami konsep yang terdapat di sebalik nombor-nombor dan operasi yang dilakukan. Bagi Lamon (2001) pula, murid yang selalu membiasakan diri mereka dengan melakukan operasi tetapi kurang menaakul dan memahami makna pembahagian akan menghadapi masalah dalam mengitlakkan maklumat yang dipelajari dengan situasi yang baru. Keadaan ini menjadi lebih rumit lagi apabila sistem pendidikan KSSR yang terlalu berorientasikan peperiksaan akan menyebabkan penerimaan perwakilan dalam membantu murid memahami makna pembahagian sebagai suatu usaha yang menerima tamparan hebat untuk direalisasikan (Noraini & Norjoharuddeen, 2008).

Dalam kajian ini, tumpuan diberikan kepada responden kajian semasa mereka diminta memberi makna kepada nombor dan operasi bahagi. Responden tersebut boleh dikatakan telah memahami makna perkataan yang dikemukakan jika beliau dapat mewakilkan semula apa yang dikaitkan dengan perkataan itu tanpa kehadiran unsur tersebut. Apabila responden kajian diminta menggambarkan yang mereka telah kaitkan dengan pembahagian semasa memberi makna kepada operasi bahagi, respons secara lisan dan bukan lisan yang diberikan mereka merupakan asas bagi mengenal pasti skim pembahagian yang dipunyai oleh mereka.

Penaakulan

Penaakulan merujuk proses menggunakan pengetahuan sedia ada untuk membuat kesimpulan, ramalan, atau memberi penjelasan yang tertentu (Nik Azis , 2014a). Ia melibatkan proses kognitif dalam meneliti alasan bagi kepercayaan, pemikiran, kesimpulan, pertimbangan, penilaian, perasaaan atau perbuatan individu. Ia juga membabitkan semua perkaitan antara pengalaman dan pengetahuan yang digunakan oleh individu untuk menjelaskan perkara yang diperhatikan, difikirkan, dimanipulasikan, dan disimpulkan.

Dalam pendidikan matematik, untuk membolehkan murid membuat penaakulan dengan berkesan, mereka perlu berkeupayaan untuk membuat konjektur, membuktikan konjektur, memberi penjelasan logikal, membuat analisis dan sintesis, membuat pertimbangan dan penilaian, dan memberikan justifikasi atau alasan (rasional) terhadap semua tindakan dan operasi yang dilakukan (BPK, 2015). Di samping itu, murid juga perlu berkeupayaan untuk berfikir dengan jelas, menyatakan pandangan secara padu, memahami hujah yang kompleks, membentuk dan mempertahankan hujah yang logik, membezakan hujah yang munasabah dengan hujah yang tidak munasabah, menganalisis suatu penulisan secara kritis, merumuskan makna daripada sesuatu penulisan, mensintesiskan idea daripada sumber yang berbeza, dan menyampaikan suatu hujah atau pandangan dengan jelas serta menyatakan andaian yang dibuat secara eksplisit.

Charles Sanders Peirce (1839-1914), pengasas pragmatisme, menghabiskan masa selama empat dekad pada penyelidikan induktif dan deduktif, model pemikiran logik dan falsafah sains, dan ditambahkan dengan prosedur inferens yang dipanggil abduktif. Akhirnya, beliau membezakan inferens kepada tiga jenis, iaitu deduktif, induktif, dan abduktif.

Penaakulan deduktif membabitkan proses membuat kesimpulan khusus berdasarkan pernyataan yang umum (Nik Azis, 2014a). Kesimpulan khusus yang dibuat itu bersifat pasti.

Menurut NCTM (2000), bukti (*proof*) dan penaakulan (*reasoning*) harus diperkenalkan bermula dari sekolah rendah hingga ke sekolah menengah. Misalnya, murid sekolah rendah dan menengah cuba membuktikan kebenaran suatu pernyataan secara deduktif (Abdussakir, 2011).

Model penaakulan deduktif yang biasa digunakan ialah model Barbara Aristotle, iaitu kategori silogisme yang berkaitan dengan tiga konsep: S (*subject*), P (*predicate*) dan M (*middle*), dalam tiga penyata (premis major, premis minor, kesimpulan) untuk memeriksa kesahihannya. Contohnya seperti dibawah:

(a) Premis Major (peraturan): Semua manusia adalah mortal (MAP).

(b) Premis Minor (kes): Socrates ialah manusia.

(c) Kesimpulan (hasil): Socrates adalah mortal.

Peirce memcadangkan satu contoh penaakulan deduktif yang melibatkan tiga konsep:

(a) Semua kacang dalam beg itu adalah hitam. (Peraturan)

(b) Kacang ini adalah dari beg itu. (Kes)

(c) Kacang ini adalah hitam. (Keputusan)

Penaakulan induktif pula membabitkan proses membuat kesimpulan umum berdasarkan beberapa kes yang khusus (Nik Azis, 2014a). Kesimpulan yang dibuat itu tidak semestinya bersifat pasti.

Peirce mencadangkan satu contoh penaakulan induktif yang melibatkan tiga konsep:

(a) Kacang ini adalah dari begi itu. (Peraturan)

(b) Kacang ini adalah hitam. (Kes)

(c) Semua kacang dalam beg itu adalah hitam. (Keputusan)

Penaakulan abduktif merujuk proses membuat dan menguji hipotesis dengan menggunakan maklumat terbaik yang dapat diperolehi pada sesuatu masa (Nik Azis, 2014a). Ia bermula dengan satu set pemerhatian yang tidak lengkap dan pengkaji berusaha untuk memberi penjelasan yang sebaik mungkin bagi set tersebut. Secara khususnya, penaakulan abduktif membabitkan satu hujah yang melakukan perkara berikut: (a) menyatakan tentang fakta tertentu, (b) menyatakan bahawa jikalau hipotesis tertentu adalah benar, maka kita akan memperoleh fakta tersebut, dan (c) membuat kesimpulan bahawa hipotesis tersebut adalah benar.

Peirce memcadangkan satu contoh penaakulan abduktif yang melibatkan tiga konsep:

(a) Semua kacang dalam beg itu adalah hitam. (Peraturan)

(b) Kacang ini adalah hitam. (Keputusan)

(c) Kacang ini adalah dari beg itu. (Kes)

Penyelesaian Masalah

Penyelesaian masalah merupakan fokus utama dalam pengajaran dan pembelajaran matematik (BPK, 2015). Ia juga merupakan bentuk pembelajaran pada tahap yang tertinggi (Gagne, 1985). Murid diharapkan dapat membina pengetahuan dan kemahiran baru melalui proses penyelesaian masalah, menyelesaikan masalah yang dihadapi dalam kurikulum matematik serta mengaplikasikan pelbagai strategi penyelesaian masalah matematik dalam konteks yang berbeza.

Abd Razak (2007) menyatakan penyelesaian masalah adalah suatu proses yang mana seseorang melakukan aktiviti kognitif bertujuan untuk mengatasi halangan yang wujud di antara keadaan awal dan keadaaan akhir daripada suatu masalah. Martinez (1998) menyatakan: *problem solving is the process of moving toward a goal when the path to that goal is uncertain* (Hsia-Po Vincent Kuo 2004) atau *the process of reaching solutions* (Gupta 2005).

Penyelesaian masalah matematik berayat bukan setakat mencari jawapan akhir tetapi membabitkan kefahaman dan penguasaan strategi yang lebih kompleks seperti memahami maksud soalan, menghubungkan maklumat dengan operasi, menjalankan operasi yang telah dikenalpasti dan mendapatkan penyelesaian yang dikehendaki. Pandangan ini selaras dengan penjelasan Mayer (1985, 1987) yang mengusulkan empat peringkat yang harus dilalui oleh seseorang individu semasa penyelesaian masalah iaitu (1) menterjemahkan masalah, (2) mengintegrasi masalah, (3) merancang dan mencari strategi, dan (4) melaksanakan penyelesaian. Dalam menjelaskan tentang teknik penyelesaian masalah matematik, murid cenderung menyelesaikan masalah matematik menggunakan teknik menghafal prosedur dan operasi matematik, menggunakan angka-angka dan istilah yang menjadi kata kunci (Mohd Uzi, 1999; Hassan, 1998). Selain itu, murid melaksanakan penyelesaian tanpa memahami dengan sempurna maksud keseluruhan sesuatu masalah semasa menyelesaikan masalah matematik berayat (Bransford et al., 1996). Tidak dinafikan bahawa teknik menghafal prosedur dan operasi dapat menghasilkan penyelesaian yang betul bagi masalah matematik yang rutin. Dalam penyelesaian masalah matematik, murid tidak harus dikongkong oleh satu teknik penyelesaian yang biasa disampaikan oleh guru sahaja. Teknik lain yang sesuai perlu digalakkan, lebih-lebih lagi yang bersesuaian dengan peringkat perkembangan kognitif murid, pengalaman dan persekitaran pembelajaran yang dilalui oleh murid.

Kepelbagaian penggunakan strategi umum dalam penyelesaian masalah harus diperluaskan (BPK, 2015). Antara strategi yang biasa digunakan ialah melukis gambar rajah, mengenal pasti pola, membuat jadual, carta dan senarai secara bersistem, menggunakan algebra, membuat simulasi, bekerja ke belakang serta menggunakan analogi.

Model Polya digunakan dalam kurikulum matematik bagi Kurikulum Standard Sekolah Menengah (KSSM) dan sekolah rendah (KSSR). Model Polya merupakan model penyelesaian masalah Matematik yang dibina oleh George Polya. dalam bukunya '*How to Solve It*' yang memberi tumpuan teknik penyelesaian masalah yang menarik dan juga prinsip pembelajaran matematik dapat dipindahkan sebaik mungkin. Model ini membabitkan empat fasa utama iaitu: (a) memahami dan mentafsirkan masalah; (b) menentukan strategi penyelesaian; (c) melaksanakan strategi penyelesaian; dan (d) menyemak semula.

Dalam menyelesaikan masalah, satu atau lebih strategi boleh digunakan untuk mendapat penyelesaian. Menurut Siti Rahaimah dan Noraini (2014), strategi penyelesaian masalah yang biasa digunakan ialah: permudahkan masalah, kaedah cuba jaya, melukis gambar rajah, mengenal pasti pola dan urutan, membina jadual, carta atau senarai yang sistematik, simulasi, membuat analogi, dan bekerja ke belakang.

Kajian Relevan

Beberapa kajian yang relevan dengan pemahaman dan pembahagian telah diletakkan dalam tajuk seperti berikut: pengajaran dan pembelajaran matematik dengan konstruktivisme radikal, pemahaman pembahagian, serta perwakilan dalam pengajaran dan pembelajaran matematik., penaakulan dalam penyelesaian masalah matematik, dan penyelesaian masalah dalam pendidikan matematik.

Pengajaran Dan Pembelajaran Matematik Dengan Konstruktivisme Radikal. Pendekatan konstruktivisme memainkan peranan yang penting dalam pengajaran dan pembelajaran matematik, khususnya di sekolah rendah. Untuk membantu murid membina konsep atau pengetahuan baru, guru perlu mengambil kira struktur kognitif yang sedia ada pada mereka. Apabila maklumat baru telah disesuaikan dan diserap untuk dijadikan sebahagian daripada pegangan kuat mereka, barulah bentuk baru tentang sesuatu ilmu pengetahuan dapat dibina. Proses ini dinamakan konstruktivisme.

Pendekatan konstruktivisme ini berkait rapat dengan pengetahuan sedia ada murid. Justeru itu guru matematik seharusnya mengambil kira apa yang murid tahu dan cuba mempertingkatkan interaksi antara murid agar pembelajaran menjadi lebih seronok dan bermakna. Oleh itu, persekitaran pembelajaran konstruktivisme dapat meningkatkan mutu pengajaran dan pembelajaran matematik dalam bilik darjah melalui pemahaman kendiri akan konsep dan pengetahuan matematik menerusi persekitaran pembelajaran yang kondusif (Zainal dan Afrinaleni, 2009). Ini dapat dibuktikan melalui kajian mereka. Dalam kajian Zainal dan Afrinaleni (2009) terhadap 40 orang murid Tingkatan Satu yang dipilih secara rawak di sebuah sekolah menengah di Mersing, Johor, yang menggunakan teori konstruktivisme, ternyata terdapat peningkatan yang memberangsangkan di antara Ujian Pra dan Ujian Pos, iaitu meningkat sebanyak 15% daripada 85% kepada 100%. Ini membuktikan bahawa pendekatan ini amat berkesan.

Kajian yang dilakukan oleh Peter, Abiodun dan Jonathan (2010), menunjukkan bahawa pendekatan konstruktivisme memberi kesan yang positif kepada akademik murid. Teori ini menyangkal dengan menyatakan perkembangan kognitif sebagai hasil pengumpulan pengetahuan dan perubahan perkembangan hanya akan berlaku apabila mencapai kematangan, iaitu pendapat Piaget yang berpendapat pembelajaran hanya akan berlaku apabila perkembangan telah terbentuk.

Teori konstruktivisme menurut Abdul Jalil Othman dan Bahtiar Omar (2005), menyatakan bahawa murid membina makna mengenai dunia dengan mensintesis pengalaman baru terhadap apa-apa yang mereka telah fahami sebelumnya. Mereka menjelaskan bahawa melalui prinsip konstruktivisme, ilmu pengetahuan dibina secara aktif oleh setiap individu berasaskan pengalaman yang dilaluinya. Manakala menurut Vighnarajah, Wong dan Kamariah (2008), mendapati guru yang menggunakan pendekatan teori konstruktivisme dapat mengaktifkan murid dalam penglibatan proses pengajaran dan pembelajaran.

Steffe dan Olive (2010) menggunakan teori konstruktivisme radikal semasa mengkaji pengetahuan pecahan yang dimiliki oleh murid sekolah rendah. Beliau menggunakan idea skim tindakan dan operasi yang terdiri daripada tiga bahagian, iaitu pengecaman tentang situasi tertentu atau situasi dialami seperti yang dipersepsi atau konsepsikan oleh murid; perkaitan aktiviti tertentu dengan situasi yang diasimilasikan, atau aktiviti atau prosedur khusus yang berkaitan dengan situasi dialami, yang mungkin membabitkan pelaksanaan operasi asimilasi dalam konteks situasi dialami; dan jangkaan tentang hasil tertentu atau hasil bagi aktiviti yang dijalankan, yang mungkin membabitkan sebarang modifikasi terhadap situasi dialami (situasi diasimilasi) yang dicetuskan oleh aktiviti tersebut, untuk menjelaskan pengetahuan yang dimiliki oleh murid. Dalam konteks ini, murid yang membina atau memiliki pengetahuan tertentu dianggap sebagai insan yang berinteraksi secara sosial, mengalami proses dianggap sebagai insan yang berinteraksi secara sosial, mengalami proses kematangan diri, dan menyusun diri sendiri. Konsep interaksi pula tidak terbatas kepada interaksi sosial.

Faridah (2009) menjalankan kajian kes yang berlandaskan konstruktivisme radikal terhadap murid Tahun Empat untuk mengenal pasti skim pembahagian nombor bulat mereka melalui gambaran mental, perwakilan, makna, tafsiran, cara penyelesaian masalah yang dimiliki oleh responden. Untuk mengenal pasti enam perkara asas, iaitu: (1) gambaran mental yang dimiliki oleh murid berumur 10 tahun tentang konsep bahagi dan nombor sifar; (2) Penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat yang tidak melibatkan sifar oleh murid berumur 10 tahun; (3) Penyelesaian masalah pembahagian yang melibatkan sifar oleh murid berumur 10 tahun; (4) Penjelasan yang diberikan oleh murid berumur 10 tahun tentang penyelesaian masalah pembahagian yang tidak membabitkan dan membabitkan sifar; (5) Pengaruh kaedah yang digunakan oleh murid berumur 10 tahun dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat yang tidak melibatkan sifar terhadap penyelesaian masalah pembahagian yang melibatkan sifar; dan (6) Penyelesaian masalah pendaraban membabitkan sifar oleh murid berumur 10 tahun.

Fan (2011) menjalanakan kajian terhadap murid Tingkatan Satu berlandsakan teori konstruktivisme radikal untuk mengenal pasti pemahaman mereka tentang pembahagian pecahan melalui gambaran mental, perwakilan, makna, tafsiran, cara penyelesaian masalah yang dimiliki oleh responden.. Terdapat dua tujuan kajian, pertama untuk mengenal pasti corak pemikiran responden kajian tentang pecahan wajar, pecahan tak wajar, dan makna bahagi berasaskan bahasa dan tingkah laku lisan dan bukan lisan mereka semasa temu duga klinikal dijalankan. Kedua, untuk mengenal pasti pemahaman pembahagian pecahan yang merujuk corak pemikiran murid Tingkatan Satu secara umum dengan membina cara atau kaedah khusus bagi menyelesaikan masalah bahagi yang membabitkan nombor bulat, pecahan, atau gabungan kedua-duanya menggunakan pengetahuan pecahan wajar, pecahan tak wajar, dan makna operasi bahagi. Instrumen kajian terdiri daripada enam tugasan membabitkan penggunaan bahan selanjar dan diskret yang diberikan kepada lima orang murid Tingkatan Satu dalam lima siri temu duga klinikal secara individu yang melibatkan gambaran mental tentang pecahan, perwakilan pecahan, makna terhadap pecahan, pentafsiran terhadap pecahan dan cara penyelesaian masalah tentang pecahan.

Pada keseluruhanya, kajian Zainal dan Afrinaleni, (2009); Peter, Abiadun dan Jonathan (2010); Abdul Jalil dan Bahtiar (2005); dan Vighnarajah, Wong dan Kamariah (2008) adalah mengenai teori konstruktivisme dapat meningkatkan mutu pengajaran dan pembelajaran matematik melalui pemahaman kendiri tentang konsep dan pengetahuan matematik; kajian Faridah (2009) mengenai kajian kes yang berlandaskan teori konstruktivisme radikal untuk mengenal pasti skim pembahagian nombor bulat responden melalui gambaran mental, perwakilan, makna dan cara penyelesaian masalah yang dimiliki oleh responden; dan kajian Fan (2011) pula membabitkan kajian berlandaskan teori konstruktivisme radikal untuk mengenal pasti pemahaman responden tentang pembahagian pecahan melalui gambaran mental, perwakilan, makna, tafsiran, cara penyelesaian masalah yang dimiliki oleh responden. Kajian-kajian tersebut memberi sokongan bahawa teori konstruktivisme radikal adalah sesuai digunakan untuk mengaji pemahaman guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat dan pentafsiran pemahaman mereka boleh melalui pentafsiran gambaran mental, perwakilan, makna, tafsiran, cara penyelesaian masalah dan cara penaakulan dalam penyelesaian masalah yang mereka miliki.

Pemahaman Pembahagian. Rutherford dan Ahlgren (1989) berpendapat bahawa murid mempunyai idea mereka sendiri tentang hampir semua perkara sama ada betul atau salah. Jika pemahaman dan pandangan diabaikan dan tidak diatasi, pemahaman atau kepercayaan asal mereka itu akan tetap kekal walaupun dalam peperiksaan, mereka memberi jawapan seperti yang dikehendaki oleh guru. Begitu juga dengan pembelajaran pembahagian, jika pemahamannya diabaikan, pemahaman mereka akan kekal di tahap asalnya tidak kira betul atau salah.

Pemahaman Pembahagian Melibatkan Nombor Multi-Digit. An, S. (2009) mengaji pengetahuan konten dan pedagogikal melalui pembahagian nombor multi-digit melibatkan 385 guru sekolah rendah dari 1 hingga gred 6 di 37 buah sekolah di enam bandar atau kawasan di empat wilayah di negara China. Dapatan kajian beliau menunjukkan bahawa pengetahuan guru-guru Cina tentang pembahagian nombor multi-digit mempunyai pelbagai dimensi dan mereka dapat menggunakan anggaran sebagai pendekatan utama untuk memupuk murid memahami konsep dan pengiraan dalam pembelajaran bahagian multi-digit. Kajian ini menyediakan cara yang ketat dan empirikal untuk mengukur pengetahuan konten dan pedagogikal dan mengemukakan bukti statistik bagaimana pengetahuan konten guru berkait dengan pengetahuan pedagogikal mereka dalam tiga bidang kandungan dan enam bidang pedagogi dalam pembahagian nombor multi-digit.

Pemahaman Pembahagian Melibatkan Sifar. Murid sekolah rendah mula belajar pembahagian nombor bulat secara formal pada Tahun Dua, dalam mana perkara tersebut diajar dengan menggunakan kaedah pemetakan dan pengukuran. Algoritma pembahagian panjang pula mula diajar kepada muird melibatkan sifar, adalah satu konsep yang sukar (Tsamir, Sheffer & Tirosh, 2000; Crespo, & Nicol. 2006 ; Russell, & Chernoff, 2010, 2011).

Menurut kajian Faridah (2011) terhadap konsepsi murid berumur 10 tahun tentang pembahagian melibatkan sifar dengan berlandaskan teori konstruktivisme radikal. Data dikumpulkan daripada 7 orang murid melalui 2 sesi temu duga klinikal yang melibatkan tugas menggambarkan konsep bahagi, menggambarkan konsep sifar, menyelesaikan masalah bahagi tanpa dan dengan sifar, dan menyelesaikan masalah darab melibatkan sifar. Majoriti murid didapati menggambarkan konsep bahagi dengan menulis simbol standard bagi operasi bahagi dan simbol bagi pembahagian panjang, manakala simbol bagi sifar pula dibaca sebagai “kosong” dan ditafsirkan sebagai tidak ada apa-apa atau tidak ada nombor.

Seterusnya, murid menggunakan kaedah pengukuran, pemetakan, dan penolakan berulang, baik secara sendiri mahupun secara gabungan untuk menyelesaikan masalah bahagi tanpa sifar. Sesetengah murid turut menggunakan algoritma pembahagian panjang untuk menyokong jawapan mereka. Bagi kedua-dua pembahagian melibatkan sifar dan tanpa sifar, semua murid menggunakan penjelasan berasaskan peraturan untuk menjustifikasikan jawapan mereka, dalam mana penjelasan tersebut mengandungi beberapa unsur yang berbeza. Sebagai tambahan, penyelesaian murid bagi masalah pembahagian tanpa sifar nampaknya berkisar pada tafsiran mereka tentang operasi bahagi, manakala penyelesaian bagi masalah bahagi melibatkan sifar pula nampaknya berkisar pada tafsiran mereka tentang sifar sebagai “kosong”.

Dalam tiga abad kebelakangan ini, konsep sifar dan pembahagian dengan sifar sering kali mendapat perhatian para pengkaji luar negara dan perkara yang menjadi fokus perbincangan atau penyelidikan mereka, termasuklah pemahaman murid (Seidelmann, 2001; Levenson, Tsamir & Tirosh, 2007), pemahaman guru dan guru pelatih (Ball, 1990; dan Crespo & Nicol, 2006; Robert, Teruni, & John, 2010), definisi dan model (Wheeler & Feghali, 1983; Watson, 1991; Kaplan, 1999), dan perkembangan konseptual (Kaplan, 1999; dan Seiffe, 2000; Effandi Zakaria & Norliza Zaini, 2009).

Secara khusus, Reys dan Grouws (1975) mendapati bahawa ramai murid gred empat dan lapan tidak menganggap sifar sebagai nombor dan sebahagian kekeliruan yang diperhatikan mereka dalam penyelesaian masalah pembahagian melibatkan sifar adalah berpunca daripada tindakan murid menyamakan “sifar” dengan “kosong” atau “tidak ada apa-apa”.

Seterusnya, Tsamir, Sheffer dan Tirosh (2000) mendapati bahawa murid Sekolah Menengah kurang memahami pembahagian dengan sifar disebabkan oleh pemahaman intuitif mereka tentang nombor, khususnya pemahaman bahawa operasi aritmetik yang membabitkan nombor mesti menghasilkan jawapan berbentuk nombor.

Hal yang sama diperhatikan oleh Ball (1990a. 1990b), dalam mana beliau mendapati kebanyakan guru pelatih Sekolah Rendah dan Sekolah Menengah tidak dapat memberi penjelasan yang munasabah secara matematik kepada jawapan mereka bagi masalah pembahagian yang melibatkan sifar.

Kajian Crespo dan Nicol (2006) terhadap 28 orang guru pelatih, memberikan gambaran yang tidak positif tentang pemahaman murid, dan bakal guru Sekolah Rendah dan Sekolah Menengah tentang konsep sifar dan pembahagian melibatkan sifar. Mereka mengaji pemahaman guru pelatih tentang pembahagian sifar dengan dua tugasan yang meminta guru pelatih mengenal pasti kesilapan idea matematik murid dan kajian itu dijalankan secara perbincangan dengan rakan-rakan dan melakukan secara individu. Hasil kajian menunjukkan bahawa guru pelatih mendapat pengetahuan matematik baru (apa jawapannya dan mengapa ia begitu) dan pengetahuan pedagogikal (Mereka mungkin menjelaskan kepada murid) pandangan melalui kedua-dua pengalaman. Mereka mengelaskan respons murid tentang pembahagian yang membabitkan sifar ke dalam dua kategori, iaitu penjelasan berasaskan peraturan dan penjelasan berasaskan penaakulan.

Levenson, Tsamir dan Tirosh (2007) menggunakan tiga kategori utama untuk mengelaskan respons murid, iaitu: (1) Penjelasan berasaskan matematik, yang menggunakan konsep matematik seperti definisi pendaraban sebagai penambahan berulang; (2) Penjelasan berasaskan perkara praktikal, yang menggunakan bahan manipulatif, objek konkrit, gambar rajah, lukisan, atau cerita dalam kehidupan harian; dan (3) Penjelasan berasaskan peraturan, yang menggunakan peraturan atau generalisasi yang tertentu. Fenomena bermasalah yang dikenal pasti dalam pendidikan matematik di luar negara menimbulkan persoalan, sama ada fenomena seperti itu turut berlaku di negara kita?

Pemahaman Pembahagian Melibatkan Pecahan. Amalan guru dalam kelas dan pembelajaran murid sangat dipengaruhi oleh pengetahuan yang dimiliki oleh guru (Li & Smith., 2007; Li & Kulm, 2008; Cengiz & Rathouz, 2011), tetapi malangnya, kebanyakan guru matematik mempunyai tahap yang rendah tentang pengetahuan kontekstual dan pengetahuan pedagogikal, yang mana kedua-dua pengetahuan ini diperlukan dalam mengajar matematik dengan berkesan (Tirosh, 2000; Ball, 1990a, 1990b; Isiksal & Cakiroglu, 2011; Depaepe, Verschaffel, & Kelchtermans, 2013). Konsep pembahagian merupakan salah satu bidang dalam mata murid dan matematik yang biasa sukar difahami oleh guru terlatih dan guru pelatih. Di mana mereka hanya dapat mewakili masalah pembahagian yang melibatkan nombor bulat tetapi tidak dapat mengembangkan perwakilan konsep pembahagian di pecahan (Ball, 1990a; Tirosh, 2000; dan Squire & Bryant, 2002; Zazkis, 2008; Roche & Clarke, 2013).

Pemahaman pembahagian pecahan juga dikaji oleh Rule & Hallagan (2006); Suhaidah (2006) dan Fan (2011). Menurut kajian (Verschaffel, Greer & Torbeyns, 2006; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007), guru selalunya berupaya menyelesaikan masalah yang melibatkan hasil tambah bagi pecahan, tetapi mereka tidak dapat mewakilinya dengan situasi kehidupan sebenar.

Menurut Rule & Hallagan (2006), operasi darab dan bahagi pecahan merupakan konsep yang paling susah dalam kurikulum sekolah rendah. Kajian terkini mendapati guru pelatih di Amerika Syarikat tidak mempunyai pemahaman tentang konsep pendaraban dan pembahagian pecahan dengan mendalam. Mereka telah menjalankan kajian terhadap 42 orang guru pelatih di Amerika Syarikat bertujuan: (a) mengenal pasti keberkesanan dua aktiviti membantu guru pelatih untuk membentuk pemahaman yang mendalam tentang pendaraban dan pembahagian pecahan; (b) mengenal pasti kesilapan yang biasa dilakukan oleh guru pelatih dan kesukaran yang mereka hadapi dalam mempelajari konsep ini; dan (c) membekalkan bahan melukis dan manipulatif yang berkesan bagi model pengajaran dan pembelajaran. Hasil kajian mereka menunjukkan kedua-dua aktiviti meningkatkan pemahaman konsep pendaraban dan pembahagian guru pelatih, iaitu daripada 50.8% dalam pra-ujian kepada 67.5% dan 71.4% dalam pasca ujian. Bagi mereka yang selesaikan kedua-dua tugasan mendapat skor 71.4% berbanding dengan 67.5% yang hanya selesai tugasan melukis sahaja. Dapatan kajian pemahaman tentang konsep pendaraban dan pembahagian pecahan dapat ditingkatkan dengan bantuan bahan (Rule, Sobierajski, & Schell, 2005).

Ma (1999) menyiapkan satu kajian dengan 23 orang guru Amerika Syarikat, didapati hanya 43% daripada guru-guru menjawab betul satu bahagian dalam masalah pecahan. Dia mendapati ingatan tidak lengkap guru tentang algoritma menghalang pengiraan mereka. Hanya salah seorang guru dapat tampil dengan perwakilan pembahagian pecahan. Guru-guru yang lain keliru dengan pembahagian ½ dengan pembahagian 2, pembahagian dengan ½ dengan pendaraban dengan ½, keliru ketiga-tiga konsep, atau tidak membuat sebarang perwakilan sama sekali. Ma juga mendapati bahawa pengetahuan pedagogi mereka menyebabkan jurang pengetahuan mengenai pembahagian pecahan (Ma, 1999).

Daripada literatur kajian lepas, didapati banyak kajian adalah bertumpu pada pemahaman pembahagian yang melibatkan sifar dan pemahaman pembahagian yang melibatkan pecahan, tetapi jarangnya ada orang mengkaji tentang pemahaman guru matematik tentang pembahagian nombor bulat. Dengan itu, adalah perlunya kajian ini diadakan agar pemahaman guru matematik tentang pembahagian nombor bulat dapat dikenal pasti. Dengan dapatan daripada kajian diharap dapat membantu guru mengajar pembahagian nombor bulat dengan lebih berkesan.

Pada keseluruhannya, kajian lepas tentang pemahaman pembahagian bertumpu pada pengetahuan konten dan pedagogikal guru sekolah rendah melalui pembahagian nombor multi-digit (An, 2009), pemahaman murid sekolah rendah tentang pembahagian melibatkan sifar (Tsamir, Sheffer & Tirosh, 2000; Faridah, 2011; Levenson, Tsamir dan Tirosh, 2007; Crespo & Nicol. 2006 ; Russell, & and Chernoff, 2010, 2011); pemahaman guru dan guru pelatih sekolah rendah tentang pembahagian melibatkan sifar (Ball, 1990a; dan Crespo & Nicol, 2006; Robert,Teruni & John, 2010), definisi dan model (Knifong & Burton; 1980; Wheeler & Feghali, 1983; Watson, 1991; Kaplan, 1999), dan perkembangan konseptual pengetahuan pedagogikal (Kaplan, 1999; dan Seiffe, 2000; Effandi Zakaria & Norliza Zaini,2009; Tirosh, 2000; Ball, 1990; Isiksal & Cakiroglu, 2011; Depaepe, Verschaffel, & Kelchtermans, 2013); dan pemahaman guru pelatih tentang pembahagian pecahan (Rule & Hallagan ,2006; Suhaidah, 2006; dan Fan, 2011; Rule, Sobierajski, & Schell, 2005; Ball, 1990a; Tirosh, 2000; dan Squire & Bryant, 2002; Zazkis, 2008; Roche & Clarke, 2013).

Seterusnya, pemahaman guru sekolah rendah tentang pembahagian pecahan (Ma, 1999); amalan guru dalam kelas dan pembelajaran murid sangat dipengaruhi oleh pengetahuan yang dimiliki oleh guru (Li & Smith., 2007; Li & Kulm, 2008; Cengiz & Rathouz, 2011; Verschaffel, Greer & Torbeyns, 2006; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007); pemahaman pembahagian pecahan (Rule & Hallagan, 2006; Suhaidah, 2006; Fan, 2011). Daripada kajian lepas didapati kekurangan kajian tentang pemahaman guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Dengan itu, kajian tentang pemahaman guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor perlu diadakan untuk memperolehi dapatan kajian sebagai rujukan dan panduan bagi para penyelidik pendidikan, penggubal kurikulum, pendidik dan penulis buku teks.

Perwakilan Dalam Pengajaran Dan Pembelajaran Pembahagian. Kurikulum KSSR pada dasarnya masih mempraktikkan Teori Psikologi Tingkah Laku. Fokus pembelajaran masih lagi menumpukan perhatian terhadap meningkatkan kecekapan, penguasaan kemahiran murid, dan pencapaian peperiksaan. Namun, akhir-akhir ini setelah beberapa kali berlaku reformasi dan penilaian semula dalam kurikulum tersebut, akhirnya fokus sukatan tersebut kelihatan lebih fleksibel dan mempunyai kecenderungan untuk menggabungkan Teori Psikologi Tingkah Laku dengan teori-teori yang lain. Ini terbukti dengan catatan hasrat KSSR antara lainnya adalah melaksanakan proses pembelajaran secara menekankan perwakilan, penaakulan, komunikasi dan penyelesaian masalah (Bahagian Pembangunan Kurikulum, 2015). Perubahan ini dilihat sebagai langkah positif kerana pembelajaran matematik berkait rapat dengan operasi mental, oleh itu tumpuan pembelajaran tidak seharusnya difokuskan pada perubahan tingkah laku eksplisit semata-mata, malah yang lebih penting lagi ialah memberi tumpuan terhadap memahami makna matematik yang dipelajari.

Penerimaan perwakilan dalam buku teks Matematik KSSR dilihat sebagai suatu langkah yang positif bagi membolehkan murid memahami makna pembahagian sebelum diperkenalkan kemahiran operasi kepada mereka (Moss & Case, 1999; Turner, 2008; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012). Ini penting kerana kebolehan murid memahami makna pembahagian di peringkat awal pembelajaran dilihat sebagai tunjang kepada keupayaan mereka menganalisis, mengitlakkan dan menyelesaikan masalah pembahagian dengan lebih bermakna di peringkat yang lebih tinggi (Noraini, 2006; Parmjit, 2005; Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero, 2009).

Bagi membolehkan murid memahami makna pembahagian, mereka lazimnya didedahkan dengan penggunaan pelbagai perwakilan semasa mempelajari pembahagian seperti rajah diskret, rajah selanjar, rod kuisenair, pembilang, perkataan, simbol, dan situasi kehidupan manusia (Bahagian Pembangunan Kurikulum, 2015). Penggunaan pelbagai perwakilan dikatakan dapat membantu murid membina pemahaman dan memahami makna matematik. Menurut Watanabe (2002), perwakilan yang digunakan bagi mewakilkan suatu pembahagian yang pada kebiasaannya kelihatan ringkas dan bermakna pada orang dewasa, sebaliknya tidak dapat dijelaskan oleh murid sekolah rendah. Ini bermaksud penggunaan perwakilan dalam pembelajaran pembahagian tidak memberi jaminan dapat meningkatkan pemahaman murid dalam topik tersebut.

Van de Walle (2010) juga mempunyai pandangan yang sama bahawa wujudnya kesilapan penggunaan perwakilan dalam kalangan guru dalam kelas matematik dengan nyata dan meluas kebelakangan ini. Menurut mereka, murid-

murid diarah mematuhi penggunaan perwakilan bagi memodelkan prosedur simbolik secara mengikuti arahan guru dan bukannya berdasarkan keperluan murid untuk membina pemahaman dalam pembelajaran masing-masing secara fleksibel. Dalam hal ini, fokus penggunaan perwakilan bagi memahami makna pembahagian telah bertukar kepada ketepatan menggunakan perwakilan di samping kejituan mewakilkan pembahagian, justeru ia tidak lagi dilihat sebagai suatu dorongan untuk melaksanakan operasi mental. Fenomena ini tidak ada bezanya dengan amalan sebelum ini yang memberi tumpuan pembelajaran pembahagian secara berfokuskan penggunaan simbol dan algoritma (Kamii, 2001; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim. (2012).

Pembelajaran tersebut di atas akan mendorong murid mengingati fakta dan peraturan yang sebenarnya memberikan makna yang minimum kepada mereka (Noraini Idris, 2006; Parmjit, 2005). Akhirnya, murid sentiasa mengulangi kesalahan yang sama akibat dan kegagalan melaksanakan peraturan sistematik dengan tepat (Hiebert & Carpenter, 1992; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012). Menurut Reys (2007), keadaan ini dapat diatasi sekiranya murid memahami makna matematik yang dipelajari secara menyemak semula jawapannya berdasarkan pemikiran yang logik.

Penekanan terhadap operasi dan algoritma yang berlebihan dalam KSSR telah memberikan tamparan hebat terhadap kemampuannya memberikan pemahaman akan matematik dalam kalangan murid sekolah menengah. Misalnya, dalam Kajian Antarabangsa Ketiga Matematik dan Sains — Ulangan (TIMSS-R) terhadap murid Tingkatan Dua mengenai mewakilkan 3/8 pada 16 petak segi empat sama yang diberi, didapati negara kita berada pada kedudukan ke-7 daripada 38 buah negara yang mengambil bahagian dalam pengujian tahap pemahaman mewakilkan pembahagian

(Martin, Mullis & Foy, and Olson, Erberber, Preuschoff, & Galia, 2008). Ini menggambarkan bahawa pemahaman murid bagi mentafsir makna pembahagian dari suatu perwakilan perlu dipertingkatkan.

Kajian tentang perwakilan pembahagian pecahan (Kamii, 2001; Watanabe, 2002; Fan, 2011; Roche, & Clarke, 2013) yang melibatkan perwakilan tentang nombor bulat bahagi pecahan, pecahan bahagi nombor bulat, dan pecahan bahagi pecahan.

Pengajaran konsep numerasi perlu difokuskan kepada perwakilan dan kaitan dengan isi kandungan serta pelaksanaannya (Siti Rahaimah & Noraini, 2014). Dengan itu banyak kajian telah dijalankan tentang perwakilan dalam pengajaran numerasi (Ball, 1990a; Cobb, 2005; Bynner, 2006; Askew, 2007; Siti Rahaimah, 2013;) mendapati guru-guru sekolah rendah tidak dapat menggunakan perwakilan secara berkesan disebabkan pengetahuan dan pemahaman konsep numerasi yang terhad.

Di samping itu, keperluan guru memahami peranan perwakilan dalam pengajaran numerasi dibincangkan oleh ramai penyelidik (Kamii, 2001; Cobb, 2005; Ainsworth, 2006; Bynner, 2006; Askew, 2007; Barmby, Bolden, & Harries, 2011; Siti Rahaimah, 2013). Dalam beberapa kajian (Campbell & Zazkis, 2002; Zazkis, 2005; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim. (2012), perwakilan mempunyai dua peranan utama, iaitu alat manipulasi dan komunikasi, dan alat untuk membantu pemahaman konsep. Menurut kajian (Lamon, 2001; Zazkis, 2008; Turner, 2007, 2008; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012) menunjukkan bahawa terdapat perhubungan yang kuat antara perwakilan yang digunakan dan pemahaman konsep yang berkenaan.

Pada keseluruhannya, terdapat banyak kajian tentang perwakilan, antaranya termasuklah kajian tentang perwakilan membolehkan murid memahami makna pembahagian (Hiebert & Carpenter, 1992; Moss & Case, 1999; Parmjit, 2005; Noraini, 2006; Turner, 2008; Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero, 2009; Faridah, 2009; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012); perwakilan tidak menjamin pemahaman murid dalam topik tertentu (Watanabe, 2002; Parmjit, 2005; Noraini Idris, 2006; Van de Walle, 2010); pembelajaran pembahagian secara berfokuskan penggunaan simbol dan algoritma (Kamii, 2001; Lamon, 2001; Reys, 2007; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012), kajian tentang tahap pemahaman mewakilkan pembahagian (Martin, Mullis, & Foy, and Olson, Erberber, Preuschoff & Galia, 2008), perwakilan pembahagian pecahan (Kamii, 2001; Watanabe, 2002; Fan, 2011; Roche & Clarke, 2013), kajian tentang perwakilan dalam pengajaran numerasi (Ball, 1990a; Cobb, 2005; Bynner, 2006; Askew, 2007; Siti Rahaimah, 2013; Siti Rahaimah & Noraini, 2014); keperluan guru memahami peranan perwakilan dalam pengajaran numerasi (Kamii, 2001; Cobb, 2005; Ainsworth, 2006; Bynner, 2006; Askew, 2007; Barmby, Bolden, & Harries, 2011; Siti Rahaimah, 2013); perwakilan sebagai alat manipulasi dan komunikasi, serta alat untuk membantu pemahaman konsep (Lamon, 2001; Campbell & Zazkis, 2002; Zazkis, 2005; Zazkis, 2008; Turner,2008; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012).

Penaakulan Dalam Penyelesaian Masalah Matematik. Penaakulan merupakan satu proses yang penting dalam pembelajaran matematik. Ia membabitkan proses menggunakan pengetahuan sedia ada untuk membuat kesimpulan, ramalan, atau memberi penjelasan yang tertentu. Pada asasnya, terdapat beberapa jenis penaakulan seperti penaakulan deduktif, induktif, dan abduktif.

Banyak kajian telah dilakukan tentang penaakulan dalam penyelesaian masalah matematik. Fazura, Sharifah Norul Akmar, dan Leong (2015) telah membuat kajian tentang penaakulan dalam penyelesaian masalah yang melibatkan perkadaran terhadap murid Tahun Lima. Penaakulan perkadaran yang menggunakan konsep nisbah dan kadaran bukan sahaja dianggap sebagai penghubung antara nombor, aritmetik, algebra, dan matematik lanjutan (Abrahamson, 2005; Fuson & Lamon, 2007; Lesh, Post, & Behr, 1988), malah penaakulan dalam topik nisbah dan kadaran turut diajar secara formal bermula dari Gred Lima hingga Gred lapan (National Council of Teaching of Mathematics, 2000). Hasil kajiannya menunjukkan Murid tidak bergantung kepada satu strategi sahaja, tetapi beralih kepada menggunakan gabungan strategi atau konsep yang lebih sesuai untuk menyelesaikan masalah melibatkan *missing-value*.

Kajian tentang pemahaman terhadap pembahagian dan penggunakan strategi penaakulan (Kaasila, Pehkonen, & Hellinen, 2009) telah dilakukan terhadap guru pelatih (269 orang) dan murid sekolah menengah (1434 orang) di Finland. Mereka menggunakan soalan, "Kita dapati 498:6 = 83. Bagaimanakah anda membuat kesimpulan berdasarkan perkaitan ini (tanpa menggunakan pembahagian panjang), berapakah 491: 6 = ?". Masalah ini mengukur pemahaman konsep, penaakulan yang sesuai digunakan, dan prosedur penyelesaian. Hasil kajian menunjukkan kurang pemahaman tentang pembahagian, di mana hanya 45% guru pelatih dan 37% murid sekolah menengah dapat menyelesaikan masalah dengan betul. Strategi penaakulan yang digunakan oleh kedua-dua kumpulan ini adalah tidak banyak beza. Empat faktor utama dikenal pasti daripada hasil kajian: (1) masih dalam perigkat integer, (2) tidak berupaya menguruskan baki, (3) menghadapi kesukaran dalam memahami perkaitan antara operasi yang berlainan, dan (4) strategi penaakulan tidak mencukupi.

Ini menunjukkan strategi atau cara penaakulan memainkan peranan yang penting dalam sesetengah situasi, semasa guru cuba meningkatkan kemahiran murid.

Daripada kajian didapati penaakulan sangat penting dalam penyelesaian masalah, terutamnya dalam menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Dengan itu, ada wajar kita membuat kajian tentang cara penaakulan dalam penyelesaian masalah melibatkan nombor bulat.

Penyelesaian Masalah Dalam Pendiddikan Matematik. Masalah matematik berayat (word problems) merupakan komponen penting dalam kurikulum matematik. Bagaimanapun, kebanyakan murid belum berupaya menguasai kemahiran ini sedangkan mereka berupaya melaksanakan operasi asas matematik. Satu strategi atau teknik yang sesuai perlu dikenalpasti bagi membantu murid menangani kesukaran dalam menyelesaikan masalah matematik berayat.

Penyelesaian masalah matematik berayat bukan setakat mencari jawapan akhir tetapi membabitkan kefahaman dan penguasaan strategi yang lebih kompleks. Kajian Samsudin dan Fatimah Saleh (2004) tentang sejauh mana murid Tahun Lima membuat visualisasi dalam memilih strategi penyelesaian masalah matematik berayat. Lima bentuk gambaran dikenalpasti dalam proses visualisasi murid: imej, komponen soalan, situasi masalah, matlamat dan konteks soalan. Visualisasi yang dilakukan oleh murid didapati telah memudah dan mencepatkan tugas mereka mendapatkan penyelesaian. Dapatan menunjukkan murid menggunakan strategi yang berbeza seperti menggambarkan secara mental, melukis gambar/gambar rajah atau membina perlambangan untuk mewakili gambaran mereka.

Menurut Kajian (Ball, 1990a; Cai, & Silver,1995; Abd Razak, 2007; Hellinen, & Pehkonen, 2008), penyelesaian masalah merupakan satu proses yang kompleks dan sukar dipelajarinya. Ia mengandungi satu siri tugasan dan proses pemikiran yang dihubungkait rapat untuk membantu pembentukan satu set heuristik atau corak heuristik. Ia merupakan satu set cadangan dan soalan yang harus dilalui oleh murid untuk membantunya dalam penyelesaian masalah. Heuristik adalah kaedah umum yang dapat diaplikasikan kepada semua kelas bermasalah. Penyelesaian masalah berlandaskan teori konstruktivisme radikal ditakrifkan sebagai usaha untuk mengatasi gangguan dengan mengubah suai atau membina skim tindakan dan skim operasi yang baru (Von Glasersfeld, 1995). Ia membabitkan kebolehan individu untuk membina pengetahuan yang berdaya maju dengan menggunakan proses asimilasi dan akomodasi.

Menurut kajian (Leah Nillas, 2003) tentang pemahaman guru pelatih dan strategi penyelesaian masalah yang digunakan dalam pembahagian pecahan, guru pelatih menggunakan pelbagai strategi dalam penyelsaian masalah, tetapi kekurangan pemahaman konseptual tentang pembahagian pecahan.

Terdapat kajian yang memfokuskan tentang keupayaan menjana masalah matematik mula mendapat perhatian (Ilfi & Md. Nor, 2009; Rohana et. al, 2009; Faridah & Effandi, 2010). Dapatan kajian yang lepas tentang penjanaan masalah matematik telah menarik minat pengkaji untuk mengetahui keupayaan pelajar dalam menjana masalah matematik dalam konteks pendidikan di Malaysia. Di samping itu, pengkaji ingin mengenal pasti ciri-ciri sikap dan keupayaan pelajar dalam menyelesaikan masalah matematik.

Kajian (Margaret, 1998; Biggs & Collis, 1991; Tirosh & Graeber, 1989) menunjukkan guru pelatih menghadapai kesukaran dalam menyelesaikan masalah berayat. Ini juga menunjukkan kekurangan pengetahuan kandungan dan prosedural.

Menurut kajian (Wun, Lim, & Chew, 2015; Sharifah Norul Akmal, 2012; Lim 2013) guru sekolah rendah menggunakan pelbagai strategi dalam penyelesaikan masalah matematik. Hasil kajian Wun, Lim dan Chew terhadap 120 guru sekolah rendah dari universiti awam di Semenanjung Malaysia yang mendaftar di Program Pengajian Siswazah 4 Tahun (Program Pensiswazahan Guru) mengambil jurusan matematik, didapati 79.2% daripada para peserta berjaya menyelesaikan masalah pagar. Mereka menggunakan pelbagai strategi penyelesaian masalah: (i) cuba jaya (juga dikenali sebagai meneka dan memeriksa), (ii) menggunakan algebra, (iii) membuat jadual, carta atau sistematik senarai, (iv) lukisan rajah, (v) mengenal pasti corak, dan (vi) penaakulan logik. Hasil kajian juga menunjukkan 85% peserta menggunakan strategi yang sama untuk memeriksa penyelesaian mereka untuk masalah pagar tanpa meneroka.

Daripada kajian tersebut di atas, didapati kajian cara penyelesaian masalah sangat penting dalam penyelesaian masalah matematik sekolah rendah. Guru perlu menguasai pelbagai cara penyelesaian masalah sebelum mengajar murid, terutamanya dalam penyelesaian masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Dari kajian didapati kurang kajian mengkaji cara penyelesaian masalah bagi guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Dengan itu, adalah wajar pengkaji mengkaji cara penyelesaian masalah guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat.

Sudah tiba masanya bagi pendidik dan pengkaji di Malaysia memberikan perhatian serius tentang isu dan prospek yang disumbangkan oleh pelbagai teori perwakilan bagi topik pembahagian supaya usaha yang bersepadu dan bersungguh-sungguh dapat dilakukan bagi memahami, mengimplikasi dan memperbaiki pelaksanaannya dalam Matematik KSSR. Isu dan prospek ini penting untuk diambil perhatian kerana banyak kajian di luar negara mendapati perwakilan sangat penting dalam membantu murid meningkatkan pemahaman makna dalam pembelajaran pembahagian.

Pelbagai alasan negatif seperti sukatan murid yang terlalu padat dan sistem pendidikan yang terlalu berorientasikan peperiksaan bukan lagi sebab yang boleh diterima dalam era Malaysia yang sedang menuju ke arah sebuah negara maju yang memerlukan modal insan yang bukan sahaja tahu mengira, tetapi juga tahu berfikir secara logik dan bernas. Seperti dijelaskan oleh Skemp (1989), pengetahuan tentang 'apakah' sahaja tidak mencukupi dalam pembelajaran matematik; yang lebih penting ialah mengetahui ‘mengapakah'. Oleh itu, tidak timbul lagi persoalan tentang sejauh manakah guru optimis bahawa perwakilan perlu diberi penekanan terhadap murid memandangkan matlamat akhir yang dikehendaki adalah memastikan mereka dapat menjawab soalan dengan tepat dan pantas.

Rumusan

Bab ini telah membuat perbincangan lanjut tentang konstruktivisme radikal dan kesesuaiannya dengan kajian ini; perbincangan lanjutan konseptual tentang istilah psikologi iaitu pemahaman; perbincangan lanjutan konseptual tentang istilah matematik iaitu pembahagian; perbincangan lanjutan konseptual tentang istilah lain iaitu gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan dan penyelesaian masalah; dan kajian relevan untuk menyokong kajian.

Berdasarkan tinjauan literatur, terdapat keperluan kepada kajian bagi mengenal pasti pemahaman guru matematik tentang pembahagian nombor bulat. Untuk menjalankan kajian terhadap pemahaman guru matematik tentang pembahagian nombor bulat, kaedah pengumpulan dan penganalisisan data bagi menjawab soalan kajian akan dibincangkan di bab tiga.

BAB 3 METODOLOGI KAJIAN

Pengenalan

Bab ini mengandungi lapan bahagian, iaitu pengenalan, reka bentuk kajian, peserta kajian, kaedah pengumpulan data, instrumen kajian, kajian rintis, kebolehyakinan, kaedah analisis data rumusan. Perkara yang penting dalam perbincangan bab ini ialah bagaimana data dikumpulkan bagi tujuan kajian.

Reka Bentuk Kajian

Kajian ini merupakan kajian deskriptif yang mengumpulkan data kualitatif. Reka bentuk kajian ini menggunakan kajian kes untuk mengenal pasti pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat, dan data dikumpulkan melalui kaedah temu duga klinikal (Steffe, 2010: Yin, 2009; Nik Azis, 2014a) berpandukan borang protokol.

Kajian kes merupakan satu kaedah kajian yang digunakan untuk mengumpulkan maklumat secara mendalam mengenai tingkah laku individu dan keadaan sosial untuk mengetahui bagaimana tingkah laku individu atau perubahan keadaan sosial tersebut berlaku (Chua, 2006; Creswell, 2012).

Kajian kes ialah satu bentuk kajian dalam sistem tertutup bagi mengenal pasti makna dan pemahaman sesuatu keadaan atau responden (Merriam, 2009; Gray, 2007; Creswell, 2012; Yin, 2013; Nik Azis, 2014a). Selain itu, proses menjalankan suatu kajian kes bermula dengan memilih "kes" untuk dikaji. Istilah "kes" ditakrifkan oleh Merriam (2009) sebagai entiti tertentu seperti orang, tempat, program, proses, masyarakat dalam sistem tertutup yang memiliki keunikan sifat pada pandangan pengkaji (Merriam, 2009; Gray, 2007; Yin, 2013; Nik Azis, 2014a).

Kajian kes semakin hari semakin mendapat sambutan daripada pengkaji kualitatif (Stake, 2000; Merriam, 2009; Gray, 2007; Yin, 2013; Nik Azis, 2014a). Stake menegaskan bahawa suatu kes boleh bersifat ringkas atau kompleks, tetapi berfokus dan spesifik seperti kajian tentang seorang bayi, sekumpulan guru atau satu kejadian. Dengan itu, Stake (2000) berpendapat bahawa kajian kes merupakan suatu bentuk kajian yang memberi fokus kepada entiti tertentu yang melibatkan satu jangka masa untuk menjalankan inkuiri bagi menyelesaikan kes. Inkuiri yang dimaksudkan ialah proses inkuiri dan hasil daripada proses inkuiri berkenaan.

Kajian kes merupakan salah satu bentuk kajian etnografi yang berkaitan dengan program, peristiwa, atau aktiviti yang melibatkan individu (Creswell, 2008, 2012; Fraenkel & Wallen, 2009). Menerusi kajian kes, penyelidikan secara mendalam, iaitu bagi mengenal pasti "apa", "mengapa", "bagaimana" sesuatu kes dapat diselidik.

Menurut Yin (2013), kajian kes bukan semata-mata merujuk kepada kajian berkaitan objek yang hendak dikaji, seperti individu, organisasi, proses, program, kejiranan, atau institusi, tetapi strategi pelaksanaannya juga perlu dititikberatkan. Sehubungan itu, Yin telah memberikan dua contoh fokus bagi mendefinisikan kajian kes. Pertama, kajian kes ialah suatu bentuk kajian inkuiri empirikal, iaitu suatu kajian yang dijalankan bagi mengenal pasti fenomena yang tidak jelas. Dalam hal demikian, kajian secara pemerhatian atau eksperimental perlu dijalankan, bukannya merujuk semata-mata pada teori dan dapatan kajian lepas sahaja. Kedua, kajian kes ialah satu kajian inkuiri yang menggunakan pelbagai strategi pelaksanaan, termasuklah reka bentuk kajian, teknik pengumpulan data, dan kaedah penganalisisan data. Beliau menyimpulkan bahawa keperluan menjalankan suatu kajian kes berkait rapat dengan persoalan kajian untuk mengenal pasti "bagaimana atau mengapa" suatu kes berlaku dengan kawalan yang terhad dan fokus kajian adalah berlandaskan fenomena semasa dalam konteks kehidupan sebenar.

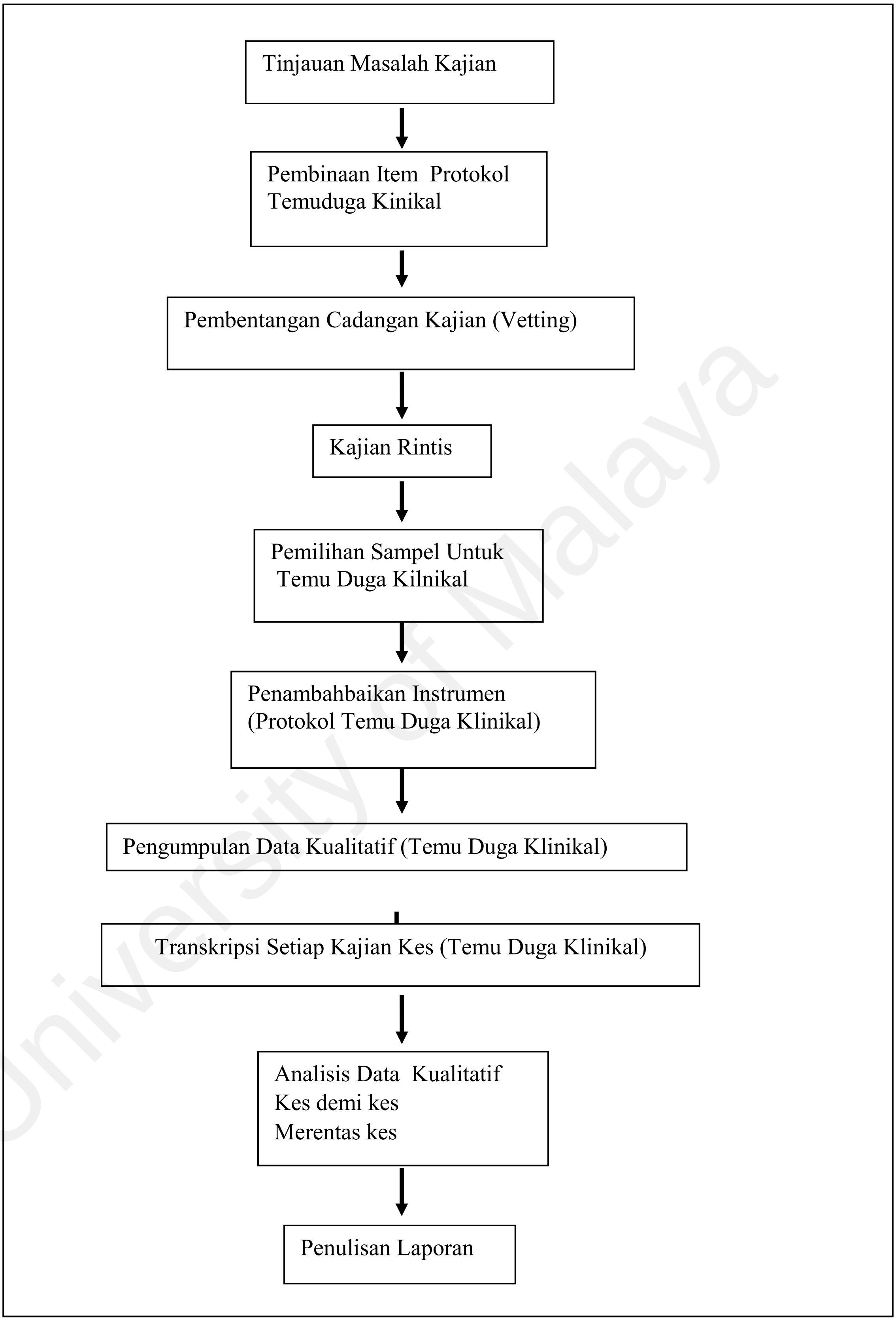
Perbincangan dengan murid melalui soalan yang bersifat terbuka dan mencabar semasa aktiviti pengiraan mental dapat memberikan maklumat untuk mengkaji pemahaman murid (Steffe & Olive, 2010: Nik Azis, 2014a). Oleh itu, kaedah temu duga perlu disusuli kerana kaedah ini dapat mencungkil proses pemikiran murid (Steffe & Olive, 2010). Maklumat daripada temu duga ini berbeza daripada jawapan lazim murid iaitu melalui penghafalan sahaja, di mana selalunya murid diminta memberi jawapan yang betul dalam masa yang tersingkat dengan masa untuk berfikir paling minima (Nik Azis, 2014a). Menurut beliau lagi, dalam sesi temu duga, murid diberi ruang untuk berfikir dengan lebih lama dan murid digalakkan menyuarakan apa yang difikirkan supaya dapat direkodkan oleh pengkaji.

Kajian kes juga dikenali sebagai kajian klinikal kerana ia mengkaji secara intensif tentang seseorang individu atau situasi (Steffe & Olive, 2010: Nik Azis, 2014a). Teknik ini telah digunakan oleh Piaget (1969) bagi menyiasat perkembangan konsep matematik dalam kognitif manusia (Haylock, 2007; Kalder, 2007; George, 2008; Safi, 2009; Depaepe, Verschaffel, & Kelchtermans, 2013; Thanheiser, Whitacre, & George, 2014). Selain itu, Hunting (1997) berpendapat bahawa temu duga klinikal telah digunakan dengan meluas semenjak 1980an setelah pengkaji memahami cara yang digunakan oleh Piaget bagi mengkaji pemahaman matematik seseorang. Contohnya, penyelidik dari fahaman konstruktivisme radikal (Steffe & Thompson, 2000; Hackenberg, 2007; Steffe & Olive, 2010; Nik Azis, 2014a) telah menggunakan temu duga klinikal bagi meneroka skim pengetahuan matematik murid.

Teknik temu duga klinikal merangkumi tiga komponen, iaitu pemerhatian tulen, penyoalan kritis, dan penilaian klinikal (Von Glasersfeld, 1995, 1998, 2001, 2005; Dykstra, 2007; Nik Azis, 1987, 1999, 2003, 2008, 2014a; Von Glasersfeld & Larochelle, 2007; Steffe, 2007; Steffe & Olive, 2010; Cobb & Steffe, 2011). Pemerhatian tulen merujuk pemerhatin pengkaji secara terus terhadap tingkah laku responden semasa menyelesaikan masalah, bukan pemerhatian tidak langsung.

Menurut Piaget (1929), pemerhatian langsung mestilah menjadi titik permulaan bagi semua kajian yang bertujuan untuk mengenal pasti pemikiran responden dan juga kawalan akhir bagi sebarang aktiviti yang timbul daripadanya. Penyoalan pula, merujuk soalan yang fleksibel, mencungkil meneroka, dan intensif yang dikemukakan kepada responden semasa temu duga untuk membolehkan pengkaji merumuskan dan menguji andaian tentang pengetahuan matematik yang dimiliki oleh responden. Seterusnya, penilaian klinikal merujuk penilaian yang dibuat oleh pengkaji untuk menyemak respons yang diberikan oleh responden, mendapat penjelasan lanjut tentang pernyataan yang kurang jelas, dan mentafsirkan respons yang diberikan oleh mereka.

Dengan itu, pengkaji perlu memerhatikan tingkah laku responden dengan teliti semasa temu duga dijalankan. Bagi memudahkan pemerhatian dan penganalisisan data, semua sesi temu duga perlu dirakamkan dengan menggunakan alat perakam video. Tingkah laku adalah penting kerana pengkaji boleh membuat inferens temu duga klinikal ini menggunakan satu set protokol yang mengandungi beberapa soalan dan tugasan.



Rajah 3.1 Rangka proses kajian

Berdasarkan pendapat-pendapat tersebut di atas, pengkaji berpendapat kajian kes merupakan kajian yang paling sesuai bagi kajian yang memberi tumpuan kepada usaha untuk mengenal pasti pemahaman guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Rajah 3.1 memaparkan kerangka proses kajian.

Peserta Kajian

Peserta kajian dipilih dengan menggunakan pensampelan bertujuan. Peserta kajian ini terdiri daripada enam orang guru matematik Tahun Enam. Pemilihan peserta kajian dibuat berdasarkan persetujuan bertulis yang diperoleh dari pihak sekolah dan guru itu sendiri atas nasihat pihak sekolah dan ketua panitia matematik sekolah tersebut.

Pensampelan bertujuan merujuk kepada prosedur pensampelan iaitu sekumpulan peserta kajian yang mempunyai ciri-ciri tertentu sahaja dipilih sebagai peserta kajian berdasarkan pengetahuan dan tujuan khusus penyelidikan pengkaji (Merriam, 2009; Creswell,2008a, 2012). Ini bermakna tidak semua peserta dalam populasinya dipilih oleh pengkaji sebagai peserta kajian.

Tujuan pensampelan bertujuan adalah untuk mendapatkan individu dan lokasi yang paling sesuai bagi membantunya untuk membentuk pemahaman yang terperinci tentang fenomena utama. Kriteria yang digunakan bagi pemilihan individu dan tempat kajian ialah kaya maklumat, yakni individu dan tempat yang berpotensi untuk membekalkan maklumat yang berguna bagi menjawab soalan kajian atau menguji hipotesis kajian, berpotensi untuk membantu pengkaji mempelajari dan memahami fenomena utama, atau berpotensi untuk membekalkan pandangan orang yang pasif atau berdiam diri (Merriam, 2009; Creswell, 2008, 2012; Nik Azis, 2014a).

Dalam kes ini, peserta kajian adalah terdiri daripada guru Matematik Tahun Enam, yang tidak mewakili seluruh populasi guru Matematik Tahun Enam di sekolah rendah. Sampel begini bukan merupakan sampel rawak dan hasil kajiannya tidak dapat digeneralisasikan kepada seluruh populasi guru di sekolah kerana peserta tersebut tidak mewakili semua guru Matematik Tahun Enam dalam populasi berkenaan. Keputusan kajian hanya mewakili kumpulan peserta kajian yang dipilih sahaja.

Peserta kajian berkenaan dipilih dengan menggunakan pensampelan bertujuan atas beberapa sebab:

(1) Kajian kes ini dijalankan bukan untuk tujuan menggeneralisasikan dapatan kajian kepada populasi guru matematik Tahun Enam, dengan itu tidak perlu menggunakan kaedah pensampelan kebarangkalian.

(2) Kajian ini menggunakan pensampelan bertujuan yang berdasarkan andaian pengkaji dapat menerokai, memahami, dan menumpukan kajian secara mendalam pada kes yang spesifik (Merriam, 2009; Creswell, 2008, 2012). Mereka juga menegaskan bahawa pendekatan ini adalah sesuai digunakan bagi memilih peserta kajian supaya maklumat yang kaya dapat diperoleh daripada peserta kajian.

(3) Peserta dan lokasi kajian dipilih mengikut kesesuaian kajian (Cresswell, 2008; Gall, Gall & Borg, 2010). Contohnya, peserta kajian dipilih berdasarkan keupayaan, kesanggupan, komitmen dan motivasi mereka untuk memberikan maklumat yang dikehendaki dalam kajian semasa. Menurut Fraenkel & Wallen (2009), pensampelan bertujuan sesuai digunakan untuk memilih peserta kajian yang memerlukan kriteria

khusus. Selain itu, ia juga mempunyai kelebihan, iaitu dapat memastikan maklumat secukupnya diperoleh bagi menjawab persoalan kajian.

Enam orang peserta kajian yang dipilih dari negeri Selangor dan Melaka, antaranya ada dua orang guru dari Melaka dan empat orang guru dari Selangor. Peserta yang terpilih itu terdiri daripada seorang guru berbangsa Melayu dan lima orang guru berbangsa Cina yang datang dari sekolah jenis kebangsaan seramai lima orang dan seorang guru dari sekolah kebangsaan. Lokasi sekolah meliputi kawasan bandar dan kawasan luar bandar, iaitu tiga dari bandar dan tiga dari luar bandar. Sekolah daripada perbezaan lokasi dipilih agar dapat mengenal pasti terdapat perbezaan maklumat tentang pemahaman di antara guru yang mengajar di kawasan bandar dan luar bandar. Peserta kajian tersebut menpunyai pengalaman mengajar matematik yang berlaian, antaranya pengalaman mengajar guru dalam lingkungan kurang lima tahun, 5 hingga 10 tahun dan lebih 10 tahun mengajar Matematik Tahun Enam. Seterusnya, umur peserta kajian yang dipilih adalah dalam lingkungan 21 tahun hingga 30 tahun, 31 tahun hingga 40 tahun, 41 tahun hingga 50 tahun, dan umur lebih 51 tahun. Taraf akademik peserta kajian, antaranya ada diploma dan ijazah sarjana muda. Opsyen pengajian mereka pula, antaranya ada opsyen matematik dan bukan opsyen matematik.

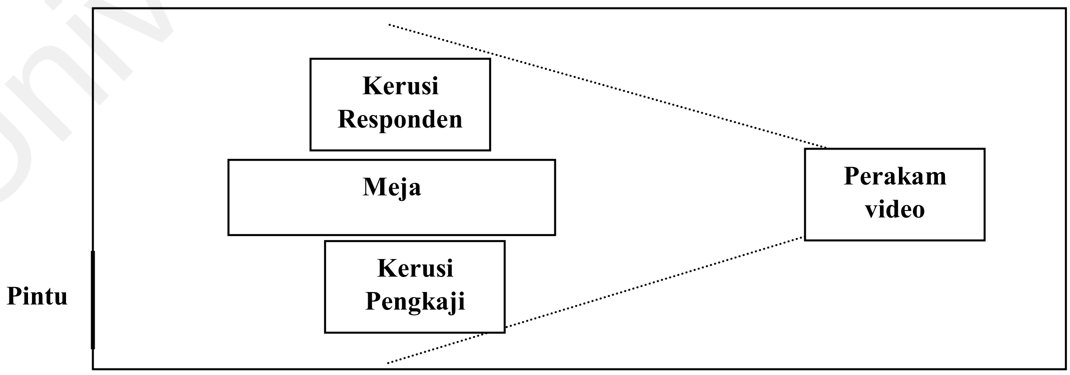
Kaedah Pengumpulan Data

Sebelum menjalankan kajian, surat kebenaran daripada Bahagian Perancangan dan Penyelidikan, Kementerian Pendidikan Malaysia; Jabatan Pelajaran dan Negeri, dan Universiti Malaya telah diperoleh untuk menjalankan kajian. Seterusnya, pengkaji memohon kebenaran daripada sekolah-sekolah yang terlibat untuk mendapatkan kerjasama dan bantuan bagi melancarkan perjalanan kajian dan pengumpulan data.

Data yang dikumpulkan merupakan data kualitatif yang diperoleh melalui temu duga klinikal. Data kualitatif pula merujuk kepada lakaran, pernyataan atau penerangan responden tentang pandangan, kerja atau aktiviti yang dilakukan.

Temu duga klinikal telah dijalankan di sekolah tempat responden mengajar selepas atau sebelum waktu persekolahan, atau pada hari Sabtu pada bulan Mac 2014 hingga bulan September 2014. Bagi responden yang dipilih ditemu duga di dalam bilik mesyuarat dan kelas yang tertutup dan terang dengan dipasangkan kipas elektrik atau berhawa dingin. Bilik itu ialah bilik tertutup yang terdapat sebuah meja dan dua buah kerusi dan dipasang dengan lampu terang serta berhawa dingin. Sebelum temu duga klinikal dijalankan, pengkaji telah mendapat persetujuan daripada responden untuk menjalankan kajian dan proses temu duga klinikal itu akan dirakamkan dengan perakam video. Lukisan pelan temu duga klinikal yang dijalankan adalah seperti ditunjukkan dalam rajah 3.2.

Responden temu duga dipilih adalah atas nasihat daripada pihak sekolah dan ketua panitia matematik. Setiap sesi temu duga itu akan mengambil masa lebih kurang satu jam bagi setiap responden dengan berdasarkan protokol temu duga.



Rajah 3.2 Plan kedudukan menjalankan temu duga klinikal

Sebelum sesi temu duga klinikal, pengkaji telah memohon surat kebenaran daripada Jabatan Pendidikan Negeri dan mendapat persetujuan daripada responden. Pengkaji juga memberi surat akuan kepada responden bahawa segala jawapan atau respons daripada responden adalah rahsia.

Terdapat lima temu duga klinikal dilaksanakan dalam kajian ini. Setiap sesi temu duga klinikal dijalankan adalah mengikut jadual yang dipersetujui di antara pengkaji, responden dan pihak sekolah. Pelaksanaan temu duga klinikal adalah berbeza dalam setiap sesi temu duga berdasarkan fokus temu duga. Penjelasannya adalah seperti berikut:

Temu Duga Klinikal Pertama. Fokus temu duga klinikal pada sesi ini adalah pada gambaran mental guru Matematik Tahun Enam mengenai nombor bulat , nombor 8, nombor 12, sifar, kosong, tiada apa-apa, bahagi dan “lapan bahagi empat”, “dua belas bahagi tiga”, dan “lima bahagi dua”.

Temu duga pertama bertujuan untuk mengenal pasti gambaran mental tentang nombor bulat, sifar, kosong, tiada apa-apa, bahagi, dan ayat matematik“lapan bahagi empat”, “dua belas bahagi tiga”, dan “lima bahagi dua” yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam. Dalam aktiviti ini, guru diminta menjelaskan perkara yang mula-mula terlintas dalam fikiran mereka apabila terdengar sebutan “nombor bulat”, “sifar”, “kosong”, “tiada apa-apa”, “bahagi”, dan ayat matematik“lapan bahagi empat”, “dua belas bahagi tiga”, dan “lima bahagi dua”. Dalam aktiviti ini, diandaikan corak pemikiran tentang nombor bulat, sifar, kosong, tiada apa-apa, bahagi, dan ayat matematik “lapan bahagi empat”, “dua belas bahagi tiga”, dan “lima bahagi dua” yang dimiliki oleh guru dapat dikenal pasti apabila mereka menggambarkannya tanpa kehadiran sebarang objek atau bahan di persekitaran mereka.

Temu Duga Klinikal Kedua. Temu duga kedua memberi fokus pada perwakilan pembahagian nombor bulat. Ia membabitkan dua bentuk iaitu mewakilkan ayat matematik bahagi, dan gambar rajah selanjar dan diskret. Perwakilan ayat matematik bahagi melibatkan ayat matematik "6 ÷ 2", "7 ÷ 3", "5 ÷ 5", "0 ÷ 2", "4 ÷ 0", "0 ÷ 0". Perwakilan gambar rajah diskret membabitkan gambar lapan ekor arnab yang dibulatkan secara dua-dua, 12 buah bekas disusun tiga-tiga dalam lajur dengan lajur pertama dan ketiga berlorek dan lajur 2 dan 4 tidak berlorek, dan gambar sembilan bulatan disusun empat-empat dalam lajur dan lajur ketiga hanya ada satu bulatan; manakala gambar rajah selanjar membabitkan 15 jalur diasingkan tiga-tiga dengan garis putus-putus, garis nombor yang dilabelkan angka 0 hingga 20 dan anak panah melengkung dilukis dari 20 ke 15, 15 ke 10, 10 ke 5, dan 5 ke 0, dan garis nombor yang dilabelkan angka 0 hingga 8 dan anak panah melengkung dilukis dari 8 ke 5, kemudian 5 ke 2. Dalam aktiviti ini diharapkan cara-cara perwakilan tentang pembahagian nombor bulat dapat dikenal pasti.

Temu Duga Klinikal Ketiga. Temu duga ketiga memberi fokus pada makna pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam. Ia melibatkan empat bahagian, iaitu makna bahagi, makna nombor bahagi, makna hasil bahagi, dan makna nombor yang dibahagi. Pentafsiran makna tersebut melibatkan empat situasi, iaitu

(1) Situasi nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 keluar; dan nombor 10 masuk ke dalam silinder dan nombor 5 keluar, ia diadakan untuk mentafsir fungsi silinder yang diterjemahkan sebagai makna bahagi;

(2) Situasi yang sama seperti (1), iaitu situasi nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib dan nombor dua keluar; dan nombor 10 masuk ke dalam silinder dan nombor 5 keluar, ia diadakan untuk mentafsir fungsi silinder yang diterjemahkan sebagai makna nombor bahagi;

(3) Situasi nombor 6 dan 13 masuk ke dalam silinder berfungsi "÷ 3", ia diadakan untuk mentafsir makna hasil bahagi; dan

(4) Situasi nombor 8 keluar dari silinder berfungsi "÷ 3", ia diadakan untuk mentafsir makna nombor yang bahagi.

Temu Duga Klinikal Keempat. Temu duga keempat bertujuan mengenal pasti cara penaakulan guru dalam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat yang melibatkan tiga soalan:

(1) Ali dan Ah Seng menyertai acara maraton. Setiap kali Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Jika Ali berlari sejauh 12 km, berapa jauhkah Ah Seng berlari?;

(2) 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula. Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama?; dan

(3) Pak Kassim ada 27 biji durian. Setelah dia mengagihkan durian itu kepada beberapa orang jirannya dengan bilangan yang sama, dia masih tinggal 3 biji durian. Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?.

Temu Duga Klinikal Kelima. Temu duga klinikal kelima bertujuan mengenal pasti cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat bagi guru matematik Tahun Enam yang melibat empat soalan:

(1) 20 orang murid beratur dalam 4 baris dengan bilangan yang sama. Berapa orangkah murid dalam setiap baris?;

(2) Sekumpulan pengakap berkongsi seutas tali yang panjangnya 23 m, dengan setiap orang memperoleh 5 m. Berapa orangkah pengakap memperoleh tali panjang 5 m? Berapa panjang tali yang tinggal?;

(3) Bapa memberi sejumlah wang kepada Siti dan 5 orang adiknya, dengan setiap orang memperolehi RM7. Berapakah jumlah wang yang diperolehi oleh Siti dan 5 orang adiknya?; dan

(4) Selepas pekedai mengagihkan 17 batang lollipop ke dalam 3 buah beg plastik secara sama rata, bakinya 2 batang. Berapa batangkah lollipop dalam setiap beg plastik?.

Instrumen Kajian

Kajian ini menggunakan satu set protokol temu duga kinikal sebagai instrumen untuk mengumpul data. Item protokol temu duga adalah ubahsuai daripada instrumen Nik Azis (1987), Thompson dan Saldanha (2003), Suhaidah Tahir (2006), Hackenberg (2007), Faridah (2009), dan Fan (2011).

Teknik temu duga klinikal telah dimajukan oleh Piaget (1929) dan digunakan dengan meluasnya dalam pengumpulan data untuk mengenal pasti pengetahuan yang dipunyai oleh seseorang tentang sesuatu konsep atau menilai sesuatu. Istilah klinikal bermaksud pemerhatian secara langsung terhadap tingkah laku responden dalam konteks interaksi satu dengan satu (bersemuka), manakala istilah pemerhatian secara langsung pula merujuk pemerhatian pengkaji yang bertumpu secara langsung kepada tingkah laku responden semasa mereka menyelesaikan masalah tertentu.

Jika pengkaji mengandaikan bahawa pemahaman seseorang tentang sesuatu konsep adalah pelbagai sifatnya, maka temu duga klinikal dapat menyediakan kaedah untuk meninjau dan menyelidik pemahaman yang berbeza di antara seseorang dengan orang yang lain (Von Glasersfeld, 2005; Steffe & Olive, 2010; Nik Azis, 2014a).

Temu duga klinikal ini diadakan untuk mendapatkan maklumat yang lebih mendalam mengenai pemahaman responden tentang pembahagian nombor bulat. Dalam kajian ini, proses pemikiran dan pemahaman responden menjadi fokus utama. Kaedah ini dianggap sebagai kaedah yang paling sesuai untuk meneliti pengetahuan matematik yang dimiliki oleh responden kerana ia membolehkan pengkaji untuk membentuk dan menguji hipotesis semasa menjalankan temu duga (Von Glasersfeld, 2005; Steffe, 2010; Nik Azis, 2014a).

Kaedah temu duga klinikal mengandungi tiga prosedur asas, iaitu pemerhatian tulen, penyoalan kritis, dan penilaian klinikal (Steffe & Olive, 2010; Nik Azis, 2014a). Pemerhatian tulen merujuk pemerhatian pengkaji secara terus terhadap tingkah laku responden semasa menyelesaikan masalah, bukan pemerhatian tidak langsung. Penyoalan kritis pula merujuk soalan yang fleksibel, mencungkil, meneroka dan intensif yang dikemukakan kepada responden semasa temu duga untuk membolehkan pengkaji merumuskan dan menguji andaian tentang pengetahuan matematik yang dimiliki oleh responden. Seterusnya, penilaian klinikal merujuk penilaian yang dibuat oleh pengkaji untuk menyemak respons yang diberikan oleh responden, mendapatkan penjelasan lanjut tentang pernyataan yang kurang jelas dan mentafsirkan respons yang mereka diberikan.

Kaedah temu duga klinikal yang dimajukan oleh konstruktivime radikal adalah berlandaskan dua andaian. Andaian pertama, apabila berhadapan dengan situasi matematik yang bermasalah, responden dianggap dapat menghasilkan cara penyelesaian yang tersendiri. Andaian kedua pula ialah sebarang pengetahuan yang membabitkan pelaksanaan tindakan dan operasi tidak boleh ditanamkan atau diterapkan secara sudah siap dalam diri responden, tetapi perlu dibina secara aktif oleh mereka. Seterusnya, dalam mentafsirkan tingkah laku lisan dan bukan lisan yang diperhatikan, pengkaji menggunakan konsep seperti asimilasi, akomodasi dan pengabstrakkan refleksi.

Bagi memudahkan pemerhatian dan penganalisisan data, setiap sesi temu duga klinikal akan dirakamkan dengan perakam video. Prosedur penyoalan adalah bergantung kepada jawapan yang diberikan oleh responden dalam set protokol yang dijawab oleh responden. Soalan yang disoal kepada responden telah dirancang terlebih dahulu oleh pengkaji dan disediakan dalam bentuk temu duga berstruktur iaitu protokol temu duga (lihat Lampiran 1). Prosedur penilaian pula dapat dijalankan dengan menggunakan rakaman video untuk membolehkan pengkaji membuat pemerhatian dan menyemak kembali respon daripada responden dan mentafsirkan jawapan.

Temu duga klinikal dibahagikan kepada lima pelan iaitu pelan temu duga pertama yang berkaitan dengan gambaran mental guru matematik tentang nombor bulat, sifar, pembahagian, dan pembahagian nombor bulat. Pelan temu duga kedua berkaitan dengan cara guru mewakil pembahagian nombor bulat, manakala pelan temu duga ketiga berkaitan dengan makna tentang pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru. Seterusnya, protokol temu duga klinikal keempat berkaitan dengan jenis penaakulan yang digunakan dalam penyelesaian masalah yang melibatkan pembahagian nombor bulat. Akhirnya, pelan temu duga kelima berkaitan dengan cara guru menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat, iaitu pembahagian nombor bulat dengan nombor bulat yang hasil bahaginya ada baki dan tanpa baki. Setiap sesi temu duga klinikal mengambil masa lebih kurang satu jam.

Bagi memastikan kesahan dalaman terkawal (kandungan matematik), beberapa orang pakar matematik yang terdiri daripada pegawai Sektor Sains dan Matematik di Bahagian Pembangunan Kurikulum, pensyarah matematik dari Institut Pendidikan Guru dirujuk agar mendapatkan nasihat dan pandangan untuk memastikan keselarian instrumen dengan kandungan matematik dan persoalan kajian.

Selain itu, bagi memastikan kebolehpercayaan instrumen protokol temu duga klinikal, kaedah konsistensi dalaman digunakan. Di mana protokol temu duga itu dirujukkan kepada dua belas orang guru cemerlang matematik sekolah rendah yang mempunyai pengalaman mengajar Matematik lebih daripada 10 tahun di sekolah rendah dan lebih daripada 5 tahun mengajar Matematik Tahun Enam. Mereka diminta memberi pandangan tentang tahap kesesuaian tugasan dalam protokol temu duga klinikal yang berasaskan Kurikulum Standard Sekolah Rendah (KSSR).

Kajian Rintis

Kajian rintis merupakan jenis penyelidikan berskala kecil sebelum kajian sebenar dilakukan. Tujuan kajian rintis ini adalah untuk mengetahui sejauh mana kesesuaian keseluruhan penggunaan instrumen kepada responden kajian. Kajian rintis juga berfungsi untuk mengetahui sejauh mana responden memahami setiap pernyataan yang digunakan.

Sebelum kajian rintis dijalankan, beberapa siri bengkel bersama penyelia telah diadakan dari bulan September hingga bulan November 2013. Objektif bengkel ini diadakan adalah untuk membina dan memantapkan instrumen berbentuk item protokol temu duga klinikal. Dua orang guru matematik Tahun Enam dari sebuah sekolah rendah di daerah Hulu Langat dipilih sebagai responden kajian rintis.

Tujuan kajian rintis ini dijalankan adalah untuk melihat kesesuaian soalan-soalan yang disediakan daripada segi cara menyoal, kandungan dan bahasa yang digunakan. Ia juga bertujuan untuk mendapat maklumat tentang respons bertulis yang diberikan oleh guru matematik Tahun Enam agar dapat membantu pengkaji memperbaiki mutu soalan dalam tugasan protokol. Ia juga bertujuan untuk membuat anggaran peruntukkan masa bagi kajian yang sebenarnya. Selain itu, kajian rintis ini bertujuan untuk membiasakan diri pengkaji dengan teknik temu duga, di mana, selepas menjawab soalan dalam tugasan protokol, kedua-dua orang daripada guru matematik tersebut dipilih untuk menyertai sesi temu duga klinikal.

Aspek kesahan kandungan instrumen temu duga telah disemak oleh beberapa orang pakar. Mereka terdiri daripada dua orang pensyarah pendidikan dari Falkuti Pendidikan, Universiti Malaya; dan 10 orang guru cemerlang matematik yang berpengalaman mengajar mata pendidikan Matematik sekolah rendah lebih daripada 10 tahun. Mereka diminta untuk menyemak item dalam protokol temu duga itu jika terdapat sebarang ketidaksesuaian kandungan, dan kekaburan atau kesilapan bahasa yang digunakan. Pembetulan dan pengubahsuaian item dalam set protokol temu duga klinikal telah dibuat, agar item-item itu lebih jelas dan senang difahami responden supaya pengkaji mendapat data yang dikehendaki. Jadual 3,1 di bawah menunjukkan beberapa item telah dipinda selepas uji rintis.

Jadual 3.1

Pindaaan item protokol temu duga klinikal

No.	Item Protokol Asal	Pindaan	Sebab Pinda
1.	1. Sediakan garis nombor, objek (pembaris, pemadam, gula-gula), abakus dan kertas A4, Tanya soalan seperti di bawah: • Bagaimanakah anda menggambarkan nombor lapan dengan salah satu bahan di atas? • Mengapakah anda pilih bahan tersebut? • Mengapakah anda menggambarkan nombor lapan begitu?	Item 1, 2, 3, 4,dan 5 telah dikeluarkan dari protokol Pelan Temu Duga Pertama melibatkan gambaran mental.	**1.** Peserta hanya perlu menyatakan atau menunjukkan gambaran mentalnya tentang nombor lapan, tidak dapat menunjukkannya dengan bahan yang diberi. Ini kerana apa yang

	2. Adakah gambaran itu masih sama seperti tadi? 3. Mengapa sama? *Jika gambaran mental itu tidak sama, tanya soalan di bawah: • Mengapakah gambaran mental itu tidak sama? • Apakah yang menyebabkan anda mengubah gambaran mental itu? 4. Adakah gambaran mental itu sentiasa sama bagi nombor yang sama? 5. Mengapakah sentiasa sama? *Jika tidak sama, tanya soalan "Mengapakah sentiasa tidak sama?"		digambarkan mungkin bukan bahan yang disediakan. 2. Kajian tidak mengkaji gambaran mental peserta sentiasa sama atau tidak.
2.	Gambaran mental tentang "pembahagian"	Tukar ke gambaran mental tentang "bahagi".	"Bahagi" lebih umum.
3.	Gambaran mental tentang "pembahagian nombor bulat"	Telah dikeluarkan.	"Pembahagian nombor bulat" sangat luas dan abstrak.
4.	Gambaran mental tentang "enam bahagi dua", " sembilan bahagi tiga", dan "lima bahagi lima".	Telah ditukar kepada gambaran mental tentang "lapan bahagi dua", " dua belas bahagi tiga", dan "lima bahagi dua". "	1."enam bahagi dua" telah ada di tugasan untuk makna. 2." sembilan bahagi tiga" melibatkan dua 3, mungkin mengelirukan semasa analisis. 3."lima bahagi lima" telah ada di tugasan perwakilan.
5.	Soalan "Apakah perwakilan?" dan "Apakah perwakilan pembahagian nombor bulat?"	Telah dikeluarkan.	Soalan terlalu umum dan tidak berfokus.
6.	Tugasan makna tentang pembahagian nombor bulat, ada tiga nombor masuk ke dalam kotak	Tukar kepada dua nombor sahaja dan kotak ditukar kepada silinder.	1.Dua nombor sudah cukup untuk mentaksir makna yang dimiliki oleh guru tentang pembahagian nombor bulat. 2. Silinder lebih sesuai menunjukkan nombor masuk dan keluar.

7	Tugasan Penaakulan tiada soalan tanya cara penyelesaian dipermudahkan dalam rumus.	Tambah soalan: 1. Dengan itu, bolehkah cara ini dipermudahkan? 2. Cuba terangkan. 3. Bagaimanakah anda dapat buktikan atau justifikasikan rumus ini adalah betul?	Mempermudahkan cara penyelesaian masalah merupakan penaakaulan induktif.

Kebolehyakinan

Kajian ini memastikan kebolehyakinan (trustworthiness) dapatan kajian dengan menggunakan beberapa strategi, iaitu kredibiliti, kebolehpindahan, kebolehharapan, dan kebolehpastian (Creswell, 2008, 2012; Saldaña, 2011; Nik Azis, 2014a).

Kredibiliti. Kredibiliti (*credibility*) membabitkan idea yang sepadan dengan kesahan dalaman dan merujuk ketepatan usaha mengenal pasti dan menjelaskan respons yang diberikan oleh responden kajian (Creswell, 2008a, 2012; Saldaña, 2011; Nik Azis, 2014a). Fokus kredibiliti adalah kepada verifikasi hasil kajian, bukan kesahan dalaman hasil tersebut. Pengkaji menggunakan penyegitigaan data (*triangulation*) untuk memastikan kredibiliti atau kesahan dalaman dapatan kajian, yang mana pengkaji menggunakan pelbagai sumber, kaedah dan bukti yang berbeza untuk membentuk tema atau kategori dan menyokong hasil kajian. Penyegitigaan data yang melibatkan rakaman video setiap sesi temu duga klinikal, catatan bertulis responden dan catatan pengkaji terhadap tingkah laku responden semasa sesi temu duga klinikal. Pengkaji juga menggabungkan dokumen yang relevan dengan kajian, seperti catatan responden dan pengkaji. Selain itu, pengkaji juga membekalkan latar belakang responden, iaitu responden terdiri daripada guru lelaki dan perempuan, guru berbangsa Cina dan Melayu, guru dari bandar dan luar bandar, dan pengalaman mengajar Matematik yang berbeza.

Seterusnya, semakan responden digunakan untuk memastikan kredibiliti atau kesahan dalam dapatan kajian. Strategi ini dianggap paling penting untuk menolak kemungkinan salah tafsir maksud apa yang responden cakap dan laku, dan juga perspektif mereka tentang apa yang sedang berlaku. Strategi ini merupakan cara yang penting untuk mengenal pasti ketidakadilan atau kesan berat sebelah pengkaji (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a). Proses ini melibatkan semak dengan responden tentang apa yang mereka "cakap" adalah sepadan dengan "kehendak' di hujung setiap sesi pengumpulan data dan mengambil balik analisis awal kepada responden untuk bertanya samada penterjemahan pengkaji adalah memadai kehendaknya (ring true). Pengkaji menggunakan transkip temu duga untuk memastikannya.

Pengkaji juga membiasakan diri dengan budaya responden kajian sebelum mengumpul data kajian kali pertama dilakukan dengan mengadakan kajian rintis. Selain itu, pengkaji juga membuat andaian bahawa responden aktif dan jujur menjawab segala tugasan yang diberikan agar mendapat maklumat yang dikehendaki dalam kajian.

Salah satu cara yang digunakan oleh pengkaji ialah memilih responden secara pensampelan untuk mengelakkan seseorang pengkaji berlaku ketidakadilan dalam pemilihan sampel (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a). Seterusnya, pengkaji telah meminta rakan sekerja yang biasa dengan fenomena kajian untuk menyemak data dan proses penyelidikan melalui rakaman video. Disamping itu, pengkaji sentiasa berjumpa dengan penyelia untuk berbincang tentang cara yang digunakan, menguji pentafsiran pengkaji dan mengenal pasti ketidakadilan pengkaji.

Pengkaji menggunakan borang persetujuan memberitahu responden bahawa kajian ini adalah rahsiah dan namanya tidak akan disiarkan. Responden juga diberitahu mereka ada hak untuk menarik diri daripada kajian ini. Dengan cara tersebut, dijangka dapat memberi responden sedikit idea tentang apa yang diharapkan dalam temu duga ini dan meningkatkan kemungkinan tentang kejujuran responden, seterusnya meningkatkan juga kredibiliti dapatan kajian.

Kebolehpindahan. Kebolehpindahan (*transferability*) membabitkan idea yang sepadan dengan kesahan luaran dan merujuk kebolehgunaan hasil kajian dalam konteks yang lain (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a). Dalam konteks ini, pengkaji membekalkan penjelasan yang kaya dan terperinci dalam setiap Bab bagi tesis untuk membantu pembaca menentukan sama ada hasil kajian boleh diaplikasikan kepada konteks lain. Antara maklumat yang relevan adalah seperti berikut: (a) ciri institusi atau organisasi yang terlibat dalam kajian, contohnya sekolah rendah; (b) lokasi geografi, seting dan persekitaran bagi kajian yang dijalankan, contohnya, kajian ini melibatkan guru lelaki dan perempuan berbangsa Cina dan Melayu yang mengajar Matematik Tahun Enam dari sekolah bandar dan luar bandar di negeri Melaka dan Selangor; (c) data demografi bagi populasi yang terlibat, contohnya, lokasi sekolah mengajar, jenis sekolah, bangsa, jantina, pengalaman mengajar Matematik Tahun Enam, dan kelayakan akademik; (d) sebarang batasan terhadap individu yang menyumbangkan data, contohnya, guru Matematik Tahun Enam; (e) bilangan dan ciri peserta kajian, contohnya, kajian ini melibatkan enam orang responden, dan cirinya: guru Matematik Tahun Enam dari sekolah kebangsaan dan sekolah jenis kebangsaan, luar bandar dan bandar, lelaki dan perempuan, dan pengalaman mengajar yang berbeza, umur yang berbeza.

Seterusnya, (f) kaedah pensampelan yang digunakan, contohnya, kajian ini menggunakan pensampelan bertujuan; (g) kaedah pengumpulan data, contohnya, kajian ini menggunakan kaedah temu duga klinikal; (h) bilangan dan panjang sesi pengumpulan data, contohnya, kajian ini mengadakan lima sesi temu duga klinikal dan setiap kali mengambil masa lebih kurang satu jam; (i) tempoh masa bagi menyiapkan pengumpulan data, contohnya, kajian ini mengambil masa lebih kurang tiga bulan untuk menyiapkan pengumpulan data (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a).). Penyemakan terhadap data dan proses kajian oleh rakan yang biasa dengan kajian atau fenomena kajian telah diadakan untuk meningkatkan kualiti kebolehpindahan.

Kebolehharapan. Kebolehharapan (*dependability*) bertumpu kepada isu kekonsistenan atau kestabilan dan merujuk setakat mana semua fasa dalam proses kajian adalah logikal, jelas, sesuai, koheren, boleh dikesan, didokumentasikan dengan lengkap dan boleh diakses oleh pengkaji lain (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a). Ukuran yang boleh meningkatkan darjah kebolehharapan dalam penyelidikan kualitatif, iaitu penggunaan audit inkuiri (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a). Dalam konteks ini, pengkaji telah meminta dua orang pensyarah dari Institut Pendidikan Guru dan dua orang pegawai dari Bahagian Pembanguan Kurikulum yang selalu membuat penyelidikan sebagai juruaudit untuk meneliti proses dalam mana pelbagai peringkat kajian, termasuk teknik analisis dijalankan, agar proses tersebut digunakan secara konsisten dalam kajian yang dijalankan. Instrumen kajian telah diuji rintis dan mendapat komen dan pandangan daripada 10 orang guru cemerlang Matematik sekolah rendah.

Kebolehpastian. Kebolehpastian (*confirmability*) merujuk sejauh mana ciri data yang dinyatakan oleh pengkaji boleh disahkan, disokong atau dipersetujui oleh orang lain yang membaca atau menyemak hasil kajian (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a). Laporan kajian perlu membekalkan penjelasan mencukupi yang membolehkan pembaca untuk memahami asas bagi tafsiran yang dibuat oleh pengkaji, dan interpretasi mencukupi yang membolehkan pembaca untuk memahami penjelasan yang diberikan oleh pengkaji (Maxwell, 2005, 2013; Creswell, 2008a, 2012; Merriam, 2009; Nik Azis, 2009, 2014a; Patton, 2014). Dalam konteks ini, pengkaji telah melakukan beberapa perkara seperti berikut: (a) mendokumentasikan prosedur bagi menyemak semula data di sepanjang kajian, iaitu setiap sesi temu duga klinikal dirakamkan dengan perakam video dan semua catatan responden dan pengkaji semasa temu duga disimpan untuk rujukan; (b) menjelaskan metodologi kajian secara terperinci untuk membolehkan penelitian dibuat terhadap integriti hasil kajian, yang mana pengkaji memberi penjelasan secara ringkas tentang setiap tema dalam Bab masing-masing dan tema-tema bagi Bab seterusnya pada rumusan setiap Bab; (c) meminta dua orang pensyarah dari Institut Pendidikan Guru mengaudit proses dan hasil kajian untuk memastikan kekonsistenan proses kajian.

Kaedah Analisis Data

Data bagi kajian ini, penganalisisan data menggunakan teknik analisis protokol bertulis yang berasaskan temu duga klinikal yang dipelopori oleh Piaget (1929) untuk meneliti struktur pengetahuan dan proses penaakulan. Data kajian ini diperoleh daripada hasil rakaman video serta catatan yang dibuat oleh responden dan pengkaji semasa menemu duga dengan responden. Analisis data temu duga dilakukan dalam empat tahap.

Tahap pertama iaitu tahap pengumpulan data kualitatif melalui temu duga klinikal. Data-data temu duga klinikal dikumpulkan dalam bentuk lakaran dalam kertas, catatan dan rakaman video.

Tahap kedua iaitu tahap di mana pengkaji mentranskripsikan semua rakaman video temu duga ke dalam bentuk bertulis. Transkripsi ini ialah hasil dari jawapan secara lisan semasa sesi temu duga klinikal, catatan bertulis responden dan pengkaji semasa sesi temu duga. Kesahan transkrip temu duga klinikal dibuat dengan merujuk kepada dua orang pegawai di Bahagian Pembangunan Kurikulum dan dua orang pensyarah Institut Pendidikan Guru, serta responden sendiri, yang mana mereka diminta menyemak transkrip yang telah siap berbanding dengan rakaman video temu duga klinikal yang telah dibuat untuk memastikan transkrip yang dihasilkan adalah tepat dan jelas diterjemahkan mengikut maksud responden dan pengkaji.

Tahap ketiga iaitu tahap di mana kajian kes ke atas data mentah dalam bentuk transkripsi itu disusun dan diatur serta diolah mengikut tema seperti Jadual 3.5 dan menggunakan kaedah Tipologi untuk menganalisis data. Kaedah ini merupakan satu kaedah pengelasan data dalam kategori mengikut corak dan tema tertentu. Dengan kaedah ini, pengkaji dapat menghuraikan data kualitatif secara sistematik dan jelas. Semasa analisis kajian kes ke atas data mentah, tingkah laku responden yang dikenal pasti ditafsirkan secara individu dan dirumuskan corak pemikiran mereka seorang demi seorang. Sebagai contoh, Lofland & Lofland (1995) mengkategorikan data kualitatif mengikut aksi, aktiviti, makna, penyertaan, perhubungan dan keadaan tertentu. Chua (2006) menghuraikan data temu duga mengenai konsep kreativiti kepada lima kategori, iaitu potensi, ciri-ciri individu, hasil akhir, proses dan keadaan persekitaran.

Tahap keempat iaitu tahap di mana kajian kes merentasi setiap responden dilakukan merujuk bagi setiap tema yang telah ditentukan dan menggunakan kaedah perbandingan tetap. Pengkaji menggunakan kaedah ini untuk membanding tema-tema itu untuk mengenal pasti perbezaan yang tetap antara petunjuk-petunjuk teks tersebut, yang akan menjadi asas kepada data kualitatif tersebut. Dengan kaedah ini, kategori teks dikenal pasti dan ditetapkan sebagai fokus utama laporan kajian. Bagi kesahan tema merentas kes, rujukan kajian lepas digunakan, dan merujuk dengan dua orang pegawai Bahagian Pembangunan Kurikulum dan dua orang pensyarah dari Institut Pendidikan Guru. Sebagai contoh, Faridah (2009) menggunakan kaedah temu duga klinikal dalam kajiannya iaitu mengkaji konsepsi murid berumur 10 tahun tentang pembahagian yang melibatkan sifar. Beliau menganalisis data kualitatif dari temu duga klinikal dengan mengikut tema iaitu, gambaran mental dan tafsiran ayat bahagi, penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, penyelesaian masalah pembahagian dan pendaraban melibatkan sifar. Semasa analisis kajian kes merentasi setiap responden, corak pemikiran setiap responden dianalisis bersama supaya corak pemikiran umum bagi keseluruhan responden dapat dirumuskan. Hasil analisis data akan dijadualkan agar senang ditafsir dan dirujuk.

Rumusan

Bab ini menjelaskan kaedah yang digunakan untuk mengumpul dan menganalisis data bagi menjawab soalan kajian. Kajian ini bertujuan mengenal pasti pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Dengan menerusi sesi temu duga, data diperoleh berkaitan dengan pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat.

Bab ini juga telah membincangkan pemilihan sampel kajian, reka bentuk kajian, instrumentasi yang dibina, prosedur pengumpulan data dan prosedur analisis data, dan kajian rintis. Bab berikut akan membincangkan dengan lebih terperinci dapatan daripada sesi temu duga klinikal yang telah dikumpulkan.

BAB 4: HASIL KAJIAN

Pengenalan

Dalam bab ini, analisis merentas kes bagi enam orang responden, iaitu Tong, Kong, Chong, John, Shidah dan Lim dihuraikan secara umum. Ia merupakan asas untuk mengenal pasti pemahaman responden tentang pembahagian nombor bulat. Analisis ini terbahagi kepada lima bahagian yang utama, iaitu gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan, dan penyelesaian masalah melibatkan pembahagian nombor bulat.

Gambaran Mental

Gambaran mental merupakan imej tentang sesuatu yang terhasil secara serta merta apabila murid menggunakan pemahaman yang khusus pada waktu tertentu untuk mewakilkan perkataan atau simbol yang diberi. Di bawah adalah gambaran mental yang diberikan oleh enam orang responden.

Gambaran Mental Tentang Pembahagian Nombor Bulat. Gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat melibatkan “nombor bulat”, “nombor lapan”, “nombor dua belas”, “sifar”, “kosong”, “tiada apa-apa”, “bahagi”, “lapan bahagi empat”, “dua belas bahagi tiga”, dan “lima bahagi dua”. Hasil kajian tentang gambar mental tersebut dikelaskan kepada lima kategori, iaitu simbolik, konseptual, prosedural, praktikal, dan figuratif, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.1. Kategori simbolik melibatkan 4 perkara, iaitu angka, perkataan, simbol dan ayat matematik, manakala kategori konseptual melibatkan 16 perkara, iaitu kuantiti, sejenis nombor, nombor bermula dari 0, ciri nombor, tertib nombor, nombor genap, pembundaran, faktor bagi nombor, gandaan, sistem penomboran, alat membilang, tiada apa-apa, titik permulaan, nilai wang, nilai tempat, dan kosong. Selain itu, kategori prosedural melibatkan tujuh perkara, iaitu cara belajar matematik, pembahagian dengan kaedah pengukuran tanpa mengambil kira baki, pembahagian dengan kaedah pengukuran mengambil kira baki, pembahagian dengan kaedah pemetakan tanpa mengambil kira baki, pembahagian dengan kaedah pemetakan mengambil kira baki, cerakin nombor dan operasi tolak berulang. Seterusnya, kategori figuratif hanya melibatkan satu perkara, iaitu bentuk. Akhirnya, kategori praktikal melibatkan tiga perkara, iaitu peristiwa, kepercayaan dan perkara khusus.

Jadual 4.1
Gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat.

Kategori	**Perkara**	**Huraian**	**Responden**
Simbolik	(a) Angka	• Nombor boleh diwakili dengan angka, contohnya, nombor lapan diwakili dengan 8, dan dua belas diwakili dengan 12. • Kosong diwakili dengan angka “0” • Tiada apa-apa diwakili dengan angka “0”. • Pembahagian boleh ditulis dalam bentuk pecahan, seperti “lapan bahagi empat” boleh diwakili dengan 8/4, $\frac{8}{4}$, atau $4\overline{)8}$.	Kong,Tong, Chong, Lim, John, Shidah
	(b) Perkataan	• Nombor boleh tulis dalam perkataan, contohnya, “lapan”, “dua belas”, “八” (perkataan lapan dalam tulisan Cina), dan “十二” (perkataan dua belas dalam tulisan Cina). • Kosong diwakili dengan perkataan “kosong”. • Ayat matematik “lapan bahagi empat” boleh ditulis dalam perkataan “lapan bahagi empat”, dan “八除四”, iaitu perkataan lapan bahagi empat dalam tulisan bahasa Cina.	
	(c) Simbol	• Sifar diwakili dengan “.” oleh orang Arab Timur dan Parsi pada zaman dahulu. • Bahagi boleh diwakili dengan simbol “÷”, “/”, “$\underline{)\quad}$”, atau “$\overline{)\quad}$”.	
	(d) Ayat matematik	• Ayat matematik ditulis dengan nombor dan simbol, seperti “lapan bahagi empat” boleh ditulis sebagai “8 ÷ 4 = 2”.	

Konseptual	(a) Sejenis nombor	• Dalam pengelasan nombor, nombor bulat adalah di bawah integer.	Kong,Tong, Chong, Lim, John, Shidah
	(b) Kuantiti objek	• Nombor bulat digunakan untuk mewakili kuantiti objek/markah yang sama jenis.	
	(c) Alat membilang	• Nombor bulat digunakan untuk membilang objek.	
	(d) Nombor bermula dari 0	• Nombor bulat ialah nombor yang bermula dari sifar dan nombor seterusnya ialah 1, 2, 3, 4, 5… hingga ke infiniti.	
	(e) Ciri nombor	• Nombor bulat bukan perpuluhan, pecahan dan ayat matematik. • Nombor bulat adalah sebahagian daripada nombor bercampur terdiri daripada nombor bulat dan pecahan. • Nombor bulat mewakili dengan objek yang lengkap, manakala pecahan mewakili objek yang tidak lengkap contohnya setengah biji epal untuk mewakili pecahan.	
	(f) Nilai tempat	• Nombor bulat disebut bermula daripada nilai tempat yang besar dulu, contohnya "12" akan disebut 1 dahulu yang mana mewakili 1 puluh, kemudian 2 yang mewakili 2 sa. • Nombor bulat ada nilai tempat dan nilai digit.	
	(g) Sistem Penomboran	• Nombor bulat menggunakan asas 10 yang mempunyai 10 digit. • Sifar digunakan dalam sistem penomboran, seperti sistem perpuluhan dan sistem perduaan .	
	(h) Tertib Nombor	• Nombor disusun mengikut tertib menaik, seperti nombor 8 adalah di kedudukan kelapan dan nombor 12 di kedudukan kedua belas.	
	(i) Nombor genap	• Nombor yang boleh dibahagi dengan dua tanpa baki, seperti nombor lapan dan dua belas. • Semua nombor dalam gandaan dua ialah nombor genap, seperti nombor lapan dan dua belas.	
	(j) Pembundaran	• Nombor boleh dibundarkan kepada puluh terdekat, seperti nombor 8 boleh dibundarkan kepada 10.	
	(k) Faktor bagi nombor	• Jika suatu nombor boleh dibahagikan dengan nombor tertentu, maka nombor tersebut adalah faktor bagi nombor tersebut, seperti 1, 2, 3, 4, 6 dan 12 adalah faktor bagi 12, kerana nombor 12 boleh dibahagikan dengan 1, 2, 3, 4, 6 dan 12.	
	(l) Gandaan	• Gandaan bagi nombor digunakan untuk membina sifir bagi nombor tersebut, seperti sifir 8 dibina daripada gandaan 8, atau sifir 12 dan nombor 12 merupakan satu unsur dalam sifir 12.	

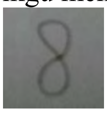
	(m) Nilai wang	• Nombor boleh mewakili nilai wang, seperti nombor 12 mewakili RM12 yang terdiri daripada sekeping RM10 dan dua keping RM1.	
	(n) Tiada apa-apa	• Sifar mewakili tiada apa-apa, seperti set kosong, tangan kosong, bekas atau ruang kosong, sifar markah, sifar bunga, dan inflasi sifar. • Kosong mewakili tiada apa-apa objek dalam sesuatu ruang atau bekas, seperti dalam kotak tiada objek, dalam botol air tiada air, poket orang miskin tiada wang, mangkuk yang belum diisi nasi, dan kosong markah	
	(o) Titik permulaan	• Sifar merupakan titik permulaan, seperti membilang bermula dari 0, melabel garis nombor bermula dari sifar, atau nombor pertama dalam tertib nombor bulat.	
	(p) Kosong	• Tiada apa-apa mewakili kosong, seperti sesuatu bekas atau ruang tidak diisi objek atau objek telah habis digunakan, contohnya CD tiada menyimpan sebarang fail, dalam mangkuk tiada sup, beg tangan tiada barang di dalamnya, dalam gelas tiada air, dalam vakum tiada udara, kertas lukisan yang kosong, dan tangan tidak memegang sebarang objek.	
Prosedural	(a) Satu cara belajar Matematik	• Nombor bulat merupakan asas untuk belajar matematik, sebelum mempelajari pecahan, perpuluhan dan sebagainya.	Tong,Lim, Kong,John, Chong, Shidah
	(b) Pembahagian dengan kaedah pengukuran tanpa menagmbil kira baki	• Nombor boleh diagihkan secara kumpulan dengan kuantiti yang sama, seperti nombor 12 diagihkan kepada empat 3, seperti memotong bar coklat kepada dua bahagian dengan saiz yang sama, dan memotong kek dengan bahagian yang sama, atau "Lapan bahagi empat" mewakili lapan objek diagihkan secara empat-empat, seperti mengasingkan murid kepada empat orang dalam satu kumpulan, mengagihkan bebola secara empat-empat dan lapan ada dua empat, atau garis nombor yang ada 12 senggatan diagihkan kepada 3 senggatan dalam satu anak panah, iaitu anak panahnya dari senggatan 12 ke 9, 9 ke 6, 6 ke 3 dan 3 ke 0, dan12 objek dibahagikan kepada 3 dalam satu kumpulan.	
	(c) Cerakin nombor	• Nombor boleh dikira secara sepuluh-sepuluh atau gandaan sepuluh, seperti 12 dikira sebagai sepuluh dan dua, dan ditulis sebagai "10 + 2".	
	(d) Pembahagian dengan kaedah pemetakan tanpa mengambil kira baki	• Mengagihkan sejumlah objek kepada sebilangan kumpulan dengan kuantiti yang sama, seperti mengagih sejumlah rambutan dengan kuantiti yang sama ke dalam beberapa buah bakul, dan melukis graf dengan menentukan kuantiti unit bagi setiap selang pada paksi-x dan paksi-y., atau "Lapan bahagi empat" mewakili lapan objek diagihkan	

		kepada empat orang dengan setiap orang mendapat dua objek, atau lima objek diagihkan kepada dua bahagian dengan setiap bahagian ada dua objek setengah.	
	(e) Operasi tolak berulang.	• Bahagi adalah tolak berulang, seperti lima bahagi dua bermaksud lima ditolak dua sebanyak dua kali, akhirnya tinggal satu.	
	(f) Pembahagian dengan kaedah pemetakan mengambil kira baki.	• 5 ada dua 2 dan tinggal 1 Lima objek diagihkan kepada dua kumpulan dengan setiap kumpulan ada dua objek dan bakinya satu objek, seperti lima biji oren diagihkan kepada dua orang dengan setiap orang mendapat dua biji dan tinggal sebiji	
	(f) Pembahagian dengan kaedah pengukuran mengambil kira baki	• Lima objek diagihkan secara dua-dua akan mendapat dua kumpulan dua dan baki satu.	
Figuratif	(a) Bentuk	• Nombor ada bentuknya tertentu, seperti bentuk lapan macam gabungan dua sifar atau dua bulatan, atau laluan jalan berbentuk 8. • Sifar berbentuk bujur bukan bulat. • Bentuk sifar macam objek bulat, seperti kanta, roda kereta, donat, telur dan lain-lain lagi.	Shidah, Lim, Kong, John, Chong
Praktikal	(a) Peristiwa	• Nombor dikaitkan dengan peristiwa, seperti nombor lapan dikaitkan dengan perayaan Pesta Tanglung yang diraikan pada bulan lapan bagi kalender Cina, dan Hari Wanita disambut pada 8 hari bulan Mac.	Tong, Chong Lim, Shidah
	(b) Kepercayaan	• Nombor dipercayai ada maksud tertentu, seperti orang Cina mempercayai bahawa nombor lapan ialah nombor bertuah dan boleh membawa kekayaan atau keuntungan yang lumayan.	
	(c) Perkara khusus	• Nombor tertentu digunakan pada perkara khas dalam kehidupan harian, seperti nombor 12 dikaitkan dengan tahun zodiak dan bulan Disember kerana satu tahun ada 12 bulan, zodiak terdiri daripada 12 jenis binatang, bulan Disember disebut bulan 12.	

Semua responden memberikan gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat melibatkan kategori simbolik yang melibatkan empat perkara, iaitu angka, perkataan, simbol dan ayat matematik. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 1.2(Kong) di bawah menunjukkan gambaran mental tentang “nombor bulat” melibatkan kategori simbolik bagi perkara angka. Beliau menggambarkan nombor lapan dengan angka 8 kerana beliau selalu menulis angka 8 semasa mengajar Matematik.

Protokol 1.2(Kong): Gambaran Mental Tentang Nombor Bulat

P: Apakah yang tergambar dalam fikiran anda apabila mendengar saya sebut “lapan” ?
R: Lapan, (berhenti seketika) angka lapan.
P: Lapan yang macam mana, boleh lukis atau tuliskan gambaran mental itu dalam kertas?
R: (Cikgu menulis angka lapan). Lapan macam ini.



P: Mengapakah gambaran cikgu begitu?
R: Saya selalu mengajar Matematik dengan menulis lapan dalam bentuk angka. Saya jarang menulis lapan dalam bentuk perkataan, perkataan hanya ditulis apabila diminta oleh soalan. Oleh itu, apabila terdengar sahaja sebutan lapan, saya mesti bayangkannya dalam bentuk angka.

Kategori konseptual pula melibatkan 16 perkara, iaitu kuantiti, sejenis nombor, nombor bermula dari 0, ciri nombor, tertib nombor, nombor genap, pembundaran, faktor bagi nombor, gandaan, sistem penomboran, alat membilang, tiada apa-apa, titik permulaan, nilai wang, nilai tempat, dan kosong. Semua responden memberikan gambaran mental melibatkan kategori konseptual. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 1.1(Lim) menunjukkan gambaran mental tentang “nombor bulat” melibatkan kategori konseptual bagi perkara kuantiti objek, iaitu nombor bulat mewakili kuantiti objek. Beliau menggambarkan nombor bulat dengan sebiji epal yang mewakili nombor 1, kerana pada pemahaman beliau, nombor bulat digunakan untuk mewakili kuantiti objek.

Protokol 1.1(Lim): Gambaran Mental Tentang Nombor Bulat

P: Ada lagi gambaran mental tentang nombor bulat?
S: Kuantiti objek. (Cikgu bercakap sambil melukis sebiji epal).

P: Mengapakah cikgu ada gambaran mental begini?

S: Apa yang saya tahu nombor bulat digunakan untuk mewakili kuantiti objek. Contohnya, nombor 1 boleh digunakan untuk mewakili sebiji epal.

Selain itu, kategori prosedural melibatkan tujuh perkara sahaja, iaitu cara belajar matematik, pembahagian dengan kaedah pengukuran tanpa mengambil kira baki, pembahagian dengan kaedah pengukuran mengambil kira baki, pembahagian dengan kedah pemetakan tanpa mengambil kira baki, pembahagian dengan kaedah pemetakan mengambil kira baki, cerakin nombor dan operasi tolak berulang. Semua responden memberikan gambaran mental melibatkan kategori prosedural. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 1.1(Chong) menunjukkan gambaran mental tentang "nombor bulat" melibatkan kategori prosedural bagi perkara satu asas belajar matematik, iaitu beliau menggambarkan nombor bulat ialah cara untuk belajar matematik, sebelum mempelajari pecahan, perpuluhan dan sebagainya.

Protokol 1.1(Chong): Gambaran Mental Tentang Nombor Bulat

P: Ada gambaran mental lain tentang "nombor bulat"?
R: Nombor asas yang perlu kita belajar.
P: Mengapakah cikgu ada gambaran mental begitu?
R: Saya cikgu Matematik, saya tahu murid belajar matematik bermula dari nombor bulat. Nombor bulat itu adalah asas bagi murid kerana ia lebih senang difahami, contohnya nombor 3 maksudnya 3 objek, manakala 1.23, murid Tahun Satu susah memahaminya. Saya juga ajar murid Tahun Satu, oleh itu, saya tahu nombor bulat adalah sangat penting untuk dipelajari oleh murid di Tahun Satu. Mereka perlu memahami konsep nombor bulat dulu, baru boleh mempelajari pecahan, perpuluhan dan sebagainya.

Kategori figuratif hanya melibatkan satu perkara, iaitu bentuk. Terdapat lima daripada enam orang responden memberikan gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat melibatkan kategori figuratif. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 1.2(Lim) menunjukkan gambaran mental tentang "nombor bulat" melibatkan kategori figuratif bagi perkara bentuk, iaitu nombor ada bentuknya tertentu, seperti bentuk lapan macam gabungan dua sifar, gabungan dua bulatan, atau laluan jalan berbentuk 8. Beliau menggambarkan nombor bulat mengikut bentuknya, contohnya nombor lapan digambarkannya dengan gabungan dua sifar, kerana ini ialah cara penulisan beliau pada masa kecil akan tergambar semula apabila terdengar sebutan “lapan”.

Protokol 1.2(Lim): Gambaran Mental Tentang Nombor Lapan

P: Apakah yang tergambar dalam fikiran cikgu apabila mendengar saya sebut “lapan”?
S: Bentuk gabungan dua sifar. (Cikgu melukis dua sifar yang digabungkan jadi bentuk “8”).

P: Mengapakah cikgu lukis begitu?
S: Pada masa kecil, saya menulis lapan dengan melukis gabungan dua sifar. Pada masa itu, tiada orang membetulkan penulisan saya. Oleh itu, saya menulis bentuk lapan begitu sehingga sekolah menengah. Saya tahu tulisan lapan itu salah, semasa saya mengajar adik saya yang belajar tadika menulis lapan, baru saya sedar penulisan lapan saya itu tidak betul, hahaha…
P: Mengapakah cikgu ada gambaran mental itu?
S: Apabila terdengar sebutan “lapan”, saya akan teringat penulisan lapan saya pada masa kecil itu, dengan itu, secara automatik akan terbayang bentuk lapan dengan gabungan dua sifar itu.

Seterusnya, kategori praktikal melibatkan tiga perkara, iaitu peristiwa, kepercayaan dan perkara khusus. Terdapat empat daripada enam orang responden memberikan gambaran mental melibat kategori ini. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 1.2(Chong) menunjukkan gambaran mental tentang “nombor bulat” melibatkan kategori praktikal bagi perkara peristiwa, iaitu nombor dikaitkan dengan peristiwa, seperti nombor lapan dikaitkan dengan perayaan Pesta Tanglung yang diraikan pada bulan lapan bagi kalender Cina, dan Hari Wanita disambut pada 8 hari bulan Mac. Beliau menggambarkan nombor bulat dengan perkara peristiwa, contohnya nombor lapan digambarkan dengan Hari Wanita kerana hari tersebut jatuh pada 8 hari bulan Mac.

Protokol 1.2 (Chong): Gambaran Mental Tentang Nombor Lapan

P: Ada lagi?
R: Hari Wanita.
P: Tolong jelaskan.

R: Hari Wanita jatuh pada 8 hari bulan Mac. Perayaan ini ada berkaitan nombor lapan.
P: Mengapakah cikgu ada gambaran mental begini?
R: Saya sebagai seorang wanita, maka saya juga mementingkan Hari Wanita. Setiap tahun saya ada menyambut Hari Wanita pada 8 hari bulan Mac. Oleh itu, apabila terdengar sebutan "lapan", saya akan teringat 8 hari bulan Mac ialah Hari Wanita.

Dalam kajian mengenai gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat, kategori simbolik, konseptual dan prosedural adalah dominan kerana semua responden memberikan gambaran mental melibatkan ketiga-tiga kategori ini, manakala kategori figuratif adalah sederhana kerana hanya ada lima daripada enam orang responden memberikan gambaran mental melibatkan kategori ini. Akhirnya, kategori praktikal adalah paling kurang kerana hanya empat orang daripada enam orang responden memberikan gambaran mental melibatkan kategori ini.

Perwakilan

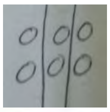
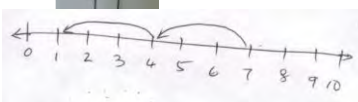
Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat melibatkan perwakilan membabitkan ayat matematik bahagi, dan gambar rajah selanjar dan diskret.

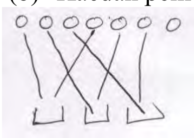
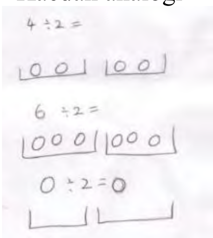
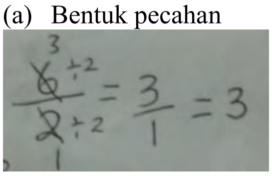
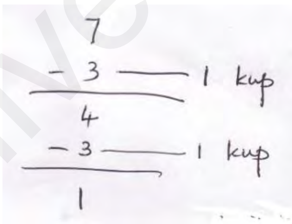
Perwakilan Tentang Ayat Matematik Bahagi. Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat melibatkan perwakilan membabitkan ayat matematik bahagi, iaitu "6 ÷ 2", "7 ÷ 3", "5 ÷ 5", "0 ÷ 2", "4 ÷ 0", dan "0 ÷ 0". Cara perwakilan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam dikelaskan kepada empat kategori: (i) kategori figuratif melibatkan penggunaan bahan konkrit dan melukis gambar rajah dalam perwakilan, (ii) kategori manipulatif melibatkan penggunaan anggota badan dalam perwakilan, (iii) kategori prosedural melibatkan penggunaan langkah demi langkah dalam perwakilan, seperti dalam kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, kaedah susun atur, dan kaedah analogi, dan (iv) kategori simbolik melibatkan angka dan perkataan dalam perwakilan, seperti perwakilan dalam bentuk pecahan, pembahagian panjang, operasi tolak berulang, dan cerita berayat yang melibatkan pembahagian dengan kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan.

Analisis cara perwakilan ayat matematik bahagi yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.2. Jadual ini menunjukkan kategori cara perwakilan ayat matematik bahagi, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang menggunakan cara perwakilan tersebut. Seterusnya, cara perwakilan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden ditunjukkan dalam Jadual 4.3. Pada keseluruhannya, cara perwakilan yang digunakan oleh responden dibahagikan kepada sembilan kaedah, iaitu kaedah pengagihan, kaedah pemetakan, kaedah susun atur, tolak berulang, pecahan, garis nombor, analogi dengan nombor bahagi yang sama, algoritma, dan manipulatif bahan konkrit.

Jadual 4.2
Perwakilan tentang ayat matematik "6 ÷ 2", "7 ÷ 3", "5 ÷ 5", "0 ÷ 2", "4 ÷ 0", dan "0 ÷ 0".

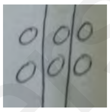
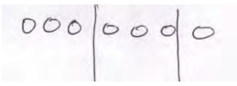
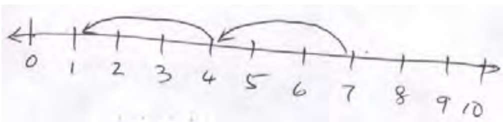
Kategori	**Perkara**	**Huraian**	**Responden**
Figuratif	(a) Bahan konkrit 	• Sejumlah bekas yang kosong mewakili bilangan kumpulan yang tidak memperoleh apa-apa objek, iaitu bekas kosong mewakili bilangan kumpulan dan bekas kosong mewakili kumpulan tersebut tidak memperoleh apa-apa objek.	Chong, Lim, Shidah Kong
	(b) Gambar rajah 	• Sejumlah bekas yang kosong mewakili bilangan kumpulan yang tidak memperoleh apa-apa objek, iaitu bekas kosong mewakili bilangan kumpulan dan bekas kosong mewakili kumpulan tersebut tidak memperoleh apa-apa objek	

Manipulatif	(a) Anggota badan 	• Berpusing-pusing tangan mewakili situasi tiada objek untuk diagihkan kepada tiada kumpulan atau bilangan kumpulan tertentu.	Lim, Kong
Prosedural	A. Bahan Konkrit		Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah
	Contoh: (a) Kaedah Pengukuran 	• Mengagihkan sejumlah objek secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan objek yang sama, kuantiti yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan ditinggalkan sebagai baki	
	(b) Kaedah Pemetakan 	• Mengagihkan sejumlah objek diagihkan kepada bilangan kumpulan tertentu secara satu demi satu mengikut giliran sehingga habis atau berbaki dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan yang sama.	
	(c) Kaedah Susun atur 	• Menyusun atur sejumlah objek dalam bentuk barisan dan lajur untuk mewakili kumpulan dan bilangan ahli dalam kumpulan	
	(d) Kaedah analogi 	• Mengagihkan tiada objek kepada bilangan kumpulan tertentu dengan menggunakan kaedah analogi, iaitu pengagihan objek daripada ada objek contohnya biji catur ke tiada objek dengan bilangan kumpulan tertentu, contohnya bilangan bekas yang sama dengan cara pengagihan yang sama.	
	B. Gambar Rajah Contoh: (a) Kaedah Pengukuran   	• Mengagihkan sejumlah objek/bahagian secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan objek/bahagian yang sama, kuantiti yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan ditinggalkan sebagai baki	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah

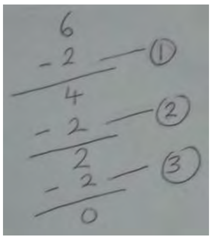
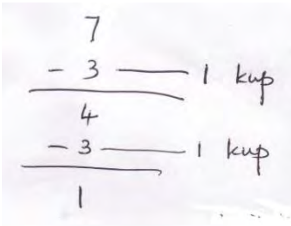
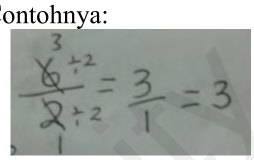
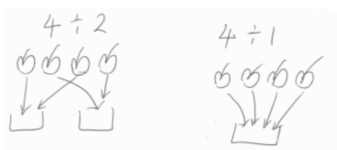
	(b) Kaedah pemetakan 	• Mengagihkan sejumlah objek kepada bilangan kumpulan tertentu dengan satu demi satu mengikut giliran sehingga habis atau berbaki dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan yang sama.	
	(c) Kaedah analogi  	• Mengagihkan tiada objek kepada bilangan kumpulan tertentu dengan menggunakan kaedah analogi, iaitu pengagihan objek daripada ada objek ke tiada objek dengan bilangan kumpulan yang sama dengan cara pengagihan yang sama.	
Simbolik	**A. Angka** Contoh:	• Mewakilkan pembahagian dalam bentuk pecahan dengan pengangka mewakili nombor yang dibahagi dan penyebut mewakili nombor bahagi.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah
	(a) Bentuk pecahan 	• Mewakilkan pembahagian dalam bentuk pembahagian panjang dengan nombor bahagi diletak di dalam simbol bahagi dan nombor bahagi diletak di luar simbol bahagi.	
	(b) Pembahagian panjang 		
	(c) Operasi Tolak berulang  	• Mewakilkan pembahagian dalam bentuk tolak berulang dengan nombor yang ditolak mewakili nombor yang dibahagi dan nombor tolak mewakili nombor bahagi.	
	B. Perkataan		
	(a) Cerita berayat Contoh: 1. Kaedah pemetakan Saya ada enam biji epal, Saya memberikannya kepada dua orang sahabat saya. Setiap sahabat saya akan mendapat tiga biji epal.	• Mewakilkan pembahagian dalam cerita yang ditulis dalam perkataan.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah

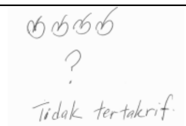
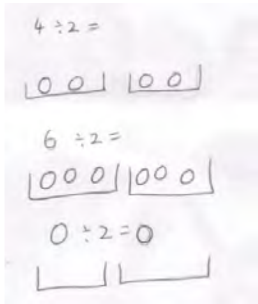
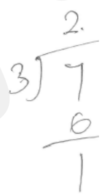
	2. Kaedah pengukuran Penjaja ada tujuh biji mangga. Dia membungkuskannya secara tiga-tiga dengan beg plastik. Dengan itu, terdapat dua beg plastik masing-masing ada tiga biji mangga dan bakinya sebiji.	

Jadual 4.3
Tiga Bahagian Dalam Perwakilan Ayat Matematik Bahagi.

Situasi yang diasimilasikan	**Aktiviti yang dijalankan**	**Hasil yang diharapkan**
Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan a diasimilasikan sebagai jumlah objek/selang dan b sebagai saiz kumpulan dan c sebagai bilangan kumpulan.	**(1) Kaedah Pengukuran** (a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan pembahagi. Mewakilkan nombor yang dibahagi dengan kuantiti objek dalam lukisan/cerita/objek konkrit/garis nombor. (b) Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan dengan merujuk pada nombor bahagi. (c) Melukis garisan/bulatan/anak panah melengkung untuk memisahkan/mengagihkan objek dalam lukisan; atau mengagihkan objek dalam lukisan atau cerita, atau objek konkrit ke dalam bekas atau kepada orang secara kumpulan dengan kuantiti yang sama sehingga habis atau meninggalkan baki yang diletak di luar kumpulan. Contohnya: i.       ii. Ali ada lima ekor arnab. Dia ingin membela arnab itu secara lima-lima dalam sangkar. Oleh itu, dia perlu sebuah sangkar.	Gambar rajah/ bahan konkrit/ cerita yang menunjukkan bilangan kumpulan objek, a, yang didapati dengan mengagihkan/ mengasingkan sejumlah objek secara kumpulan, b dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama, c. .

Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan a diasimilasikan sebagai jumlah objek dan b sebagai bilangan kumpulan dan *c* sebagai kuantiti objek dalam setiap kumpulan.	**(2) Kaedah Pemetakan** (a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. (b) Mewakilkan nombor yang dibahagi dengan kuantiti objek dalam lukisan atau cerita, atau objek konkrit. (c) Menentukan bilangan kumpulan dengan merujuk pada nombor bahagi. (d) Melukis garisan untuk mengagihkan objek dalam lukisan; atau mengagihkan objek dalam lukisan, cerita, atau objek konkrit ke dalam bilangan kumpulan yang ditetapkan dengan satu demi satu atau dua-dua secara bergilir-gilir agar setiap kumpulan mendapat bilangan objek yang sama. (e) Mengagihkan objek sehingga habis atau meninggalkan baki yang diletakkan di luar kumpulan. Contohnya: i.    ii. Saya ada enam biji epal, saya memberikannya kepada dua orang sahabat saya. Setiap sahabat saya akan mendapat tiga biji epal. iii. Emak tiada kek, dia ingin mengagihkan kek kepada dua orang anaknya, maka setiap anaknya mendapat sifar kek.	Gambar rajah/ situasi objek/ cerita yang menunjukkan kuantiti objek dalam setiap kumpulan, yang didapati dengan mengagihkan sejumlah objek, *a* kepada bilangan kumpulan tertentu, *b* dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti yang sama, *c*.
Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan a diasimilasikan sebagai jumlah kuantiti objek, *b* sebagai bilangan objek di lajur dan *c* sebagai bilangan objek di baris.	**(3) Kaedah Susun Atur** (a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan pembahagi (b) Mewakilkan nombor yang dibahagi dengan kuantiti objek dalam lukisan atau cerita, atau objek konkrit. (c) Menentukan bilangan lajur dengan merujuk pada nombor bahagi. (d) Menyusun objek ke dalam bilangan lajur yang ditetapkan sehingga habis. Contohnya: 	Gambar rajah/ situasi objek yang menunjukkan bilangan lajur dan bilangan baris, yang didapati dengan menyusun sejumlah objek, *a* dengan bilangan lajur mewakili nombor bahagi, *b*, dan hasil bahagi mewakili bilangan baris, *c*.

Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan a diasimilasikan sebagai jumlah objek, b sebagai kuantiti objek/ nombor yang dikeluarkan setiap kali, dan c sebagai bilangan kali objek/nombor yang sama kuantiti dikeluarkan.	**(4) Operasi Tolak Berulang** (a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. (b) Menolak nombor bahagi daripada nombor yang dibahagi berulang kali sehingga sifar atau tinggal baki, iaitu bilangan yang tidak cukup ditolakkan lagi dalam bentuk lazim Contohnya:  	Bentuk pengiraan yang menunjukkan bilangan kali kuantiti objek/nombor yang sama, c dikeluarkan/ditolak daripada nombor yang dibahagi/jumlah objek, yang didapati dengan menolakkan nombor yang sama, b berulang kali daripada suatu nombor, a sehingga sifar/berbaki.
Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan a diasimilasikan sebagai pengangka dan b sebagai penyebut, c sebagai hasil bahagi.	**(5) Pecahan** a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. b) Menulis ayat matematik bahagi dalam bentuk pecahan dengan nombor yang dibahagi sebagai pengangka dan nombor bahagi sebagai penyebut. c) Membahagikan pengangka dengan penyebut untuk mendapat hasil bahagi dalam bentuk nombor bulat. Contohnya: 	Pecahan yang menunjukkan pengangka mewakili nombor yang dibahagi, a dan penyebut mewakili nombor bahagi, b = hasilnya mewakili hasil bahagi, c.
Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan a diasimilasikan sebagai jumlah objek, b diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan, c diasimilasikan sebagai kuantiti objek dalam setiap kumpulan, dan cara pengagihan objek diasimilasikan sebagai cara pengagihan yang sama dengan cara pengagihan dengan nombor yang dibahagi dan nombor bahagi bukan sifar.	**(6) Kaedah Analogi** a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. b) Menggantikan nombor yang dibahagi dan nombor bahagi dengan nombor yang lebih besar dan bukan sifar. c) Menulis ayat matematik yang setara dengan ayat matematik yang diberi d) Mewakilkan nombor yang dibahagi gantian dengan jumlah objek dan nombor bahagi gantian dengan kuantiti objek/bilangan kumpulan dan ditunjukkan dengan lukisan atau cerita, atau objek konkrit. e) Melakukan pengagihan objek dengan cara yang sama bagi sifar objek atau sifar kumpulan. Contohnya: i. 	Gambar rajah yang menunjukkan kuantiti objek/bilangan kumpulan dengan cara pembahagian yang setara dengan suatu cara pengagihan dengan nombor yang dibahagi, a dan nombor bahagi bukan sifar, b untuk mendapat hasil bahagi, c.

	 ii.  	
Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan jumlah objek diasimilasikan sebagai *a*, iaitu nombor yang dibahagi, bilangan kumpulan/saiz kumpulan diasimilasikan sebagai *b*, iaitu nombor bahagi, saiz kumpulan /bilangan kumpulan diasimilasikan sebagai *c*, iaitu hasil bahagi.	**(7) Pembahagian Panjang** a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. b) Menentukan kedudukan nombor yang dibahagi dan nombor bahagi pada simbol "$\overline{)\ \ }$", iaitu nombor yang dibahagi diletak di dalam dan nombor bahagi diletak di luar. c) Menulis ayat matematik bahagi dalam bentuk pembahagian panjang, yang mana hasil bahagi ditulis di atas simbol dan baki ditulis di bawah simbol. "$\overline{)\ \ }$", Contohnya:  	Bentuk pengiraan pembahagian yang menunjukkan saiz kumpulan atau bilangan kumpulan, didapati dengan membahagikan sejumlah objek, *a* dengan bilangan kumpulan/saiz kumpulan tertentu, *b* untuk mendapat saiz kumpulan/bilangan kumpulan, *c*.
Dalam ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, dengan *a* diasimilasikan sebagai jumlah objek abstrak, *b* diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan/saiz kumpulan objek abstrak, dan *c* diasimilasi sebagai saiz kumpulan/bilangan kumpulan objek abstrak, bahan yang dimanipulasikan diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi/.	**(8) Manipulatif bahan** a) Mengenal pasti nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. b) Mewakilkan nombor yang dibahagi dengan objek abstrak/ khayalan yang ditunjukkan dengan gerakan tangan, atau manipulatif bahan konkrit, atau situasi dalam lukisan atau cerita, contohnya tiada kek atau situasi tiada objek, dan mewakilkan nombor bahagi dengan objek abstrak/khayalan atau simbol, contohnya tiada orang atau situasi tiada objek, atau simbol "X". c) Melakukan pengagihan objek abstrak atau khayalan dengan cara sama seperti ada objek sebenar, iaitu mengagih dengan satu demi satu ke dalam bilangan kumpulan yang ditetapkan. Contohnya: i. Ayat matematik "0 ÷ 0", diwakili dengan tiada kek diagihkan kepada sifar murid. Oleh itu, tiada murid menerima tiada kek.	Situasi pembahagian dengan manipulatif bahan/ gerakan tangan yang mewakili jumlah objek abstrak, *a* diagihkan ke dalam bilangan kumpulan/saiz kumpulan objek abstrak, *b* untuk menghasilkan bilangan kumpulan/ saiz kumpulan objek abstrak, *c*.

nombor bahagi/hasil bahagi	ii. Saya ada RM4. Saya ingin mengagihkan kepada adik, tetapi saya tiada adik. Oleh itu, tiada orang terimanya. iii. Ayat matematik “0 ÷ 0”, dengan berpusing-pusingkan tangan sambil berkata, “Tiada objek” dan menunjukkan dengan jari telunjuk kedua-dua tangan ke arah bekas kosong dengan sebelah tangan satu bekas sambil berkata, “masuk ke dalam bekas, oleh itu kedua-dua bekas tidak dapat apa-apa objek”, gambarnya seperti di bawah:

Perwakilan tentang ayat matematik bahagi, iaitu“6 ÷ 2”, “7 ÷ 3”, “5 ÷ 5”, “0 ÷ 2, “4 ÷ 0”, dan “0 ÷ 0”, yang dikelaskan dalam kategori figuratif dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu bahan konkrit dan gambar rajah. Terdapat empat daripada enam orang responden menggunakan perwakilan dalam kategori ini. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 2.4(Kong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori figuratif dengan kaedah pemetakan menggunakan gambar rajah, dan dijelaskan dalam satu urutan mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.4 (Kong): Perwakilan Tentang “0 ÷ 2”

P: Boleh mewakilinya dengan gambar rajah?
R: Em…(Cikgu melukis dua buah bekas kosong dalam satu baris).

P: Boleh cikgu terangkan?
R: Di hadapan bekas yang kosong itu mewakili tiada objek dan dua buah bekas Kosong mewakili “÷ 2”, iaitu objek diagihkan secara sama banyak ke dalam dua buah bekas
P: Mengapakah “0 ÷ 2” diwakili begitu?
R: “0 ÷ 2” mewakili tiada objek diagihkan kepada dua buah bekas dengan bilangan yang sama.
P: Oleh itu, apakah yang cikgu peroleh?
R: Setiap bekas mendapat sifar objek.

Perwakilan Kong tentang "0 ÷ 2" melibatkan dua buah bekas kosong. Beliau menunjukkan perwakilannya dengan melukis dua buah bekas kosong dalam satu baris. Beliau menerangkan di hadapan bekas itu kosong mewakili tiada objek dan mengagihkan benda ke dalam kedua-dua buah bekas kosong dengan sama banyak mewakili "÷ 2". Beliau menerangkan "0 ÷ 2" diwakili begitu kerana "0 ÷ 2" boleh diwakili dengan tiada benda diagihkan kepada dua buah bekas dengan bilangan yang sama. Oleh itu, setiap bekas mendapat sifar objek.

Perwakilan Kong tentang "0 ÷ 2" melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3 (2) Kaedah Pemetakan.

Selain itu, terdapat dua daripada enam orang responden menggunakan perwakilan dalam kategori manipulatif yang melibatkan penggunaan anggota badan. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 2.6(Kong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori manipulatif dengan menggunakan manipulatif bahan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.6 (Kong): Perwakilan Tentang "0 ÷ 0"

P: Bagaimanakah cikgu mewakili "0 ÷ 0"?
R: Em…(Cikgu diam sebentar, kemudian mengambil dua buah catur dan meletak secara berasingan di atas meja. Selepas itu menyimpan kedua-dua buah catur dan meletak jari telunjuk dan jari hantu di atas kertas). Tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas.

P: Apakah yang cikgu buat semasa diam seketika tadi?
R: Saya sedang fikir bagaimana mewakilkan "0 ÷ 0".
P: Boleh cikgu terangkan?
R: Ok. Mula-mula ada dua buah catur diagihkan secara satu-satu, dengan itu setiap kumpulan ada satu buah catur. Kemudian, buah catur itu disimpan, saya tunjuk

dengan jari telunjuk dan jari hantu di dua tempat berasingan di atas kertas menunjukkan tiada buah catur diagihkan ke tiada kumpulan.
P: Mengapakah cikgu mewakili “0 ÷ 0” begitu?
R: “0 ÷ 0” bermaksud tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas.
P: Dengan demikian, apakah yang cikgu peroleh?
R: Tiada apa-apa wujud.
P: Mengapakah cikgu cakap begitu?
R: Tiada objek dan tiada bekas, kita tak nampak apa-apa, maka tiada apa-apa wujud.

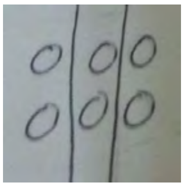
Perwakilan Kong tentang “0 ÷ 0” membabitkan manipulasi bahan konkrit, iaitu jari dan buah catur. Beliau menunjukkan cara perwakilannya dengan mengambil dua buah catur dan meletak secara berasingan di atas meja, Selepas itu menyimpan kedua-dua buah catur dan meletak jari telunjuk dan jari hantu di atas kertas sambil berkata, “Tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas”. Kong menyatakan beliau mula-mula mengagihkan dua buah catur secara satu-satu, dengan itu setiap kumpulan ada sebuah catur. Kemudian, biji catur itu disimpan, beliau menunjukkan dengan jari telunjuk dan jari hantu di dua tempat berasingan di atas kertas menunjukkan tiada biji catur diagihkan ke tiada kumpulan. Beliau menerangkan “0 ÷ 0” diwakili sebegitu kerana ia bermaksud tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas. Beliau menyatakan dengan perwakilan demikian hasilnya adalah tiada apa-apa wujud. Beliau menerangkan tiada objek dan tiada bekas, kita tak nampak apa-apa, maka itu tiada apa-apa yang wujud.

Perwakilan Kong tentang “0 ÷ 0” tersebut melibatkan manipulatif bahan konkrit dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3 (8) Manipulatif.

Seterusnya, semua responden cenderung menggunakan perwakilan dalam kategori prosedural. Kategori ini melibatkan dua bahagian, iaitu bahan konkrit yang terbahagi kepada kaedah pengukuran, dan kaedah pemetakan dan susun atur, manakala gambar rajah yang terbahagi kepada kaedah pengukuran, kaedah pemetakan dan kaedah analogi. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 2.1(Tong) menunjukkan cara perwakilan dalam kategori prosedural yang melibatkan bahan konkrit dengan menggunakan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.1 (Tong): Perwakilan Tentang "6 ÷ 2"

P: Bagaimanakah cikgu mewakili "6 ÷ 2"?
R: Saya tunjuk dengan gambar rajah. (Cikgu melukis enam bulatan dengan dua dalam satu lajur, kemudian melukis dua garis lurus secara menegak untuk mengasingkan bulatan tersebut dengan dua dalam satu kumpulan).



P: Boleh cikgu terangkan apa yang dilukis itu?
R: Enam bulatan itu mewakili enam objek dan garis lurus itu digunakan untuk mengasingkan objek tersebut kepada dua dalam satu kumpulan.
P: Mengapakah cikgu melukiskan bulatan itu dua dalam satu lajur?
R: Oh, ini untuk senang mengira ada berapa kumpulan dua.
P: Mengapakah cikgu mewakili "6 ÷ 2" begitu?
R: "6 ÷ 2" bermaksud ada enam objek diasingkan secara dua-dua. Oleh itu, saya melukis enam objek, kemudian mengasingkannya secara dua-dua dengan garis lurus untuk mencari bilangan kumpulan yang ada dua objek.

Perwakilan Kong tentang "6 ÷ 2" dengan melukis enam bulatan dengan dua dalam satu lajur, kemudian melukis dua garis lurus secara menegak untuk mengasingkan bulatan tersebut dengan dua dalam satu kumpulan. Beliau menerangkan bahawa enam bulatan itu mewakili enam objek dan garis lurus itu digunakan untuk mengasingkan objek tersebut kepada dua dalam satu kumpulan. Beliau menerangkan lagi bulatan itu dilukis dua dalam satu lajur kerana pada pendapat beliau ini dapat menyenangkan kerja mengira ada berapa kumpulan dua. Seterusnya, beliau menjelaskan "6 ÷ 2" diwakili begitu kerana pada pendapat beliau, "6 ÷ 2" bermaksud ada enam objek diasingkan secara dua-dua. Oleh itu, beliau melukis enam objek, kemudian mengasingkannya secara dua-dua dengan garis lurus untuk mencari bilangan kumpulan yang ada dua objek.

Perwakilan Tong tentang “6 ÷ 2” melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3 (1) Kaedah Pengukuran.

Seterusnya, cara perwakilan ayat matematik bahagi dalam kategori prosedural yang melibatkan gambar rajah dengan menggunakan kaedah analogi. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 2.6 (Kong) menunjukkan cara perwakilan ayat matematik bahagi dalam kategori prosedural yang melibatkan gambar rajah dengan menggunakan kaedah analogi dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.6 (Kong): Perwakilan Tentang “0 ÷ 0”

P: Ada cara lain untuk mewakili “0 ÷ 0”?
R: Ada. (Cikgu menulis “2 ÷ 2 = 1”, kemudian melukis dua bulatan dan dua buah bekas di bawahnya. Selepas itu melukis anak panah dari bulatan ke bekas dengan satu bulatan ke sebuah bekas. Seterusnya, cikgu menulis “0 ÷ 0”).

P: Cuba terangkan apa yang cikgu lukis itu.
R: Baik. Dua bulatan mewakili “2” dan anak panah dari bulatan ke buah bekas dengan satu bulatan ke satu buah bekas mewakili “÷ 2”. “2 ÷ 2 = 1” mewakili dua objek diagihkan kepada dua buah bekas dengan setiap buah bekas memperoleh satu objek. Kemudian, kedua-dua objek dan kedua-dua buah bekas disimpan, maka tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas yang mewakili “0 ÷ 0”, ini tidak ada makna.
P: Mengapakah cikgu cakap “0 ÷ 0” tidak ada makna?
R: Ini kerana ia tidak dapat menggambarkan apa-apa situasi dan membantu kita menyelesaikan apa-apa masalah.
P: Mengapakah cikgu mewakili “0 ÷ 0” begitu?
R: “0 ÷ 0” boleh mewakili tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas.
P: Dengan itu, apakah yang cikgu perolehi?
R: Tiada apa-apa.
P: Mengapakah cikgu cakap begitu?
R: Ini kerana tiada objek diagihkan kepada sifar bekas, oleh itu, tidak nampak apa-apa.

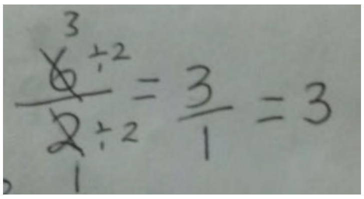
Perwakilan Kong tentang “0 ÷ 0” melibatkan analogi. Beliau menunjukkan cara perwakilannya dengan menulis “2 ÷ 2 = 1”, kemudian melukis dua bulatan dan dua buah bekas di bawahnya. Selepas itu melukis anak panah dari bulatan ke bekas dengan satu bulatan ke sebuah bekas. Seterusnya, cikgu menulis “0 ÷ 0”. Beliau menerangkan dua bulatan mewakili “2” dan anak panah dari bulatan ke buah bekas dengan satu bulatan ke satu buah bekas mewakili “÷ 2”. “2 ÷ 2 = 1” mewakili dua objek diagihkan kepada dua buah bekas dengan setiap bekas memperoleh satu objek. Kemudian, kedua-dua objek dan kedua-dua buah bekas disimpan, oleh itu tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas mewakili “0 ÷ 0”. Beliau menyatakan “0 ÷ 0” tidak ada makna kerana ia tidak dapat menggambarkan apa-apa situasi dan membantu kita menyelesaikan apa-apa masalah. Beliau menerangkan “0 ÷ 0” diwakili begitu kerana ia boleh diwakili dengan tiada objek diagihkan kepada sifar buah bekas. Menurut beliau, dengan perwakilan tersebut tiada apa-apa akan diperolehi kerana tiada objek diagihkan kepada sifar bekas, oleh itu, tidak nampak apa-apa.

Perwakilan Kong tentang “0 ÷ 0” melibatkan kaedah analogi, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan seperti ditunjukkan dalam Jadual Jadual 4.3 (6) Kaedah Analogi.

Seterusnya, semua responden cenderung menggunakan perwakilan dalam kategori simbolik. Kategori ini juga melibatkan dua bahagian, iaitu angka yang terbahagi kepada bentuk pecahan, pembahagian panjang, dan tolak berulang, serta perkataan yang melibatkan cerita. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 2.1(Tong) menunjukkan cara perwakilan dalam kategori simbolik yang melibatkan perkataan dengan menggunakan pecahan dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.1 (Tong): Perwakilan Tentang "6 ÷ 2"

P: Ada cara lain?
R: 6/2. (Cikgu menulis pecahan 6/2, kemudian menulis "÷ 2" di tepi 6 dan 2, seterusnya memotong 6 dan menulis 3 di atasnya. Selepas itu, cikgu memotong 2 dan menulis 1 di bawahnya. Akhirnya, cikgu menulis "= 3/1 = 3").



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Boleh. "6 ÷ 2" boleh diwakili dengan pecahan 6/2, ini bermaksud 6 objek dibahagikan kepada dua orang , dengan mempermudah pecahan, kita akan dapat hasil bahaginya ialah 3.
P: Bagaimanakah cikgu tahu hasil bahaginya ialah 3?
R: Pecahan 3/1 boleh ditulis sebagai nombor bulat 3 kerana 3/1 bermaksud 3 bahagi 1, maka dapat balik 3, iaitu pengangkanya.
P: Mengapakah cikgu mewakili "6 ÷ 2" dengan cara begini?
R: Saya telah tahu ayat matematik bahagi juga boleh ditulis dengan cara pecahan, dan dengan cara mempermudah pecahan sehingga penyebutnya ialah 1, maka kita akan memperoleh hasil bahaginya, iaitu hanya mengetahui pengangka pecahan apabila penyebutnya menjadi 1.

Perwakilan Tong tentang "6 ÷ 2" ditunjukkan dengan menulis pecahan 6/2. Kemudian menulis "÷ 2" di tepi 6 dan 2, seterusnya memotong 6 dan menulis 3 di atasnya. Selepas itu, beliau memotong 2 dan menulis 1 di bawahnya. Akhirnya, beliau menulis "= 3/1 = 3". Beliau menerangkan pada pendapatnya, "6 ÷ 2" boleh diwakili dengan pecahan 6/2, ini bermaksud 6 objek dibahagikan kepada dua orang, dengan mempermudah pecahan, kita akan mendapat hasil bahaginya ialah 3. Beliau menerangkan lagi, hasil bahaginya ialah 3 kerana pecahan 3/1 boleh ditulis sebagai nombor bulat 3 kerana 3/1 bermaksud 3 bahagi 1, maka mendapat balik 3, iaitu pengangkanya. Seterusnya, beliau menerangkan "6 ÷ 2" diwakili begitu kerana telah mengetahui ayat matematik bahagi juga boleh ditulis dengan cara pecahan, dan dengan cara mempermudah pecahan sehingga penyebutnya menjadi 1 akan memperoleh hasil bahaginya, iaitu hanya perlu mengetahui pangangka pecahan apabila penyebutnya ialah 1.

Perwakilan Tong tentang"6 ÷ 2" melibatkan pecahan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3 (5) Pecahan.

Selain itu, ada empat kaedah yang lain digunakan oleh responden dalam perwakilan tentang ayat matematik, iaitu kaedah susun atur, operasi tolak berulang, dan pembahagian panjang. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 2.1(Tong) menunjukkan cara perwakilan dalam kategori figuratif yang melibatkan bahan konkrit dengan menggunakan susun atur, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.1(Tong): Perwakilan Tentang "6 ÷ 2"

P: Ada cara lain untuk mewakili "6 ÷ 2"?
S: Susun atur secara 3 × 2. (Cikgu mengambil enam penutup botol dan menyusunnya dalam dua lajur dengan setiap lajur ada tiga buah penutup botol).

R: Boleh cikgu terangkan?
P: Enam buah penutup botol disusun atur secara 3 × 2, iaitu tiga lajur darab dua baris.
R: Mengapakah cikgu mewakili "6 ÷ 2" dengan cara begini?
P: 6 dalam "6 ÷ 2" ialah nombor yang dibahagi dan 2 ialah nombor bahagi, dengan itu kita boleh guna songsangan darab untuk mendapat hasil bahagi, iaitu "3 × 2 = 6".

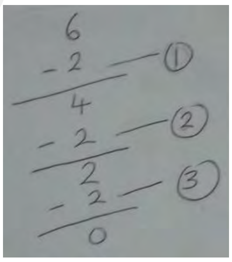
Perwakilan Tong tentang "6 ÷ 2" ditunjukkan dengan mengambil enam penutup botol dan menyusunnya dalam dua lajur dengan setiap lajur ada tiga penutup botol. Beliau menerangkan bahawa enam penutup botol disusun atur secara 3 × 2, iaitu tiga lajur darab dua baris. Beliau menerangkan "6 ÷ 2" diwakilkan cara begini kerana 6 dalam "6 ÷ 2" ialah nombor yang dibahagi dan 2 ialah nombor pembahagi, Oleh itu kita boleh guna songsangan darab untuk mendapat hasil bahagi, iaitu "3 × 2 = 6".

Perwakilan Tong tentang"6 ÷ 2" melibatkan kaedah susun atur, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3 (3) Susun Atur.

Di samping itu, tingkah laku Tong dalam Protokol 2.1(Tong) menunjukkan cara perwakilan dalam kategori simbolik yang melibatkan angka dengan menggunakan operasi tolak berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.1(Tong): Perwakilan Tentang "6 ÷ 2"

P: Ada lagi cara untuk mewakili "6 ÷ 2"?
R: Tolak berulang. (Cikgu menulis 6 ditolak berulang oleh 2 dengan bentuk lazim, iaitu mula-mula cikgu menulis 6 tolak 2 dapat 4, kemudian 4 ditolak 2 dapat 2, seterusnya 2 ditolak 2 lagi dapat 0. Cikgu juga melukis satu garis lurus mendatar di setiap nombor 2, kemudian menandakan 1 di garis pertama dan menandakan 2 di garis kedua dan akhirnya menandakan 3 di garis ketiga).



P: Cuba cikgu terangkan apa yang ditulis itu.
R: 6 ditolak 2 berulang kali hingga sifar. Tanda 1, 2, 3 itu menunjukkan 6 telah ditolak oleh 2 sebanyak 3 kali.
P: Mengapakah cikgu buat begitu?
R: Saya hendak tahu 6 ada berapa 2. Dengan mengira bilangan kali tolak 2, saya tahu 6 ada berapa 2.
P: Dengan cara ini, apa yang cikgu peroleh?
R: 6 ada tiga 2.
P: Mengapakah cikgu guna cara ini untuk mewakili "6 ÷ 2"?
R: Ini kerana bahagi adalah operasi tolak berulang. Oleh itu, "6 ÷ 2" bermaksud 6 ditolak dengan 2 berulang kali sehingga sifar, iaitu kita ingin mencari 6 ada berapa 2, iaitu dengan mengira bilangan kali 6 ditolak 2.

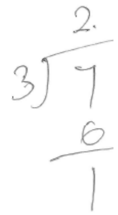
Perwakilan Tong tentang “6 ÷ 2” ditunjukkan dengan menulis 6 ditolak berulang oleh 2 dengan bentuk lazim, iaitu mula-mula beliau menulis 6 tolak 2 dapat 4, kemudian 4 ditolak 2 dapat 2, seterusnya 2 ditolak 2 lagi dapat 0. Beliau juga melukis satu garis lurus mendatar di setiap nombor 2, kemudian menandakan 1 di garis pertama dan menandakan 2 di garis kedua dan akhirnya menandakan 3 di garis ketiga. Beliau menerangkan 6 ditolak 2 berulang kali hingga sifar. Tanda 1, 2, 3 itu menunjukkan 6 telah ditolak oleh 2 sebanyak 3 kali. Beliau menerangkan lagi, beliau buat begitu kerana ingin tahu 6 ada berapa 2, dan dengan mengira bilangan kali 6 ditolak 2, beliau akan mengetahui 6 ada berapa 2. Menurut beliau, dengan cara itu, beliau akan memperoleh 6 ada tiga 2. Seterusnya, beliau menerangkan cara tersebut digunakan untuk mewakili “6 ÷ 2”, kerana pada pendapat beliau bahagi bermaksud operasi tolak berulang. Oleh itu, “6 ÷ 2” bermaksud 6 ditolak dengan 2 berulang kali sehingga sifar, dan dengan cara itu beliau ingin mencari 6 ada berapa 2, iaitu dengan mengira bilangan kali 6 ditolak oleh 2.

Perwakilan Tong tentang“6 ÷ 2” melibatkan operasi tolak berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3 (4) Operasi Tolak Berulang.

Akhirnya, cara perwakilan tentang ayat matematik bahagi menggunakan pembahagian panjang. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 2.2(Kong) menunjukkan cara perwakilan dalam kategori prosedural yang melibatkan gambar rajah dengan menggunakan pembahagian panjang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.2 (Kong): Perwakilan Tentang “7 ÷ 3”

R: Ada lagi perwakilan tentang “7 ÷ 3”?
P: Ada.(Cikgu menulis ayat matematik “7 ÷ 3” dalam bentuk pembahagian panjang dan menyelesaikannya).



P: Boleh cikgu terangkan apa yang dilukis itu?
R: "7 ÷ 3" adalah tujuh bahagi tiga, oleh itu saya menulis ayat matematik ini dalam bentuk pembahagian panjang.
P: Mengapakah cikgu mewakili "7 ÷ 3" begitu?
R: 7" mewakili nombor yang dibahagi, simbol "÷" mewakili bahagi dan "3" mewakili nombor bahagi.
P: Dengan cara ini, apakah yang cikgu peroleh?
R: 2 baki 1.
P: Apakah maksud 2 baki 1?
R: Dalam nombor 7 ada dua 3 dan satu 1.

Perwakilan Kong tentang "7 ÷ 3" ditunjukkan dengan menulis ayat matematik "7 ÷ 3" dalam bentuk pembahagian panjang. Beliau menerangkan "7" mewakili nombor yang dibahagi, simbol "÷" mewakili bahagi dan "3" mewakili nombor bahagi. Beliau menerangkan "7 ÷ 3" diwakili begitu kerana ia boleh diwakili dengan tujuh bahagi tiga. Beliau menyatakan dengan perwakilan tersebut akan memperoleh 2 baki 1. Beliau menjustifikasikan nombor 7 ada dua 3 dan satu 1 dengan menyatakan tiga tambah tiga tambah satu sama dengan tujuh. Beliau menjustifikasikan jawapannya dengan mengasingkan nombor 7 secara tiga-tiga, iaitu "7 – 3 = 4", kemudian "4 – 3 = 1". Beliau menyatakan 7 boleh ditolak dua kali 3 bermakna ia ada dua 3 dan bakinya 1 bermakna ia ada satu 1.

Perwakilan Kong tentang"7 ÷ 3" melibatkan pembahagian panjang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3 (7) Pembahagian Panjang.

Pada keseluruhannya, dalam perwakilan membabitkan ayat matematik bahagi, iaitu "6 ÷ 2", "7 ÷ 3", "5 ÷ 5", "0 ÷ 2", "4 ÷ 0", dan "0 ÷ 0". Cara perwakilan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam dikelaskan kepada empat kategori, iaitu figuratif, manipulatif, prosedural, dan simbolik. Kategori yang dominan adalah simbolik dan prosedural, iaitu kesemua guru pun cenderung menggunakan kedua-dua kategori ini. Kategori simbolik melibatkan dua bahagian iaitu angka dan perkataan, yang mana angka membabitkan bentuk pecahan, pembahagian panjang, dan tolak berulang; dan perkataan membabitkan cerita berayat. Selain itu, kategori prosedural melibatkan bahan konkrit yang membabitkan kaedah pengukuran, kaedah pemetakan dan susun atur; dan gambar rajah yang membabitkan kaedah pengukuran, kaedah pemetakan dan kaedah analogi. Seterusnya, empat daripada enam orang guru menggunakan kategori figuratif yang melibatkan bahan konkrit dan gambar rajah. Akhirnya, kategori yang paling kurang guru gunakan ialah kategori manipulatif , iaitu hanya melibatkan dua daripada enam orang guru, yang membabitkan penggunaan anggota badan.

Perwakilan Tentang Gambar Rajah Selanjar Dan Diskret. Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat melibatkan perwakilan gambar rajah dibahagikan kepada dua bentuk, iaitu gambar rajah selanjar dan gambar rajah diskret. Gambar rajah selanjar melibatkan: gambar 15 jalur yang disusun secara tercantum dan diasingkan secara tiga-tiga oleh empat garis putus-putus yang menegak; garis nombor yang dilabelkan daripada angka 0 hingga 20, dan terdapat empat anak panah melengkung yang dilukis dari angka 20 ke 15, 15 ke 10, 10 ke 5, dan 5 ke 0; manakala gambar rajah diskret pula melibatkan garis nombor yang dilabelkan daripada angka 0 hingga 8 dan anak panah melengkung dilukis dari angka 8 ke 5, kemudian 5 ke 2; manakala gambar rajah diskret membabitkan gambar lapan ekor arnab yang dibulatkan secara dua-dua, 12 buah bekas disusun tiga-tiga dalam lajur dengan lajur pertama dan ketiga berlorek dan lajur 2 dan 4 tidak berlorek;

dan gambar sembilan bulatan disusun empat-empat dalam lajur dan lajur ketiga hanya ada satu bulatan sahaja.

Analisis cara perwakilan gambar rajah selanjar dan diskret tersebut di atas yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.4. Jadual ini menunjukkan kategori bagi perwakilan gambar rajah selanjar dan diskret tersebut di atas, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang menggunakan cara perwakilan tersebut. Seterusnya, cara perwakilan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden ditunjukkan dalam Jadual 4.5.

Jadual 4.4
Perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret.

Kategori	Perkara	Huraian	Responden
Simbolik	A. Angka Contoh:		Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah
	(a) Kaedah pengukuran $8 \div 3 = 2$ baki 2	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea pengukuran yang melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang dibahagi mewakili jumlah objek/bahagian, dan nombor bahagi mewakili kuantiti ahli dalam setiap kumpulan, dan hasil bahagi mewakili bilangan kumpulan dan baki mewakili bilangan yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah
	(b) Kaedah pemetakan $15 \div 5 = 3$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea pemetakan yang melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang dibahagi mewakili jumlah objek/bahagian, nombor bahagi mewakili bilangan kumpulan dan hasil bahagi mewakili kuantiti ahli dalam setiap kumpulan.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah

(a) Operasi darab $5 \times 3 = 15$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea operasi darab melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang didarab mewakili bilangan kumpulan/bahagian, nombor darab mewakili kuantiti ahli dalam setiap kumpulan, dan hasil darab mewakili jumlah ahli.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah
(b) Operasi tambah berulang $3+3+3+3+3=15$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea operasi tambah berulang melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang ditambah dan nombor tambah mewakili jumlah objek/bahagian dalam satu kumpulan, bilangan nombor tambah mewakili bilangan kumpulan, dan hasil tambah mewakili jumlah objek/bahagian.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah
(c) Operasi Tolak melibatkan kuantiti yang kurang $12-3=9$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan cari beza antara kumpulan lengkap dan baki melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang ditolak mewakili jumlah objek/bahagian yang lengkap dan nombor tolak mewakili baki/kuantiti yang diperlukan lagi agar cukup membentuk satu kumpulan yang lengkap, dan beza mewakili jumlah objek/bahagian yang sebenar.	Kong
(d) Operasi tolak $12-6=6$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea operasi tolak melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang ditolak mewakili jumlah objek/bahagian, dan nombor tolak mewakili kuantiti ahli dalam satu kumpulan, dan beza mewakili kuantiti bagi kumpulan yang satu lagi.	John
(e) Operasi tolak berulang. $20-5-5-5-5=0$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea operasi tolak berulang melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang ditolak mewakili jumlah objek/bahagian, dan nombor tolak mewakili kuantiti ahli dalam satu kumpulan, bilangan nombor tolak mewakili bilangan kumpulan, dan beza mewakili baki	Tong, John, Chong, Lim, Shidah
(f) Gabungan operasi tolak dan bahagi. $(8-2) \div 2 = 3$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea operasi tolak berulang melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang ditolak mewakili	Tong

		jumlah objek/bahagian, dan nombor tolak mewakili baki. beza mewakili kuantiti objek yang membentuk kumpulan lengkap, nombor bahagi mewakili bilangan kumpulan dan hasil bahagi mewakili kuantiti ahli dalam setiap kumpulan.	
(i)	Gabungan operasi darab dan tambah $4 \times 2 + 1 = 9$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea operasi darab dan tambah melibatkan ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang didarab mewakili bilangan kumpulan, nombor darab mewakili kuantiti objek/bahagian dalam setiap kumpulan, nombor tambah mewakili baki, dan hasil mewakili jumlah objek/bahagian.	Tong, Chong, Lim, Shidah
(j)	Gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurung. $(2 \times 3) + (2 \times 3)$	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurung dalam bentuk ayat matematik yang ditulis dalam angka dan simbol, iaitu nombor yang didarab mewakili bilangan kumpulan, nombor darab mewakili kuantiti objek/bahagian dalam setiap kumpulan dan dua kurungan mewakili dua kumpulan yang berlainan tetapi mempunyai bilangan kumpulan dan kuantiti objek /bahagian yang sama	John, Shidah
B.	**Perkataan**		
	Contoh:		
(a)	Kaedah pengukuran 15 jalur diasingkan secara tiga-tiga, Oleh itu terdapat lima kumpulan tiga jalur.	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea pengukuran yang melibatkan cerita yang ditulis dalam perkataan, iaitu jumlah objek/bahagian diagihkan secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek/bahagian yang sama.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah
(b)	Kaedah pemetakan Lapan objek diagihkan kepada dua kumpulan secara sama banyak, dengan setiap kumpulan ada tiga objek, dan bakinya dua.	• Mewakilkan gambar rajah dengan menggunakan idea pemetakan yang melibatkan cerita yang ditulis dalam perkataan, iaitu jumlah objek/bahagian diagihkan kepada bilangan kumpulan tertentu dengan setiap kumpulan mempunyai objek/bahagian yang sama.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah

Jadual 4.5.

Tiga Bahagian Dalam Perwakilan Gambar Rajah Selanjar Dan Diskret.

Situasi yang diasimilasikan	**Aktiviti yang dijalankan**	**Hasil yang diharapkan**
Jumlah bilangan objek/bahagian pada gambar selanjar atau diskret diasimilasikan sebagai nombor bahagi, kuantiti objek/bahagian yang diagihkan diasimilasikan sebagai nombor bahagi, dan bilangan kumpulan yang didapati diasimilasikan sebagai hasil bahagi, serta kuantiti objek/bahagian yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan diasimilasikan sebagai baki.	**(1) Kaedah Pengukuran** (a) Mengenal pasti/memahami gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Menentukan jumlah objek atau bahagian. (c) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (d) Menentukan kuantiti objek atau bahagian untuk membentuk satu kumpulan dan bakinya, iaitu bilangan objek atau bahagian yang tidak cukup membentuk satu kumpulan. (e) Menentukan/membuat bilangan kumpulan yang didapati. (f) Bercerita atau menulis ayat matematik bahagi, yang mana nombor yang dibahagi mewakili jumlah objek atau bahagian, simbol "÷" mewakili operasi bahagi, iaitu mewakili objek atau bahagian tersebut diagihkan atau dikelompokkan dengan kuantiti yang sama, nombor bahagi mewakili kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan, hasil bahagi mewakili bilangan kumpulan dan baki mewakili objek atau bahagian yang tinggal. Contohnya: i. 15 jalur diasingkan secara tiga-tiga, Oleh itu terdapat lima kumpulan tiga jalur. ii. $15 \div 3 = 5$ iii. $8 \div 3 = 2$ baki 2	Ayat matematik bahagi atau cerita dengan nombor yang dibahagi, *a* mewakili jumlah objek/ bahagian, nombor bahagi, *b* mewakili kuantiti objek/ bahagian yang diagihkan secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti yang sama, hasil bahagi, *c* mewakili bilangan kumpulan, serta baki, *r* mewakili kuantiti objek yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan. Contohnya, $a \div b = c$ atau $a \div b = c$ baki *r*
Jumlah objek/ bahagian pada gambar selanjar dan diskret diasimilasikan sebagai nombor bahagi, bilangan kumpulan objek/bahagian diasimilasikan sebagai nombor bahagi, dan kuantiti	**(2) Kaedah Pemetakan** (a) Mengenal pasti gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Menentukan jumlah bilangan objek atau bahagian. (c) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (d) Menentukan bilangan kumpulan objek dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek atau bahagian yang sama. (e) Menentukan kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan dan bakinya. (f) Bercerita atau menulis ayat matematik bahagi, yang mana nombor yang dibahagi mewakili jumlah objek atau bahagian,	Ayat matematik bahagi atau cerita dengan nombor yang dibahagi, *a* mewakili jumlah objek/ bahagian, nombor bahagi, *b* mewakili bilangan

objek/bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai hasil bahagi, serta kuantiti objek/bahagian yang tidak cukup kuantiti untuk membentuk satu kumpulan diasimilasikan sebagai baki.	operasi bahagi mewakili objek atau bahagian diagihkan atau dikelompokkan kepada bilangan kumpulan tertentu dengan bilangan yang sama, nombor bahagi mewakili bilangan kumpulan, dan hasil bahaginya mewakili kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan, dan baki mewakili kuantiti objek atau bahagian yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan. Contohnya: i. Lapan objek diagihkan kepada dua kumpulan secara sama banyak, dengan setiap kumpulan ada tiga objek, dan bakinya dua. ii. $15 \div 5 = 3$	kumpulan, dan hasil bahagi, *c* mewakili kuantiti objek/ bahagian dalam setiap kumpulan, serta baki, *r* mewakili kuantiti objek yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan. Contohnya, $a \div b = c$ atau $a \div b = c$ baki *r* Contohnya, $a \div b = c$
Bilangan kumpulan objek/bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang didarab, kuantiti objek/bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai nombor darab, dan jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil darab.	**(3) Operasi Darab** (a) Mengenal pasti gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (c) Menentukan bilangan kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek atau bahagian yang sama. (d) Menentukan operasi yang digunakan untuk mendapat jumlah objek atau bahagian. (e) Menentukan kuantiti bahagian dalam setiap kumpulan. (f) Bercerita atau menulis ayat matematik darab, yang mana nombor yang didarab mewakili bilangan kumpulan objek atau bahagian dengan kuantiti yang sama, simbol "×" mewakili operasi darab, nombor darab mewakili kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan, dan hasil darabnya mewakili jumlah objek atau bahagian. Contohnya: $5 \times 3 = 15$	Ayat matematik darab dengan nombor yang didarab, *a* mewakili bilangan kumpulan objek, nombor darab, *b* mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan, dan hasil darab, *c* mewakili jumlah objek. Contohnya, $a \times b = c$
Kuantiti objek/ bahagian dalam kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tambah, bilangan kumpulan dengan kuantiti objek/ bahagian yang sama diasimilasikan sebagai bilangan nombor tambah, kuantiti objek/bahagian yang lebih sedikit diasimilasikan	**(4) Operasi Tambah Berulang** (a) Mengenal pasti/memahami gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (g) Menentukan bilangan kumpulan dan bakinya, iaitu bilangan objek atau bahagian yang tidak cukup dijadikan satu kumpulan. (c) Menentukan kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan. (d) Menentukan operasi yang digunakan untuk mendapat jumlah objek atau bahagian. (e) Bercerita atau menulis ayat matematik melibatkan operasi tambah berulang, yang mana nombor tambah mewakili kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan dengan kuantiti yang sama, bilangan nombor tambah mewakili bilangan kumpulan objek dengan kuantiti yang sama, kuantiti	Ayat matematik tambah berulang dengan nombor tambah, *a* mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan, bilangan nombor tambah mewakili bilangan kumpulan

sebagai nombor tambah dengan nilai yang lebih kecil, dan jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil tambah.	objek/bahagian yang lebih kecil diasimilasikan sebagai nombor tambah dengan nilai yang lebih kecil, dan ditulis mengikut urutan kumpulan objek atau bahagian pada gambar rajah, simbol "+" mewakili operasi tambah, iaitu mewakili objek atau bahagian tersebut dicampurkan sekali dan hasil tambahnya mewakili jumlah objek atau bahagian. Contohnya: i. $3+3+3+3+3=15$ ii. $4+4+1=9$	objek dengan kuantiti yang sama, *b*, kuantiti objek/ bahagian yang lebih kecil diasimilasikan sebagai nombor tambah dengan nilai yang lebih kecil, dan hasil tambahnya mewakili jumlah objek, *c*. Contohnya, $a + a + a = c$ (bilangan $a = b$)
Kuantiti objek/ bahagian dalam kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tambah, bilangan kumpulan objek/ bahagian diasimilasikan sebagai bilangan nombor tambah, dan jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil tambah.	**(5) Operasi Tambah** (a) Mengenal pasti gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (c) Menentukan bilangan kumpulan.. (d) Menentukan kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan. (e) Menentukan operasi yang digunakan untuk mendapat jumlah objek atau bahagian. (f) Bercerita atau menulis ayat matematik melibatkan operasi tambah, yang mana nombor tambah mewakili kuantiti objek atau bahagian dalam kumpulan dengan kuantiti yang sama, bilangan nombor tambah mewakili bilangan kumpulan objek dengan kuantiti yang sama, simbol "+" mewakili operasi tambah, iaitu mewakili objek atau bahagian tersebut dicampurkan sekali dan hasil tambahnya mewakili jumlah objek atau bahagian. Contohnya: i. $6+6=12$	Ayat matematik tambah dengan nombor tambah, *a* mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan, bilangan nombor tambah, *b* mewakili bilangan kumpulan objek dengan kuantiti yang sama, dan hasil tambah, *c* mewakili jumlah objek. Contohnya, $a + a = c$ (bilangan $a = b$)
Jumlah objek/ bahagian yang sepatutnya diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian yang tidak cukup untuk membentuk satu	**(6) Operasi Tolak Melibatkan Kuantiti Yang Kurang** (a) Mengenal pasti/memahami gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (c) Menentukan kuantiti objek yang diperlukan untuk membentuk satu kumpulan. (d) Menentu jumlah objek atau bahagian. (e) Menentukan operasi yang digunakan.	Ayat matematik tolak yang melbatkan kuantiti yang kurang yang mana nombor yang ditolak, *a* mewakili jumlah objek/

kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tolak, dan jumlah objek/bahagian yang ada diasimilasikan sebagai beza.	(f) Bercerita atau menulis ayat matematik, yang mana nombor yang ditolak mewakili jumlah objek atau bahagian, simbol “ – ” mewakili operasi tolak, nombor tolak mewakili kuantiti objek atau bahagian yang diperlukan lagi untuk membentuk satu kumpulan, beza mewakili baki. Contohnya: $12-3=9$	bahagian yang sepatutnya, nombor tolak, *b* mewakili kuantiti objek/ bahagian yang diperlukan lagi untuk membentuk satu kumpulan, dan bezanya, *c* mewakili jumlah objek/ bahagian yang ada. Contohnya, $a - b = c$
Jumlah objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian yang sama jenis diasimilasikan sebagai nombor tolak, dan kuantiti objek/bahagian yang lain jenis, atau kuantiti objek/bahagian yang tidak cukup membentuk satu kumpulan diasimilasikan sebagai beza.	**(7) Operasi Tolak** (a) Mengenal pasti/memahami gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (c) Menentukan bilangan kumpulan yang dibentuk. (d) Menentukan kuantiti objek atau bahagian di dalam setiap kumpulan. (e) Menentukan jumlah objek atau bahagian. (f) Menentukan operasi yang digunakan. (g) Bercerita atau menulis ayat matematik, yang mana nombor yang ditolak mewakili jumlah objek atau bahagian, simbol “ – ” mewakili operasi tolak, menunjukkan jumlah objek atau bahagian tersebut dikurangkan, nombor tolak mewakili kuantiti objek atau bahagian bagi jenis yang satu lagi, beza mewakili kuantiti objek atau bahagian bagi kumpulan yang satu jenis lagi, atau kuantiti objek/bahagian yang tidak cukup membentuk satu kumpulan diasimilasikan sebagai beza. Contohnya: $12-6=6$	Ayat matematik tolak yang mana nombor yang ditolak, *a* mewakili jumlah objek/ bahagian, nombor tolak, b mewakili kuantiti objek/ bahagian yang sama jenis, dan beza, *c* mewakili kuantiti objek/ bahagian yang lain jenis atau kuantiti objek/ bahagian yang tidak cukup membentuk satu kumpulan. Contohnya, $a - b = c$
Kuantiti objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan	**(8) Operasi Tolak Berulang** (a) Mengenal pasti gambar rajah ialah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Menentukan jumlah bilangan objek atau bahagian. (c) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (d) Menentukan kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan.	Ayat matematik tolak berulang, yang mana nombor yang ditolak, *a* mewakili jumlah objek/ bahagian,

sebagai nombor tolak, dan bilangan kumpulan objek/bahagian diasimilasikan sebagai bilangan nombor tolak yang sama, dan kuantiti yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan dengan kuantiti tertentu sebagai beza.	(e) Menentukan bilangan kumpulan yang dibentuk. (f) Menentukan operasi yang digunakan. (g) Bercerita atau menulis ayat matematik, yang mana nombor yang ditolak mewakili jumlah bilangan objek atau bahagian, simbol "–" mewakili operasi tolak, nombor tolak mewakili kuantiti objek atau bahagian yang dikurangkan, bilangan kumpulan objek/bahagian mewakili bilangan kali nombor yang ditolak ditolakkan oleh nombor tolak, beza mewakili kuantiti yang tinggal. Contohnya: i. $20-5-5-5-5=0$ ii. $8-3-3=2$	nombor tolak, *b* mewakili bilangan objek/ bahagian yang dikeluarkan, bilangan nombor tolak, *c* mewakili bilangan kali kuantiti objek/ bahagian yang sama dikeluarkan, dan beza, *r* mewakili kuantiti selang yang tidak cukup membentuk satu kumpulan. Contohnya, $a - b - b = r$ (bilangan $b = c$)
Jumlah objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian yang tidak cukup satu kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tolak, bezanya diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi dan bilangan kumpulan objek/bahagian diasimilasikan sebagai nombor bahagi, serta kuantiti objek/bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai hasil bahagi.	**(9) Gabungan Operasi Tolak Dan Bahagi** (a) Mengenal pasti/memahami gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Menentukan jumlah bilangan objek atau bahagian. (c) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (d) Menentukan bilangan kumpulan yang dibentuk. (e) Menentukan operasi yang digunakan. (f) Bercerita atau menulis ayat matematik, yang mana nombor yang ditolak mewakili jumlah objek atau bahagian, simbol " – " mewakili operasi tolak, nombor tolak mewakili kuantiti objek atau bahagian yang tidak cukup membentuk satu kumpulan, simbol "÷" mewakili operasi bahagi, nombor bahagi mewakili bilangan kumpulan dengan kuantiti yang sama, dan hasil bahagi mewakili kuantiti objek/bahagian dalam setiap kumpulan. Contohnya: $(8-2)\div 2=3$	Ayat matematik gabungan operasi tolak dan bahagi, yang mana nombor yang ditolak, *a* mewakili jumlah objek /bahagian, simbol " – " mewakili operasi tolak, nombor tolak, *b* mewakili kuantiti objek/ bahagian yang tidak cukup membentuk satu kumpulan, simbol "÷" mewakili operasi bahagi, nombor bahagi, *c* mewakili bilangan kumpulan

		dengan kuantiti yang sama, dan hasil bahagi, *d* mewakili kuantiti objek/ bahagian dalam setiap kumpulan. Contohnya, $(a - b) \div c = d$
Bilangan kumpulan objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang didarab, kuantiti objek/ bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai nombor darab, baki diasimilasikan sebagai nombor tambah, jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil operasi bergabung.	**(10) Gabungan Operasi Darab Dan Tambah.** (a) Mengenal pasti gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (c) Menentukan bilangan kumpulan mempunyai kuantiti objek atau bahagian yang sama dan bakinya, iaitu bilangan objek atau bahagian yang tidak cukup dijadikan satu kumpulan. (d) Menentukan operasi yang digunakan. (e) Bercerita atau menulis ayat matematik, yang mana nombor yang didarab mewakili jumlah bilangan kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek atau bahagian yang sama, simbol "×" mewakili operasi darab, iaitu mewakili bilangan objek atau bahagian dalam kumpulan digandakan, simbol "+" mewakili operasi tambah, iaitu mewakili objek atau bahagian tersebut dicampurkan sekali, nombor darab mewakili kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan, nombor tambah, iaitu 2 mewakili baki yang tidak cukup kuantiti untuk membentuk satu kumpulan, dan hasil operasi bergabung ialah jumlah objek atau bahagian. Contohnya: $4 \times 2 + 1 = 9$	Ayat matematik gabungan operasi darab dan tambah yang mana nombor yang didarab, *a* mewakili bilangan kumpulan objek/ bahagian, nombor darab, *b* mewakili kuantiti objek/ bahagian dalam satu kumpulan, nmbor tambah, *c* mewakili kuantiti yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan, dan hasil operasi bergabung, *d* mewakili jumlah objek/ bahagian. Contohnya, $a \times b + c = d$
Bilangan kumpulan objek/ bahagian yang sama jenis diasimilasikan sebagai nombor yang didarab, kuantiti objek/ bahagian dalam setiap kumpulan	**(11) Gabungan Operasi Darab Dan Tambah Melibatkan Tanda Kurung** (a) Mengenal pasti/memahami gambar rajah adalah perwakilan selanjar atau perwakilan diskret. (b) Mengenal pasti cara objek atau bahagian tersebut dikumpulkan atau diagihkan. (c) Menentukan bilangan kumpulan yang mempunyai kuantiti objek atau bahagian dengan jenis yang sama (d) Menentukan operasi yang digunakan.	Ayat matematik gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurung, yang mana nombor yang didarab, *a*

diasimilasikan sebagai nombor darab, Jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil gabungan operasi.	(e)	Bercerita atau menulis ayat matematik, yang mana nombor yang didarab mewakili jumlah kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek atau bahagian yang sama, simbol “×” mewakili operasi darab, iaitu mewakili bilangan objek atau bahagian dalam kumpulan digandakan, simbol “+” mewakili operasi tambah, iaitu mewakili objek atau bahagian tersebut dicampurkan dengan jumlah bilangan jenis yang lain, nombor darab mewakili kuantiti objek atau bahagian dalam setiap kumpulan, dan hasilnya ialah jumlah objek atau bahagian Contohnya: $(2\times3)+(2\times3)$	mewakili bilangan kumpulan objek/ bahagian yang sama jenis, tanda kurungan mewakili objek/ bahagian yang sama jenis, nombor darab, *b* mewakili kuantiti objek/ bahagian dalam satu kumpulan, hasil tambah bagi dua hasil darab mewakili jumlah objek/ bahagian. Contohnya, $(a \times b) + (a \times b) = c$

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat melibatkan perwakilan yang membabitkan gambar rajah selanjar dan diskret seperti di atas dirumuskan dalam satu kategori sahaja, iaitu simbolik. Kategori ini dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu angka dan perkataan. Perwakilan dengan angka melibatkan sembilan bahagian, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, operasi darab, operasi tambah berulang, mencari beza antara kumpulan lengkap dan baki, operasi tolak, operasi tolak berulang, gabungan operasi tolak dan bahagi, gabungan operasi darab dan tambah, dan gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurung; manakala perwakilan dengan perkataan melibatkan dua bahagian, iaitu kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan.

Daripada kajian ini, didapati semua responden cenderung menggunakan angka dan perkataan dalam mewakili gambar rajah selanjar dan diskret. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 2.12(John) menunjukkan cara perwakilan melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang membabitkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2. 12(John) : Perwakilan Melibatkan Garis Nombor Yang Dilabelkan Angka 0 Hingga 8

P: Apa yang dapat cikgu tafsirkan dari garis nombor ini?
R: Lapan bahagi tiga sama dengan dua baki dua. (Cikgu menulis ayat matematik, "8 ÷ 3 = 2 baki 2" dan di bawah 3 dituliskan "Ahli" dan di 2 pertama dituliskan "Kumpulan" dan di "2" kedua dituliskan "Baki").

8 ÷ 3 = 2 baki 2

P: Boleh cikgu terangkan?
R: "8" mewakili lapan selang diliputi oleh satu anak panah melengkung besar dilukis daripada angka 0 hingga 8, "÷ 3" mewakili selang itu diasingkan secara tiga-tiga oleh anak panah melengkung kecil yang meliputi tiga selang dan "2 baki 2" mewakili terdapat dua anak panah melengkung kecil yang meliputi tiga selang dan dua selang yang tidak diliputi oleh anak panah melengkung.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan garis nombor ini begitu?
R: Saya nampak garis nombor itu ada satu anak panah melengkung besar dari angka 0 hingga 8 dan di bawah garis nombor ada dua anak panah melengkung kecil yang masing-masing meliputi tiga selang serta terdapat dua selang yang tidak diliputi oleh anak panah melengkung. Situasi ini boleh diwakili dengan ayat matematik, "8 ÷ 3 = 2 baki 2".
P: Mengapakah tinggal dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung?
R: Ini kerana setiap anak panah melengkung kecil perlu meliputi tiga selang, disebabkan hanya ada dua selang maka ia tidak cukup bilangan untuk melukis satu anak panah melengkung kecil lagi. Oleh itu, ia tinggal sebagai bakinya.

Perwakilan John tentang garis nombor yang dilabelkan angka 0 hingga 8 ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, "8 ÷ 3 = 2 baki 2" dan di bawah 3 dituliskan "Ahli" dan di 2 pertama dituliskan "Kumpulan" dan di "2" kedua dituliskan "Baki". Beliau menerangkan "8" mewakili lapan selang diliputi oleh satu anak panah melengkung besar dilukis dari angka 0 hingga 8, "÷ 3" mewakili selang itu diasingkan secara tiga-tiga oleh anak panah melengkung kecil yang meliputi tiga selang dan "2 baki 2" mewakili terdapat dua anak panah melengkung kecil yang meliputi tiga selang dan dua selang yang tidak diliputi oleh anak panah melengkung. Seterusnya, John menjelaskan gambar tersebut ditafsirkan sebegitu kerana beliau nampak garis nombor itu ada satu anak panah melengkung besar dari angka 0 hingga 8 dan di bawah garis nombor ada dua anak panah melengkung kecil yang masing-

masing meliputi tiga selang serta terdapat dua selang yang tidak diliputi oleh anak panah melengkung. Situasi ini boleh diwakili dengan ayat matematik, “8 ÷ 3 = 2 baki 2”. Menurut beliau, tinggal dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung kerana setiap anak panah melengkung kecil perlu meliputi tiga selang, oleh kerana hanya ada dua selang, maka ia tidak cukup bilangan untuk melukis satu anak panah melengkung kecil lagi. Oleh itu, ia tinggal sebagai bakinya.

Perwakilan John tentang garis nombor yang dilabelkan angka 0 hingga 8 melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (1) Kaedah Pengukuran.

Selain itu, tingkah laku Chong dalam Protokol 2.10(Chong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang melibatkan tiga bahagian.

Protokol 2.10 (Chong): Perwakilan Melibatkan Gambar 15 Jalur

P: Ada tafsiran lain tentang gambar rajah ini?
R: 15 bahagi lima sama dengan tiga. (Cikgu menulis “15 ÷ 5 = 3”).

$15 \div 5 = 3$

P: Cuba cikgu terangkan.
R: “15” mewakili 15 jalur dan “÷ 5” mewakili jalur itu diasingkan kepada 5 kumpulan dengan bilangan yang sama dan “3” mewakili setiap kumpulan ada tiga jalur.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan gambar itu begini?
R: Saya nampak 15 jalur diasingkan kepada lima kumpulan dengan setiap kumpulan ada tiga jalur. Situasi ini boleh diwakili dengan ayat matematik, “15 ÷ 5 = 3”.

Perwakilan Chong tentang gambar 15 jalur yang tercantum dan diasingkan secara tiga-tiga oleh empat garis putus-putus menegak ditunjukkan dengan menulis “15 ÷ 5 = 3”. Beliau menerangkan “15” mewakili 15 jalur dan “÷ 5” mewakili jalur itu diasingkan kepada 5 kumpulan dengan bilangan yang sama dan “3” mewakili setiap kumpulan ada tiga jalur. Beliau menerangkan lagi, perwakilannya begitu kerana beliau nampak 15 jalur diasingkan kepada lima kumpulan dengan setiap kumpulan ada tiga jalur. Situasi ini boleh diwakili dengan ayat matematik, “15 ÷ 5 = 3”.

Perwakilan Chong tentang gambar 15 jalur yang tercantum dan diasingkan secara tiga-tiga oleh empat garis putus-putus menegak melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (2) Kaedah Pemetakan.

Seterusnya, tingkah laku Lim dalam Protokol 2.10(Lim) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan operasi darab, dan urutan tiga bahagian dalam perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret yang melibatkan operasi darab juga.

Protokol 2.10(Lim): Perwakilan Melibatkan Gambar 15 Jalur

P: Ada perwakilan lain tentang gambar rajah ini?
R: Lima darab tiga sama dengan lima belas. (Cikgu menulis ayat matematik, “5 × 3 = 15”).

5 × 3 = 15

P: Cuba cikgu terangkan.
R: “5” mewakili lima bahagian dengan setiap bahagian ada tiga jalur , “3” mewakili setiap bahagian ada tiga jalur dan “×” mewakili gandaan.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan gambar itu begini?
R: Ini kerana saya nampak ada lima kumpulan jalur dengan setiap kumpulan ada tiga jalur. Jumlahnya boleh didapati dengan mendarabkan bilangan kumpulan dengan bilangan jalur dalam setiap kumpulan. Situasi ini boleh diwakili dengan ayat matematik, “5 × 3 = 15”.

Perwakilan Lim tentang 15 jalur yang tercantum diasingkan oleh empat garis putus-putus menegak untuk mengasingkan jalur tersebut secara tiga-tiga ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, “5 × 3 = 15”, yang bermaksud tiga darab lima sama dengan lima belas. Beliau menerangkan “3” mewakili jalur itu diasingkan secara tiga-tiga, “5” mewakili setiap terdapat lima kumpulan tiga jalur, dan “×” mewakili simbol darab yang menunjukkan gandaan 3. Seterusnya, Lim menjelaskan gambar tersebut diwakilkan sebegitu kerana beliau nampak jalur itu diasingkan secara tiga-tiga, dengan itu terdapat lima bahagian ada tiga jalur. Beliau menyatakan situasi tersebut boleh diwakili dengan ayat matematik, “5 × 3 = 15”.

Perwakilan Lim tentang 15 jalur yang tercantum diasingkan oleh empat garis putus-putus menegak untuk mengasingkan jalur tersebut secara tiga-tiga melibatkan operasi darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (3) Operasi Darab.

Daripada kajian didapati responden juga menggunakan operasi tambah berulang untuk mewakili gambar rajah selanjar dan diskret. Sebagai contoh, tingkah laku Shidah dalam Protokol 2.11(Shidah) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan operasi tambah berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.11(Shidah): Perwakilan Melibatkan Garis Nombor Yang Dilabelkan Dari Angka 0 Hingga 20

P: Ada lagi?
R: Ada. Lima tambah lima tambah lima tambah lima sama dengan dua puluh. (Cikgu menulis ayat matematik, “5 + 5 + 5 + 5 = 20”).

5 + 5 + 5 + 5 = 20

P: Boleh cikgu terangkan?
R: “5” mewakili lima selang dalam satu anak panah melengkung kecil, “5” ditambah empat kali mewakili empat anak panah melengkung masing-masing ada lima selang dan “20” mewakili jumlahnya 20 selang.
P: Mengapakah cikgu mewakili garis nombor ini begini?
R: Saya nampak ada empat anak panah melengkung kecil masing-masing meliputi lima selang dan jumlahnya ada 20 selang, ini boleh diwakili dengan ayat matematik, “5 + 5 + 5 + 5 = 20”.

Perwakilan Shidah ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, “5 + 5 + 5 + 5 = 20”, yang bermaksud lima tambah lima tambah lima tambah lima sama dengan dua puluh. Beliau menerangkan “5” mewakili lima selang yang diliputi oleh satu anak panah melengkung kecil, "5" ditambah empat kali mewakili empat bahagian masing-masing ada lima selang, dan "20" mewakili jumlahnya 20 selang. Seterusnya, beliau menerangkan gambar itu diwakilkan sebegitu kerana beliau nampak ada empat anak panah melengkung kecil masing-masing meliputi lima selang dan jumlahnya ada 20 selang. Beliau menyatakan situasi itu boleh diwakili dengan ayat matematik, "5 + 5 + 5 + 5 = 20".

Perwakilan Shidah melibatkan garis nombor yang dilabelkan dari angka 0 hingga 20 membabitkan operasi tambah berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (4) Operasi Tambah Berulang.

Hasil kajian ini juga didapati responden mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan cara mencari kuantiti yang kurang dengan menulis ayat matematik tolak. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 2.9(Kong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan cara mencari kuantiti yang kurang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.9(Kong): Perwakilan Melibatkan Gambar Sembilan Bulatan

P: Ada lagi taksiran tentang gambar ini?
R: 12 tolak tiga sama dengan sembilan (Cikgu menulis ayat matematik, "12 – 3 = 9").

$$12 - 3 = 9$$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: "12" mewakili 12 bulatan, tiga " – 3" mewakili kurang tiga bulatan dan "9" mewakili hasil tolaknya, iaitu 9 bulatan.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan gambar itu begitu?
R: Saya nampak ada tiga lajur, lajur pertama dan kedua ada empat bulatan tetapi lajur ketiga hanya ada satu bulatan, oleh itu, saya anggap ketiga-tiga lajur itu ada empat bulatan yang bersamaan dengan 12 bulatan. Lajur ketiga hanya ada satu bulatan bermakna telah kurang tiga bulatan. Oleh itu, jumlah bulatan itu dikira dengan operasi tolak yang boleh diwakili dengan "12 – 3 = 9".

Perwakilan Kong tentang gambar sembilan bulatan ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, “12 – 3 = 9”, yang bermaksud 12 tolak 3 sama dengan sembilan. Beliau menjelaskan “12” mewakili 12 bulatan, tiga “ – 3” mewakili kurang tiga bulatan dan “9” mewakili bakinya, iaitu 9 bulatan. Seterusnya, Kong menjelaskan gambar tersebut ditafsirkan sebegitu kerana beliau nampak ada tiga lajur, lajur pertama dan kedua ada empat bulatan tetapi lajur ketiga hanya ada satu bulatan, oleh itu, beliau menganggap ketiga-tiga lajur itu ada empat bulatan yang sama dengan 12 bulatan. Lajur ketiga hanya ada satu bulatan bermakna telah kurang tiga bulatan. Oleh itu, jumlah bulatan itu dikira dengan operasi tolak yang boleh diwakili dengan “12 – 3 = 9”.

Perwakilan Kong tentang gambar sembilan bulatan membabitkan operasi tolak melibatkan kuantiti yang kurang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (6) Operasi Tolak Melibatkan Kuantiti Yang Kurang.

Selain itu, hasil kajian ini juga didapati responden mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan operasi tolak dengan menulis ayat matematik tolak. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 2.8(John) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan operasi tolak dalam menulis ayat matematik tolak, dan urutan tiga bahagian dalam perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret yang melibatkan operasi tolak juga.

Protokol 2.8 (John): Perwakilan Melibatkan Gambar 12 Buah Bekas

P: Apa lagi yang dapat cikgu tafsirkan dari gambar ini?
R: Dua belas tolak enam sama dengan enam. (Cikgu menulis ayat matematik, “12 – 6 = 6”).

12 – 6 = 6

P: Boleh cikgu terangkan?

R: “12” mewakili 12 buah bekas, simbol “– ” mewakili operasi tolak, “6” pertama mewakili enam bekas berlorek dan “6” kedua mewakili baki enam bekas putih.

P: Mengapakah cikgu mewakilkan gambar itu begitu?

R: Ini kerana saya nampak ada 12 bekas dan di antaranya ada enam bekas telah dilorek. Biasanya objek yang telah dilorek bermakna objek itu telah diasingkan. Oleh itu, 12 bekas diasingkan enam bekas akan tinggal enam bekas putih. Ini boleh diwakili dengan “12 – 6 = 6”.

Perwakilan John tentang 12 buah bekas ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, “12 – 6 = 6”. Beliau menerangkan “12” mewakili 12 buah bekas, simbol “– ” mewakili operasi tolak, “6” pertama mewakili enam bekas berlorek dan “6” kedua mewakili baki enam bekas putih. Seterusnya, beliau menerangkan gambar tersebut ditafsirkan sedemikian kerana beliau nampak ada 12 bekas dan di antaranya ada enam bekas telah dilorek. Biasanya benda yang telah dilorek bermakna benda itu telah diasingkan. Oleh itu, 12 bekas diasingkan enam bekas akan tinggal enam bekas putih. Ini boleh diwakili dengan “12 – 6 = 6”.

Perwakilan John tentang 12 buah bekas melibatkan operasi tolak, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (5) Operasi Tolak.

Selain itu, hasil kajian ini juga didapati responden mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan operasi tolak berulang dalam menulis ayat matematik tolak. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 2.11(Kong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan operasi tolak berulang dalam menulis ayat matematik tolak, dan urutan tiga bahagian dalam perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret yang melibatkan operasi tolak berulang.

Protokol 2.11(Kong): Perwakilan Melibatkan Garis Nombor yang Dilabelkan Dari Angka 0 Hingga 20

P: Apa lagi yang boleh cikgu tafsirkan daripada garis nombor ini?
R: Dua puluh tolak lima tolak lima tolak lima tolak lima sama dengan sifar (Cikgu menulis ayat matematik, "20 – 5 – 5 – 5 – 5 = 0").

20 – 5 – 5 – 5 – 5 = 0

P: Boleh cikgu terangkan?
R: Anak panah melengkung dilukis dari angka 0 ke 20 yang meliputi 20 selang mewakili 20, dan empat anak panah melengkung dilukis dari angka 20 ke angka 0 , dengan setiap anak panah meliputi lima selang, iaitu anak panah itu dilukis dari angka 20 ke 15, angka 15 ke 10, angka 10 ke 5, dan angka 5 ke 0 mewakili tolak 5 berturut-turut.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan garis nombor itu begitu?
R: Saya nampak anak panah melengkung besar dilukis dari angka 0 ke 20 yang meliputi 20 selang boleh mewakili nombor 20. Empat anak panah melengkung dilukis dari belakang ke depan, iaitu dari angka 20 ke 0 menunjukkan kuantitinya berkurangan, iaitu setiap kali kurang lima selang, yang mana dari angka 20 ke 15, angka 15 ke 10, angka 10 ke 5 dan angka 5 ke 0. Lima ditolak empat kali, oleh itu, kita boleh katakan 20 boleh ditolak 5 empat kali . Empat anak panah melengkung kecil dilukis dari angka 20 ke 0 yang meliputi 20 selang mewakili 20 ditolak 5 empat kali untuk menjadi sifar.
P: Apa maksud 20 tolak empat kali 5?
R: Dalam 20 ada empat 5.

Perwakilan Kong tentang garis nombor yang dilabelkan dari angka 0 hingga 20 ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, "20 – 5 – 5 – 5 – 5 = 0", yang bermaksud dua puluh tolak lima tolak lima tolak lima tolak lima sama dengan sifar. Beliau menerangkan anak panah melengkung besar dilukis dari angka 0 ke 20 yang meliputi 20 selang mewakili 20, dan empat anak panah melengkung kecil dilukis dari angka 20 ke 15, angka 15 ke 10, angka 10 ke 5 dan angka 5 ke 0 mewakili tolak 5 berturut-turut. Seterusnya, beliau menerangkan gambar itu ditafsirkan sebegitu kerana beliau nampak anak panah melengkung besar dilukis dari angka 0 ke 20 yang meliputi 20 selang boleh mewakili 20. Empat anak panah melengkung dilukis dari belakang ke depan, iaitu dari angka 20 ke 0 menunjukkan kuantitinya berkurangan, iaitu setiap kali kurang lima selang, yang mana dari angka 20 ke 15, angka 15 ke 10, angka 10 ke 5 dan angka 5 ke 0. Tolak lima empat kali, oleh itu, boleh dikatakan 20 boleh ditolak empat 5. Anak panah melengkung besar dilukis dari angka 20 ke 0 yang meliputi 20 selang mewakili 20 ditolak 5 empat kali untuk menjadi sifar. Menurut beliau, maksud 20 tolak 5 empat kali ialah dalam 20 ada empat 5.

Perwakilan Kong tentang garis nombor yang dilabelkan dari angka 0 hingga 20 melibatkan operasi tolak berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (8) Operasi Tolak Berulang.

Seterusnya, hasil kajian ini juga didapati responden mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan gabungan operasi tolak dan bahagi dalam menulis ayat matematik. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 2.12(Tong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan gabungan operasi tolak dan bahagi dalam menulis ayat matematik, dan urutan tiga bahagian dalam perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret yang melibatkan gabungan operasi tolak dan bahagi juga.

Protokol 2.12 (Tong): Perwakilan Melibatkan Garis Nombor Yang Dilabelkan Dari 0 Hingga 8

P: Apa lagi yang boleh cikgu tafsirkan daripada garis nombor ini?
R: "(8 - 2) ÷ 2 = 3". (Cikgu menulis "(8 - 2)÷ 2 = 3").

$$(8-2) \div 2 = 3$$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: "8" mewakili lapan objek yang diwakili oleh 8 selang dari angka 0 ke angka 8 yang diliputi oleh satu anak panah melengkung 0 hingga 8 dan "- 2" mewakili dua objek yang tidak cukup membentuk kumpulan tiga objek dikeluarkan, manakala "÷ 2" mewakili objek itu diagihkan kepada dua kumpulan, dan "3" mewakili tiga objek dalam setiap kumpulan.
P: Mengapakah cikgu mentafsirkan gambar itu begitu?
R: Garis nombor itu ada 8 selang yang dibentuk oleh angka 0 hingga angka 8 dan diliputi oleh satu anak panah melengkung, ini boleh mewakili 8 objek, dan terdapat dua anak panah melengkung yang dilukis dari angka 8 ke angka 5 dan angka 5 ke angka 0, dengan setiap anak panah melengkung meliputi tiga selang, yang mana mewakili dua kumpulan tiga objek. Terdapat dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung, ini mewakili 2 objek tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan. Untuk mengetahui dalam setiap kumpulan ada

> berapa objek, saya tolakkan objek yang tidak dapat membentuk kumpulan itu, kemudian objek yang tinggal itu dibahagikan dengan bilangan kumpulan yang ada, iaitu yang diwakili oleh dua anak panah melengkung itu.

Perwakilan Tong tentang garis nombor yang dilabelkan dari 0 hingga 8 ditunjukkan dengan menulis “(8 - 2)÷ 2 = 3”, yang mana “8” mewakili lapan objek yang diwakili oleh 8 selang dari angka 0 ke angka 8 yang diliputi oleh satu anak panah melengkung 0 hingga 8 dan “- 2” mewakili dua objek yang tidak cukup membentuk kumpulan tiga objek dikeluarkan, manakala “÷ 2” mewakili objek itu diagihkan kepada dua kumpulan, dan “3” mewakili tiga objek dalam setiap kumpulan. Beliau menerangkan lagi, garis nombor itu diwakilkan begitu kerana garis nombor itu ada 8 selang yang dibentuk oleh angka 0 hingga angka 8 dan diliputi oleh satu anak panah melengkung, ini boleh mewakili 8 objek, dan terdapat dua anak panah melengkung yang dilukis dari angka 8 ke angka 5 dan angka 5 ke angka 0, dengan setiap anak panah melengkung meliputi tiga selang, yang mana mewakili dua kumpulan tiga objek. Beliau menyatakan bahawa terdapat dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung, ini mewakili 2 objek tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan. Sambungan beliau, untuk mengetahui dalam setiap kumpulan ada berapa objek, beliau menolakkan objek yang tidak dapat membentuk kumpulan itu, kemudian objek yang tinggal itu dibahagikan dengan bilangan kumpulan yang ada, iaitu yang diwakili oleh dua anak panah melengkung.

Perwakilan Tong tentang garis nombor yang dilabelkan dari 0 hingga 8 melibatkan gabungan operasi tolak dan bahagi, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (9) Gabungan Operasi Tolak dan Bahagi.

Di samping itu, hasil kajian ini didapati responden mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan gabungan operasi darab dan tambah dalam menulis ayat matematik. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 2.9(Kong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan gabungan operasi darab dan tambah dalam menulis ayat matematik, dan urutan tiga bahagian dalam perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret yang melibatkan operasi darab dan tambah juga.

Protokol 2.9 (Kong): Perwakilan Melibatkan Gambar Sembilan Bulatan

P: Ada lagi tafsiran tentang gambar ini?
R: Dua darab empat tambah satu sama dengan sembilan. (Cikgu menulis "2 × 4 + 1 = 9").

$$2 \times 4 + 1 = 9$$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: "2" mewakili ada lajur masing-masing ada empat bulatan, " × 4" mewakili setiap lajur ada empat bulatan, manakala "1" mewakili satu bulatan dalam lajur ketiga dan "9" mewakili kesemuanya ada sembilan bulatan.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan gambar itu begitu?
R: Saya nampak ada dua lajur yang ada empat bulatan dan satu lajur ada satu bulatan. Jumlah bulatan dalam kedua-dua lajur yang ada empat bulatan boleh didapati dengan menggunakan operasi darab, iaitu "4 × 2" dan untuk mendapatkan jumlah keseluruhan bulatan, kita perlu tambahkan jumlah bulatan pada lajur pertama dan kedua dengan jumlah bulatan pada lajur ketiga. Ini boleh diwakili dengan ayat matematik, "2 × 4 + 1 = 9"
P: Bagaimanakah cikgu mendapat hasilnya 9?
R: Saya mendarabkan dua dengan empat untuk mendapat lapan, kemudian menambahkan lapan dengan satu untuk mendapat sembilan.

Perwakilan Kong tentang gambar sembilan bulatan ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, "2 × 4 + 1 = 9", yang bermaksud dua darab empat tambah satu sama dengan sembilan. Beliau menjelaskan "2" mewakili dua lajur masing-masing ada empat bulatan, " × 4" mewakili setiap lajur ada empat bulatan, manakala "1" mewakili satu bulatan dalam lajur ketiga dan "9" mewakili kesemuanya ada sembilan bulatan. Seterusnya, beliau menjelaskan gambar tersebut ditafsirkan sebegitu kerana beliau nampak dua lajur masing-masing ada empat bulatan dan satu lajur ada satu bulatan. Beliau menyatakan jumlah bulatan dalam kedua-dua lajur yang ada empat bulatan boleh didapati dengan menggunakan operasi darab, iaitu "4 × 2" dan untuk mendapatkan jumlah keseluruhan bulatan, kita perlu tambahkan jumlah bulatan pada lajur pertama dan kedua dengan jumlah bulatan pada lajur ketiga. Beliau menyatakan lagi, situasi tersebut boleh diwakili dengan ayat matematik, “2 × 4 + 1 = 9”. Oleh itu, kesemuanya ada sembilan bulatan. Beliau juga menyatakan hasilnya 9 didapati dengan mendarabkan dua dengan empat untuk mendapat lapan, kemudian menambahkan lapan dengan satu untuk mendapat 9.

Perwakilan Kong tentang gambar sembilan bulatan melibatkan gabungan operasi darab dan tambah, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (10) Gabungan Operasi Darab dan Tambah.

Hasil kajian ini juga didapati responden mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurungan dalam menulis ayat matematik. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 2.8(John) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan angka yang melibatkan gabungan operasi darab dan tambah dalam menulis ayat matematik, dan urutan tiga bahagian dalam perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret yang melibatkan gabungan operasi darab dan tambah juga.

Protokol 2.8 (John): Perwakilan Melibatkan Gambar 12 Buah Bekas

P: Apa lagi yang dapat cikgu tafsirkan dari gambar ini?
R: Dua darab tiga tambah dua darab tiga. (Cikgu menulis ayat matematik, “(2 × 3 + (2 × 3)”).

$$(2\times3)+(2\times3)$$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: “2” pertama mewakili dua lajur bekas berlorek, “× 3” mewakili setiap lajur ada tiga buah bekas berlorek, manakala “2” kedua mewakili dua lajur bekas putih, dan “× 3” mewakili setiap lajur ada tiga buah bekas putih.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan gambar itu begitu?
R: Saya nampak ada dua lajur bekas berlorek dan dua lajur bekas putih. Oleh itu, untuk mencari jumlahnya, saya menambahkan kedua-dua lajur itu.

Perwakilan John tentang gambar 12 bekas ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, “(2 × 3) + (2 × 3)”. Beliau menerangkan “2” pertama mewakili dua lajur bekas berlorek, “× 3” mewakili setiap lajur ada tiga buah bekas berlorek, manakala “2” kedua mewakili dua lajur bekas putih, dan “× 3” mewakili setiap lajur ada tiga buah bekas putih. Seterusnya, beliau menerangkan gambar tersebut ditafsirkan sedemikian kerana beliau nampak ada dua lajur bekas berlorek dan dua lajur bekas putih. Oleh itu, untuk mencari jumlahnya, beliau menambahkan kedua-dua lajur itu.

Perwakilan John tentang gambar 12 bekas bertumpu pada gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurung, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (11) Gabungan Operasi Darab dan Tambah Melibatakan Tanda Kurung.

Selain itu, hasil kajian ini didapati semua responden juga cenderung mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan kategori simbolik yang menggunakan perkataan melibatkan kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan untuk menulis cerita. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 2.10(Tong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan perkataan yang melibatkan kaedah pengukuran dalam menulis ayat matematik, dan dijelaskan dalam satu urutan mempunyai tiga bahagian.

Protokol 2.10 (Tong): Perwakilan Melibatkan Gambar 15 Jalur

P: Apakah perwakilan cikgu tentang gambar ini?
R: 15 jalur diasingkan secara tiga-tiga, Oleh itu terdapat lima kumpulan tiga jalur.
P: Boleh cikgu terangkan?
R: Gambar rajah itu menunjukkan gambar 15 jalur dan selepas setiap tiga jalur ada satu garis putus-putus yang menegak, Oleh itu didapati ada lima kumpulan tiga jalur.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan gambar itu begitu?
R: Garis putus-putus menegak itu diadakan selepas setiap tiga jalur berturut-turut pada 15 jalur tersebut mewakili mengasingkan jalur itu kepada tiga dalam satu kumpulan, Oleh itu kelihatan ada lima kumpulan

tiga jalur.

Perwakilan Tong tentang gambar 15 jalur ditunjukkan dengan perkataan, iaitu menyatakan 15 jalur diasingkan secara tiga-tiga, Oleh itu terdapat 5 kumpulan 3 jalur. Beliau menerangkan gambar tersebut begitu kerana garis putus-putus yang menegak itu diadakan selepas setiap tiga jalur yang berturut-turut pada 15 jalur tersebut mewakili pengasingan jalur itu kepada tiga dalam satu kumpulan, Oleh itu kelihatan ada lima kumpulan tiga jalur.

Perwakilan Tong tentang gambar 15 jalur melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (1) Kaedah Pengukuran.

Akhirnya itu, hasil kajian ini didapati responden juga mewakili gambar rajah selanjar dan diskret dengan kategori simbolik yang menggunakan perkataan melibatkan kaedah pemetakan untuk menulis cerita. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 2.12(Tong) menunjukkan cara perwakilan yang melibatkan kategori simbolik dengan menggunakan perkataan yang melibatkan kaedah pemetakan dalam menulis ayat matematik, dan urutan tiga bahagian dalam perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret yang melibatkan kaedah pemetakan juga.

Protokol 2.12(Tong): Perwakilan Melibatkan Garis Nombor Yang Dilabelkan Angka 0 Hingga 8

P: Apa yang dapat cikgu wakilkan dari garis nombor ini?
R: Lapan objek diagihkan kepada dua kumpulan secara sama banyak, dengan setiap kumpulan ada tiga objek, dan bakinya dua.
P: Boleh cikgu terangkan?
R: Garis nombor itu dilabelkan dari angka 0 hingga angka 8 dengan diliputi oleh satu anak panah melengkung yang membentuk 8 selang mewakili lapan objek dan terdapat dua anak panah melengkung, dengan setiap anak panah melengkung meliputi tiga selang, mewakili setiap kumpulan ada tiga objek. Tinggal dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung, iaitu dari 2 ke 0,

mewakili bakinya, iaitu dua objek yang tidak cukup untuk membentuk kumpulan tiga objek.

P: Mengapakah cikgu mentafsirkan garis nombor itu begitu?

R: Saya nampak garis nombor itu dilabelkan dari angka 0 hingga angka 8 dengan diliputi oleh satu anak panah melengkung yang boleh mewakili 8 objek dan dua anak panah melengkung itu mengasingkan 8 objek itu kepada dua kumpulan dengan bilangan objek yang sama, iaitu setiap anak panah melengkung meliputi tiga selang, ini boleh mewakili setiap kumpulan ada tiga objek. Tinggal dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung mewakili bakinya yang tidak dapat membentuk kumpulan tiga objek. Oleh demikian, gambar rajah ini mewakili 8 objek diagihkan kepada dua kumpulan, dengan setiap kumpulan ada tiga objek dan bakinya dua objek.

Perwakilan Tong tentang garis nombor yang dilabelkan angka 0 hingga 8 ditunjukkan dengan perkataan, iaitu menyatakan situasi garis nombor tersebut membabitkan lapan objek diagihkan kepada dua kumpulan secara sama banyak, dengan setiap kumpulan ada tiga objek, dan bakinya dua. Tong menerangkan bahawa garis nombor itu dilabelkan dari angka 0 hingga angka 8 dengan diliputi oleh satu anak panah melengkung yang membentuk 8 selang mewakili lapan objek dan terdapat dua anak panah melengkung, dengan setiap anak panah melengkung meliputi tiga selang, mewakili setiap kumpulan ada tiga objek. Tinggal dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung, iaitu dari 2 ke 0, mewakili bakinya, iaitu dua objek yang tidak cukup untuk membentuk kumpulan tiga objek. Beliau menerangkan lagi, garis nombor itu diwakilkan begitu kerana beliau nampak garis nombor itu dilabelkan dari angka 0 hingga angka 8 dengan diliputi oleh satu anak panah melengkung yang boleh mewakili 8 objek dan dua anak panah melengkung itu mengasingkan 8 objek itu kepada dua kumpulan dengan bilangan objek yang sama, iaitu setiap anak panah melengkung meliputi tiga selang, ini boleh mewakili setiap kumpulan ada tiga objek. Tinggal dua selang tidak diliputi oleh anak panah melengkung mewakili bakinya yang tidak dapat membentuk kumpulan tiga objek. Beliau mengatakan, Oleh itu, garis nombor itu mewakili 8 objek diagihkan kepada dua kumpulan, dengan setiap kumpulan ada tiga objek dan bakinya dua objek.

Perwakilan Tong tentang garis nombor yang dilabelkan angka 0 hingga 8 melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.5 (2) Kaedah Pemetakan.

Pada keseluruhannya, pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat melibatkan perwakilan membabitkan ayat matematik, gambar selanjar dan diskret hanya menggunakan kategori simbolik sahaja dan kesemua guru cenderung menggunakan kategori ini. Kategori ini melibatkan angka dan perkataan dalam pelbagai cara perwakilan. Perwakilan yang dijalankan oleh responden melibatkan sebelas kaedah, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, operasi darab, operasi tambah berulang, operasi tambah berulang dan operasi tambah, operasi tolak melibatkan kuantiti yang kurang, operasi tolak, tolak berulang, gabungan operasi tolak dan bahagi, gabungan darab dan tambah, gabungan darab dan tambah melibatkan tanda kurung.

Makna

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat melibatkan makna yang dimiliki oleh guru melibatkan makna bahagi, makna nombor bahagi, makna hasil bahagi, dan makna nombor yang dibahagi, ditafsirkan melalui tiga situasi seperti di bawah:

(1) Situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib,

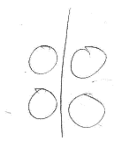
(2) Situasi nombor 6 dan 13 masuk ke dalam silinder ajaib berfungsi "÷3", dan

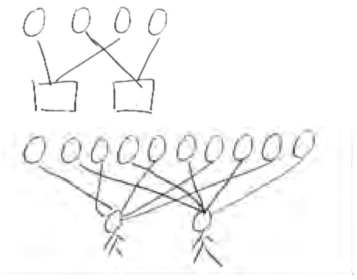
(3) Situasi nombor 8 masuk ke dalam silinder ajaib berfungsi "÷3".

Makna bahagi. Makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditafsirkan melalui situasi (1), iaitu situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib dirumuskan kepada satu kategori sahaja, iaitu pengetahuan prosedural. Kategori ini dibahagikan kepada empat bahagian, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, songsangan darab, dan tolak berulang.

Analisis makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.6. Jadual ini menunjukkan kategori makna bahagi, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang memiliki makna bahagi tersebut. Seterusnya, makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden ditunjukkan dalam Jadual 4.7. Aktiviti yang dijalankan oleh responden dibahagikan kepada tiga bahagian, iaitu kaedah pemetakan, kaedah pengukuran, dan ayat matematik. Ayat matematik pula dibahagikan kepada ayat matematik tambah, ayat matematik bahagi, dan ayat matematik darab.

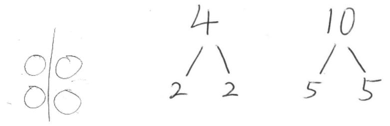
Jadual 4.6
Makna bahagi yang dimiliki oleh responden.

Kategori	**Perkara**	**Huraian**	**Responden**
Prosedural	(a) Kaedah pengukuran 	• Nombor masuk mewakili jumlah objek, dan nombor keluar mewakili bilangan kumpulan. Ini menunjukkan silinder mewakili sesuatu mengagihkan sejumlah objek secara kumpulan, dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama.	Tong, John, Shidah, Lim Chong

(b) Kaedah pemetakan 	• Nombor masuk mewakili jumlah objek, dan nombor keluar mewakili kuantiti objek dalam satu kumpulan. Ini menunjukkan silinder mewakili sesuatu mengagihkan sejumlah objek ke dalam bilangan kumpulan tertentu dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga habis.	Chong
(c) Songsangan darab $4 \div 2 = 2$ $10 \div 2 = 5$	• Nombor masuk mewakili suatu nombor bulat dan nombor keluar mewakili faktor bagi nombor bulat. Ini menunjukkan silinder mewakili suatu nombor darab dan nombor keluar mewakili nombor didarab untuk mendapat hasil darab, iaitu nombor bulat yang masuk.	Tong, Kong
(d) Operasi tolak berulang $10 - 5 - 5 = 0$	• Nombor masuk mewakili suatu nombor bulat dan nombor keluar mewakili kuantiti nombor kecil yang sama terdapat dalam nombor bulat tersebut. Ini menunjukkan silinder mewakili sesuatu mengasingkan nombor bulat mengikut nombor kecil satu demi satu sehingga habis.	Lim

Jadual 4.7
Tiga bahagian dalam pentafsiran makna bahagi bagi responden.

Situasi yang diasimilasikan	**Aktiviti yang dijalankan**	**Hasil yang diharapkan**
Nombor input diasimilasikan sebagai nombor gandaan bagi nombor output, dan nombor output diasimilasikan sebagai suatu faktor pendaraban.	**(1) Songsangan Darab** 1. Menentukan nilai input dan output. 2. Mencari perkaitan antara input dan output, dengan cuba menentukan sama ada input adalah gandaan bagi output. 3. Menentukan faktor pendaraban dengan menghafal sifir bagi output untuk mendapat hasil darab yang sama dengan input. Contohnya: $4 \div 2 = 2$ $10 \div 2 = 5$	Faktor pendaraban, *b* apabila darab dengan nombor output yang mewakili faktor yang satu lagi, *c* untuk mendapat nombor input yang mewakili hasil darab, *a*. Contohnya, $a \div b = c$ $b \times c = a$

Nombor input diasimilasikan sebagai jumlah objek untuk diagihkan, dan nombor output diasimilasikan sebagai saiz kumpulan.	**(2) Kaedah pengukuran** 1. Menentu nilai input dan output. 2. Mengasingkan nombor atau sejumlah objek yang mewakili input secara kumpulan dengan kuantiti yang sama dengan nombor output atau kepada beberapa nombor kecil yang sama dengan nombor output. 3. Menentukan bilangan nombor atau kumpulan objek dengan saiznya yang sama dengan output. Contohnya:  	Bilangan kumpulan dengan saiz nombor output, didapati dengan mengagihkan sejumlah objek/ nombor output, *a* secara kumpulan dengan saiz kumpulan, *c* yang mewakili nombor output untuk mendapat bilangan kumpulan saiz sama, *b*. Contohnya $a \div b = c$
Nombor input diasimilasikan sebagai jumlah objek untuk diagihkan, dan nombor output diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan.	**(3) Kaedah Pemetakan** 1. Mewakilkan nombor input dengan sejumlah objek. 2. Mewakilkan nombor output dengan bilangan kumpulan. 3. Mengagihkan objek ke dalam bilangan kumpulan yang mengikut output dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga habis. 4. Mengira kuantiti objek dalam satu kumpulan. Contohnya: 	Kuantiti objek dalam setiap kumpulan, didapati dengan mengagihkan sejumlah objek/ nombor output, *a* kepada bilangan kumpulan tertentu, *b* yang mewakili nombor output untuk mendapat kuantiti objek dalam setiap kumpulan, c. Contohnya $a \div b = c$
Nombor input diasimilasikan sebagai jumlah objek/nombor yang ditolak dan nombor output diasimilasikan sebagai kuantiti objek yang dikeluarkan setiap kali.	**(4) Operasi Tolak Berulang** 1. Mewakilkan nombor input dengan jumlah objek/nombor yang ditolak 2. Mewakilkan nombor output dengan kuantiti objek yang dikeluarkan setiap kali/nombor tolak. 3. Nombor yang ditolak ditolakkan dengan nombor tolak berulang kali sehingga habis, atau jumlah objek dikeluarkan dengan kuantiti sama dengan output berulang kali sehingga habis. **4.** Mengira bilangan kali nombor tolak/kuantiti objekyang dikeluarkan setiap kali. $10 - 5 - 5 = 0$	Bilangan kali nombor tolak, atau bilangan kali kuantiti objek yang sama dengan output dikeluarkan, didapati dengan mengasingkan/ mengeluarkan sejumlah objek, a dengan kuantiti yang sama, b mewakili

	nombor output sehingga habis diagih, akan mendapat bilangan kali nombor tolak, atau bilangan kali kuantiti objek yang sama dikeluarkan, c. Contohnya $a - b - b = 0$ (Bilangan kali b ditolak = c)

Daripada hasil kajian ini, didapati dua daripada enam orang guru matematik Tahun Enam mentafsir makna bahagi dari situasi (1) yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan songsangan darab. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 3.1(Kong) menunjukkan makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan songsangan darab, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna bahagi melibatkan songsangan.

Protokol 3.1 (Kong): Fungsi Silinder Ajaib

P: (Cikgu menulis “4 ÷ 2 = 2”dan “10 ÷ 2 = 5”). Empat bahagi dua sama dengan dua, dan nombor 10 bahagi dua sama dengan lima.

$$4 \div 2 = 2$$

$$10 \div 2 = 5$$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: $\boxed{\div\ 2}$ mewakili fungsi silinder ajaib, apabila nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib, ia akan membahagikan empat dengan dua, dengan itu 2 akan dikeluarkan, manakala apabila nombor 10 dimasukkan ke dalam silinder ajaib, ia akan membahagikan 10 dengan dua, dengan itu lima akan dikeluarkan.

P: “4 $\boxed{\div\ 2}$ = 2”dan “10 $\boxed{\div\ 2}$ = 5” boleh ditulis dengan songsangan darab, 2 × 2 = 4, dan 5 × 2 =10, dengan itu, jelas dilihat silinder ajaib itu mewakili operasi bahagi dua.

P: Berdasarkan situasi di atas, apakah makna bahagi ?

R: Songsangan darab.

P: Mengapakah cikgu memberi makna bahagi begitu?

R: Nombor yang masuk itu boleh didapati dengan mencari gandaan bagi nombor yang dikeluarkan.

Berdasarkan situasi nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 keluar dari silinder ajaib, Kong mentafsirkan pembahagian nombor bulat sebagai mengagihkan suatu nombor kepada beberapa kumpulan dengan nombor yang sama dan lebih kecil daripada nombor asal. Beliau menjelaskan tafsirannya begitu kerana nombor yang dikeluarkan adalah lebih kecil daripada nombor yang dimasukkan. Ini menunjukkan nombor yang masuk itu telah dipecahkan kepada beberapa nombor dengan nilainya lebih kecil daripada nombor yang dimasukkan, contohnya nombor 4 dimasukkan dan nombor 2 dikeluarkan, nombor 2 adalah lebih kecil daripada nombor 4, dan nombor 4 boleh dipecahkan kepada dua 2, iaitu dua nilai yang sama dan lebih kecil daripada nombor 4.

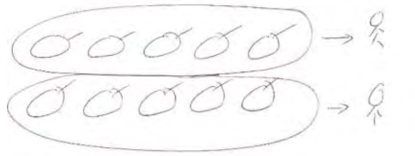
Makna bahagi yang ditafsirkan oleh Kong berdasarkan situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, serta situasi nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib, melibatkan songsangan darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.7(1) Songsangan Darab.

Hasil kajian ini juga mendapati lima daripada enam orang guru matematik Tahun Enam mentafsir makna bahagi berdasarkan situasi (1) dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pengukuran. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 3.3(Lim) menunjukkan makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna bahagi.

Protokol 3.3 (Lim): Fungsi Silinder Ajaib

P: Ada cara lain silinder ajaib itu buat pada nombor 10 yang dimasukkan itu supaya mengeluarkan nombor 5 ?

R: Ada. (Cikgu melukis 10 biji mangga dan dua orang. Kemudian, membulatkan mangga tersebut secara lima-lima dan melukis anak panah dari mangga ke orang dengan seorang memiliki satu bulatan yang ada lima biji mangga.



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Ok. 10 biji mangga mewakili nombor 10, mangga tersebut dibulatkan secara lima-lima.
P: Mengapakah cikgu tafsirkannya begitu?
R: Situasi nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib, boleh diterjemahkan sebagai 10 biji mangga dimasukkan ke dalam silinder ajaib yang mewakili operasi bahagi dua, kemudian silinder ajaib itu mengagihkan mangga tersebut secara lima-lima, dengan itu terdapat dua kumpulan lima biji mangga. Oleh itu, nombor 5 mewakili lima biji mangga dalam satu kumpulan.
P: Berdasarkan situasi di atas, apakah makna bahagi?
R: Menolakkan sebilangan objek daripada sejumlah objek dengan bilangan yang sama sehingga objek itu habis ditolakkan.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan pembahagian nombor bulat begitu?
R: Situasi nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib, boleh diterjemahkan dengan silinder ajaib yang mewakili operasi bahagi dua mengagihkan 10 biji mangga ke dalam dua buah bekas dengan bilangan yang sama, iaitu setiap bekas ada lima biji mangga mewakili nombor 5 keluar dari silinder.

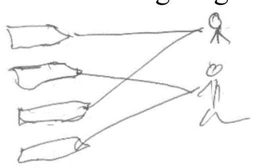
Lim mewakilkan situasi nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib dengan ayat matematik, “10 ÷ 2 = 5”. Beliau menerangkan 10” mewakili 10 biji mangga, “÷ 2” mewakili mangga itu diagihkan ke dalam dua buah bekas dengan bilangan yang sama dan “5” mewakili setiap bekas ada lima biji mangga. Seterusnya, beliau menerangkan ayat matematik ditulis sebegitu kerana nombor 10 yang dimasukkan itu mewakili 10 biji mangga, silinder ajaib itu dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua, maka ia mengagihkan 10 biji mangga dalam dua buah bekas dengan bilangan yang sama. Oleh itu, setiap bekas ada lima biji mangga.

Makna bahagi yang ditafsirkan oleh Lim berdasarkan situasi nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.7 (2) Kaedah Pengukuran.

Selain itu, daripada hasil kajian didapati hanya seorang responden mewakilkan makna bahagi berdasarkan situasi (1) dikelaskan dalam kategori prosedural melibatkan kaedah pemetakan. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 3.1(Kong) menunjukkan makna bahagi yang dimiliki oleh Kong yang dikelaskan dalam kategori prosedural melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna bahagi.

Protokol 3.1(Kong): Fungsi Silinder Ajaib

R: Ada. Mengasingkan empat batang pensel kepada dua orang dengan bilangan yang sama. (Cikgu melukis empat batang pensel, selepas itu melukis dua orang di sebelah kanannya, seterusnya melukis garis lurus dari pensel ke kedua-dua orang satu demi satu secara bergilir-gilir).



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Boleh. Empat batang pensel mewakili nombor 4 dan garis lurus menyambung pensel ke kedua-dua orang mewakili bahagi, dan dua orang itu mewakili nombor 2 yang dikeluarkan.
P: Mengapakah cikgu tafsirkan begitu?
R: Situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar dari silinder ajaib boleh diterjemahkan dengan 4 batang pensel mewakili nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib, kemudian silinder ajaib dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua mengagihkan empat batang pensel kepada dua orang dengan satu demi satu secara bergilir-gilir, dengan itu, setiap orang mendapat dua batang pensel. Oleh demikian, nombor 2 yang mewakili setiap orang ada dua batang pensel keluar dari silinder ajaib.
P: Berdasarkan situasi di atas, apakah makna bahagi?
R: Mengasingkan sejumlah objek kepada sebilangan orang dengan bilangan yang sama.
P: Mengapakah cikgu mentafsirkan pembahagian nombor bulat begitu?
R: Situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar dari silinder ajaib boleh diterjemahkan dengan silinder ajaib dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua mengagihkan empat batang pensel kepada dua orang dengan bilangan sama, dengan itu setiap orang mendapat dua batang pensel.

Kong mewakilkan situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar dari silinder ajaib dengan ayat matematik, “4 ÷ 2 = 2”. Beliau menerangkan ayat matematik itu ialah empat bahagi dua sama dengan dua, yang mana 4 mewakili 4 batang pensel, simbol “÷” mewakili bahagi, manakala 2 yang pertama mewakili 2 orang, dan 2 yang kedua mewakili 2 batang pensel masing-masing diagihkan kepada dua orang . Beliau menerangkan lagi, ayat matematik ditulis begitu kerana silinder ajaib dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua, maka nombor yang masuk, iaitu nombor 4 mewakili kuantiti yang perlu diagihkan dan nombor yang akan dikeluarkan, iaitu nombor 2 mewakili hasil pengagihan. Menurut beliau, nombor yang masuk ke dalam silinder ajaib, iaitu nombor 4 ialah kuantiti yang perlu diagihkan dan nombor yang keluar dari silinder ajaib, iaitu nombor 2 ialah hasil pengagihan. Beliau menerangkan nombor yang keluar, iaitu nombor 2 lebih kecil daripada nombor yang masuk, iaitu nombor 4, itu terjadi kerana kuantiti objek yang dimasukkan itu telah diagihkan kepada dua bahagian, dengan itu setiap bahagian ada dua objek, maka dua objek dalam dua bahagian masing-masing itu adalah hasil pengagihan, yang mana mewakili nombor 2 dan dikeluarkan dari silinder ajaib.

Makna bahagi yang ditafsirkan oleh Kong terhadap situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, melibatkan kaedah pemetakan, dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.7 (3) Kaedah Pemetakan.

Di samping itu, daripada hasil kajian ini didapati seorang responden mewakilkan makna bahagi daripada situasi (1) dikelaskan dalam kategori prosedural melibatkan operasi tolak berulang. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 3.1(Lim) menunjukkan makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tolak berulang, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna bahagi melibatkan operasi tolak berulang.

Protokol 3.1 (Lim): Fungsi Silinder Ajaib

P: Boleh cikgu mewakilkan situasi ini dengan ayat matematik?
R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik, "10 – 5 – 5 = 0").

$$10 - 5 - 5 = 0$$

P: Cuba cikgu terangkan apa yang ditulis ini.
R: Baik. “10” mewakili 10 biji mangga, “ – 5 ” mewakili mangga itu diagihkan kepada dua orang dengan setiap orang mempunyai lima biji mangga.
P: Mengapakah cikgu menuliskan ayat matematik begitu?
R: Nombor 10 yang dimasukkan itu mewakili 10 biji mangga, silinder ajaib itu dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua, maka ia mengagihkan 10 biji mangga kepada dua orang dengan bilangan yang sama. Oleh itu, dia boleh agih dua kali lima biji mangga. Mengagih sekali dengan lima biji mangga dan ia mengagih dua kali, iaitu menolak lima biji mangga sebanyak dua kali dan ini boleh diwakili dengan menolak lima sebanyak dua kali.

Tafsiran Lim dengan nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar iaitu tolak berulang. Beliau menunjukkan tafsirannya dengan menulis ayat matematik, “10 – 5 – 5 = 0”. Beliau menerangkan “10” mewakili 10 biji rambutan, “ – 5 ” mewakili rambutan itu diagihkan kepada dua orang dengan setiap orang mempunyai lima biji. Beliau menerangkan ayat matematik ditulis begitu kerana nombor 10 yang dimasukkan itu mewakili 10 biji rambutan, silinder ajaib itu dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua, maka ia mengagihkan 10 biji rambutan kepada dua orang dengan bilangan yang sama. Oleh itu, dia boleh agih dua kali lima biji rambutan. 10 biji rambutan diagih dua kali, iaitu menolak lima biji rambutan sebanyak dua kali dan ini boleh diwakili dengan menolak lima sebanyak dua kali. Berdasarkan situasi di atas, beliau mentafsirkan pembahagian nombor bulat sebagai menolak kuantiti objek yang sama daripada jumlah objek sehingga sifar. Beliau menerangkan lagi, pembahagian nombor bulat ditafsirkan begitu kerana situasi nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib, boleh diterjemahkan dengan silinder ajaib yang mewakili operasi bahagi dua mengagihkan 10 biji rambutan ke dalam dua buah bekas dengan bilangan yang sama, iaitu setiap bekas ada lima biji rambutan mewakili nombor 5 keluar dari silinder.

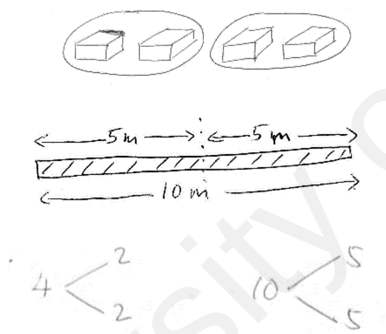
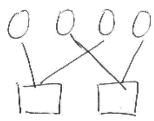
Makna bahagi yang ditafsirkan oleh Lim terhadap situasi seperti di atas melibatkan operasi tolak berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.7 (4) Operasi Tolak Berulang.

Pada keseluruhannya, makna bahagi yang dimiliki oleh guru Matematik Tahun Enam hanya dapat dikelaskan kepada kategori prosedural yang melibatkan empat kaedah, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, songsangan darab, dan operasi tolak berulang. Songsangan darab bermaksud menentukan bilangan faktor pendaraban untuk mendapat hasil darab yang sama dengan input. Kaedah pengukuran bermaksud mengasingkan nombor atau sejumlah objek yang mewakili input kepada beberapa nombor kecil yang sama atau kumpulan objek yang sama bilangan dengan nombor output. Kaedah pemetakan bermaksud mengagihkan objek ke dalam bilangan kumpulan mengikut output dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama. Operasi tolak berulang bermaksud sesuatu nombor atau sejumlah objek ditolakkan dengan nombor tolak atau kuantiti objek yang sama berulang kali sehingga habis.

Makna Nombor Bahagi. Makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditafsirkan melalui situasi (1), iaitu situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib dirumuskan kepada satu kategori sahaja, iaitu pengetahuan prosedural. Kategori ini dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu gambar rajah dan angka. Bahagian gambar rajah pula dibahagikan kepada kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan, manakala bahagian angka dibahagikan iaitu kaedah pengukuran, songsangan darab, dan tolak berulang.

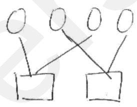
Analisis makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.8. Jadual ini menunjukkan kategori makna nombor bahagi, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang memiliki makna nombor bahagi tersebut. Seterusnya, pentafsiran makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden ditunjukkan dalam Jadual 4.9. Aktiviti yang dijalankan oleh responden dibahagikan kepada empat bahagian, iaitu kaedah pemetakan, kaedah pengukuran, dan operasi tolak berulang, dan songsangan darab.

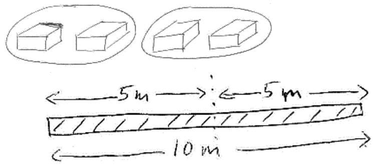
Jadual 4.8
Makna nombor bahagi yang dimiliki oleh responden.

Kategori	Perkara	Huraian	Responden
Prosedural	(a) Kaedah pengukuran 	• Nombor masuk mewakili jumlah objek/nombor bulat, dan nombor keluar mewakili bilangan kumpulan dengan kuantiti objek yang sama. Ini menunjukkan silinder mewakili sesuatu mengagihkan sejumlah objek/nombor secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan objek. nombor kecil yang sama.	Tong, Chong, Lim, John, Shidah
	(b) Kaedah pemetakan 	• Nombor masuk mewakili jumlah objek, dan nombor keluar mewakili kuantiti objek dalam satu kumpulan. Ini menunjukkan silinder mewakili sesuatu mengagihkan sejumlah objek kepada bilangan kumpulan tertentu dengan satu demi satu mengikut giliran sehingga habis, agar setiap kumpulan mempunyai kuantiti yang sama.	Kong, Tong, Chong, Lim, John,

(c) Songsangan Darab $4 \div 2 = 2 \quad 10 \div 2 = 5$	• Nombor masuk mewakili hasil darab dan nombor keluar mewakili nombor yang didarab. Ini menunjukkan silinder mewakili sesuatu operasi mengoperasikan nombor bulat untuk mendapat hasilnya seperti nombor keluar.	Kong, Shidah
(d) Operasi Tolak berulang $4 - 2 - 2 = 0$	• Nombor masuk mewakili nombor yang ditolak dan nombor keluar mewakili nombor tolak/penolak. Ini menunjukkan silinder mewakili sesuatu operasi untuk mengasingkan nombor bulat mengikut nombor keluar secara berturut-turut sehingga sifar.	Kong,

Jadual 4.9
Tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi yang dimiliki oleh responden.

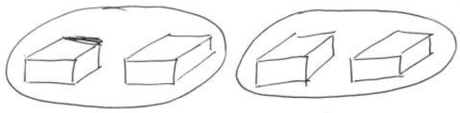
Situasi yang diasimilasikan	**Aktiviti yang dijalankan**	**Hasil yang diharapkan**
Nombor input diasimilasikan sebagai jumlah objek untuk diagihkan, dan nombor output diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan agihan.	**(1) Kaedah Pemetakan** 1. Mewakilkan nombor input dengan sejumlah objek. 2. Mewakilkan nombor output dengan bilangan kumpulan. 3. Mengagihkan objek atau objek yang telah dilabelkan angka ke dalam bilangan kumpulan yang ditetapkan atau kumpulan yang telah dilabelkan dengan angka yang sama dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga habis. 4. Mengira objek dalam setiap kumpulan. Contohnya: 	Kuantiti objek dalam setiap kumpulan, didapati dengan mengagihkan sejumlah objek/ nombor output, *a* kepada bilangan kumpulan tertentu, *b* yang mewakili nombor output untuk mendapat kuantiti objek dalam setiap kumpulan, c. Contohnya $a \div b = c$
Nombor input diasimilasikan sebagai jumlah objek untuk diagihkan, dan nombor output diasimilasikan sebagai saiz kumpulan agihan.	**(2) Kaedah Pengukuran** 1. Mewakilkan nombor input dengan sejumlah objek diskret atau satu objek selanjar. 2. Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan atau kuantiti bahagian dalam satu objek berdasarkan nombor output. 3. Mengagihkan objek secara kumpulan atau mengasingkan objek secara bahagian dengan setiap kumpulan atau bahagian mempunyai kuantiti yang sama berdasarkan nombor output.	Bilangan kumpulan dengan saiz nombor output, didapati dengan mengagihkan sejumlah objek/ nombor output, *a*

	4. Mengira bilangan kumpulan atau bahagian yang didapati. Contohnya:  	secara kumpulan dengan saiz kumpulan, *c* yang mewakili nombor output untuk mendapat bilangan kumpulan saiz sama, *b*. Contohnya $a \div b = c$
Nombor input diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, dan nombor output diasimilasikan sebagai nombor tolak.	**(3) Operasi Tolak Berulang** 1. Menentukan nombor input dan output. 2. Mewakilkan nombor input sebagai nombor yang ditolak dan nombor output sebagai nombor tolak. 3. Menolak nombor output daripada nombor input beberapa kali sehingga sifar. 4. Mengira bilangan kali nombor input ditolakkan dengan nombor output. Contohnya: $4-2-2=0$	Bilangan kali nombor tolak/ kuantiti objek yang sama dengan output dikeluarkan, didapati dengan mengeluarkan sejumlah objek, *a* dengan kuantiti yang sama, *b* mewakili nombor output sehingga habis, akan mendapat bilangan kali nombor tolak, /kuantiti objek yang sama dikeluarkan, c. Contohnya $a - b - b = 0$ (Bilangan kali *b* ditolak = *c*)
Nombor input diasimilasikan sebagai gandaan bagi output, dan nombor output sebagai faktor bagi nombor input.	**(4) Songsangan Darab** 1. Menentukan input dan output. 2. Mencari perkaitan antara input dan output, dengan cuba menentukan sama ada input adalah gandaan bagi output. 3. Menentukan bilangan gandaan input kepada output dengan menghafal sifir bagi output agar mendapat hasil darab sama dengan input. Contohnya: $4 \div 2 = 2$	Faktor pendaraban, *b* apabila darab dengan faktor yang satu lagi, *c* nombor output yang mewakili untuk mendapat nombor input mewakili hasil darab, *a*. Contohnya, $a \div b = c$ $b \times c = a$

Dari hasil kajian ini, didapati lima daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor bahagi dari situasi (1) dalam kategori prosedural melibatkan kaedah pengukuran. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 3.2(Tong) menunjukkan makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 3.2 (Tong): Situasi Melibatkan Nombor 2 Dan 4

R: Ada. Silinder ajaib sebagai suatu yang mengasingkan empat kotak secara dua-dua. (Cikgu bercakap sambil melukis gambar empat buah kotak, selepas itu melukis dua bulatan dengan setiap bulatan mengelilingi dua buah kotak).



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Boleh. Empat buah kotak mewakili nombor 4 dan dua bulatan dengan setiap bulatan ada dua kotak mewakili nombor 2.
P: Mengapakah cikgu taksirkan begitu?
R: Dalam 4 ada dua 2, maka nombor 4 boleh dipisahkan kepada dua 2, ini bermaksud ada dua kumpulan 2. Ini seperti empat kotak telah dikumpulkan secara dua-dua, iaitu setiap dua kotak dibungkus dalam satu bungkusan , maka keluarlah nombor 2 yang mewakili dua bungkusan dengan setiap bungkusan ada dua kotak.
P: Berdasarkan situasi di atas, apakah makna tentang pembahagian nombor bulat?
R: Mengasingkan sejumlah objek secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan objek yang sama.
P: Mengapakah cikgu mentaksirkan pembahagian nombor bulat begitu?
R: Saya nampak nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 dikeluarkan. Ini menunjukkan silinder ajaib sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua itu mengagihkan objek secara dua-dua, iaitu nombor 4 diasingkan secara dua-dua akan dapat dua kumpulan 2.

Tafsiran Tong tentang situasi nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib mengeluarkan nombor 2 diterjemahkan kepada silinder ajaib sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua mengasingkan kotak secara dua-dua. Beliau mentafsirkan situasi tersebut dengan melukis gambar rajah dua bulatan dengan setiap bulatan mengelilingi dua buah kotak. Beliau menerangkan bahawa empat buah kotak mewakili nombor 4 dan dua bulatan dengan setiap bulatan ada dua buah kotak mewakili nombor 2. Beliau menerangkan tafsirannya begitu kerana dalam empat ada dua 2, maka nombor 4 boleh dipisahkan kepada dua 2, ini bermaksud ada dua kumpulan 2, ini seperti empat kotak telah dikumpulkan secara dua-dua, iaitu setiap dua kotak dibungkus dalam satu bungkusan, maka nombor 2 yang dikeluarkan mewakili dua bungkusan dengan setiap bungkusan ada dua kotak. Berdasarkan situasi nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib mengeluarkan nombor 2, beliau mentafsirkan pembahagian nombor bulat sebagai suatu yang mengasingkan sejumlah objek secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan objek yang sama. Tong menerangkan tafsiran tentang beliau nampak nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib mengeluarkan nombor 2, mewakilkan silinder ajaib sebagai suatu yang mewakili operasi sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua itu mengagihkan objek secara dua-dua, iaitu nombor 4 diasingkan secara dua-dua akan mendapat dua kumpulan 2.

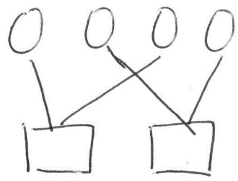
Makna nombor bahagi yang ditafsirkan oleh Tong terhadap situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.9 (2) Kaedah Pengukuran.

Dari hasil kajian ini juga didapati lima daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor bahagi dari situasi (1) dalam kategori prosedural melibatkan kaedah pemetakan. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 3.2(Tong) menunjukkan makna bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 3.2 (Tong): Situasi Melibatkan Nombor 2 Dan 4

P: Cikgu cakap fungsi silinder ajaib itu ialah bahagi dua, boleh cikgu jelaskan apa yang silinder ajaib itu buat pada nombor 4 yang dimasukkan itu supaya mengeluarkan nombor 2?

R: Silinder ajaib itu mengagihkan empat objek kepada dua kumpulan dengan bilangan yang sama banyak. (Cikgu bercakap sambil melukis empat bulatan, kemudian melukis dua segi empat di bawahnya, selepas itu melukis empat garis lurus dari bulatan ke kedua-dua segi empat itu satu demi satu secara bergilir-gilir).



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Boleh. Empat bulatan mewakili nombor 4 dan dua segi empat mewakili nombor 2. Garis lurus menyambungkan bulatan ke segi empat satu demi satu secara bergilir-gilir itu mewakili objek itu diagihkan kepada dua kumpulan satu demi satu secara bergilir-gilir.
P: Mengapakah cikgu mewakilkan begitu?
R: Saya nampak nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 dikeluarkan. Dalam nombor 4 ada dua 2 mewakili empat objek diagihkan kepada dua kumpulan dengan setiap kumpulan ada dua objek. Dengan itu, nombor 2 yang dikeluarkan mewakili dua objek dalam setiap kumpulan.

Tafsiran yang diberikan oleh Tong tentang situasi nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib mengeluarkan nombor 2 ialah silinder ajaib sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua mengagihkan empat objek kepada dua kumpulan dengan setiap kumpulan ada dua objek. Beliau menterjemahkan situasi tersebut kepada gambar rajah empat bulatan yang disambungkan ke dua segi empat dengan empat garis lurus satu demi satu secara bergilir-gilir. Beliau menerangkan bahawa empat bulatan mewakili nombor 4 dan dua segi empat mewakili nombor 2, manakala garis lurus menyambungkan bulatan ke kedua-dua segi empat satu demi satu secara bergilir-gilir mewakili objek itu diagihkan kepada dua kumpulan satu demi satu secara bergilir-gilir. Tong menerangkan tafsiran tentang fungsi silinder ajaib begitu kerana nombor 4 dimasukkan ke dalam silinder ajaib mengeluarkan nombor 2 dikeluarkan. Beliau menyatakan dalam nombor 4 ada dua 2 mewakili empat objek diagihkan kepada dua kumpulan dengan setiap kumpulan ada dua objek, oleh itu, nombor 2 yang mewakili dua kumpulan dengan setiap kumpulan ada dua objek itu keluar.

Makna nombor bahagi yang ditafsirkan oleh Tong terhadap situasi tersebut di atas melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.9 (1) Kaedah Pemetakan.

Selain itu, daripada hasil kajian ini didapati seorang daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor bahagi daripada situasi (1) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tolak berulang. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 3.2(Lim) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tolak berulang, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan operasi tolak berulang.

Protokol 3.2 (Kong): Situasi Melibatkan Nombor 2 Dan 4

P: Boleh cikgu mewakilkan situasi ini dengan ayat matematik?
R: Boleh. (Cikgu menulis "4 – 2 – 2 = 0").

$4 - 2 - 2 = 0$

P: Cuba cikgu terangkan apa yang ditulis ini.
R: Baik. Ayat matematik ini mewakili empat ditolak dua sebanyak dua kali, iaitu kali pertama empat tolak dua bezanya dua, kemudian beza dua itu ditolakkan dengan dua lagi sama dengan sifar.
P: Mengapakah cikgu menuliskan ayat matematik begitu?
R: Nombor 4 yang dimasukkan itu mewakili empat biji epal, silinder ajaib itu dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua, maka ia membungkus empat biji epal itu secara dua-dua,dengan itu terdapat dua bungkusan dengan setiap bungkusan ada dua biji epal. Setiap kali perlu ada dua biji epal untuk dibungkuskan dalam satu bungkusan, maka empat biji epal itu ditolakkan dengan dua, kemudian bungkusan kedua juga perlu dua biji epal, iaitu perlu keluarkan dua biji epal lagi dari silinder ajaib, dengan itu epal yang tinggal itu perlu ditolak dua lagi, akhirnya tiada epal yang tinggal.

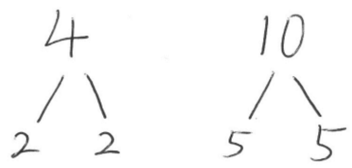
Kong mewakilkan situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar dari silinder ajaib dengan ayat matematik, "4 – 2 – 2 = 0". Beliau menerangkan ayat matematik itu mewakili empat ditolak dua kali 2, iaitu kali pertama empat tolak dua bezanya dua, kemudian beza dua itu ditolakkan dengan dua lagi akan mendapat sifar. Beliau menerangkan ayat matematik ditulis begitu kerana nombor 4 yang dimasukkan itu mewakili empat biji epal, silinder ajaib itu dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua, maka ia membungkus empat epal itu kepada dua bungkusan dengan setiap kali agihan perlu ada dua biji epal, iaitu setiap bungkusan perlu ada sebiji, maka empat biji epal itu ditolakkan dengan dua, kemudian agihan kali kedua juga perlu ada dua biji epal, iaitu perlu keluarkan dua biji epal lagi dari silinder ajaib, dengan itu epal yang tinggal itu perlu ditolak dua lagi, akhirnya tiada epal yang tinggal. Menurut beliau, operasi bahagi dua sama dengan operasi tolak berulang, iaitu tolak nombor dua sebanyak dua kali. Contohnya, "4÷2=2" boleh ditulis sebagai ,"4 – 2 – 2 = 0", yang mana 4 bahagi dua bermaksud 4 dibahagikan secara dua-dua dengan itu ada dua 2, manakala, 4 ditolak 2 sebanyak dua kali bermaksud 4 ada dua 2. Kedua-dua ayat matematik mewakili situasi yang sama, dengan itu mereka ada sama.

Makna nombor bahagi yang ditafsirkan oleh Kong berdasarkan situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, melibatkan operasi tolak berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.9 (3) Operasi Tolak Berulang.

Akhirnya, dari hasil kajian ini didapati dua daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor bahagi dari situasi (1) dalam kategori prosedural melibatkan songsangan darab. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 3.2(Tong) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan songsangan darab, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan songsangan darab.

Protokol 3.2 (Tong): Situasi Melibatkan Nombor 2 Dan 4

P: Boleh cikgu terangkan?
R: Ok. Contohnya nombor 4 dipisahkan kepada dua nombor yang sama nilai, iaitu dua 2, dan nombor 10 dipisahkan kepada dua 5. (Cikgu menulis nombor 4, kemudian menulis dua 2 di bawahnya, selepas itu melukis dua garisan lurus menyambungkannya; dan menulis nombor 10, kemudian menulis dua 5 di bawahnya, selepas itu melukis dua garisan lurus menyambungkannya).



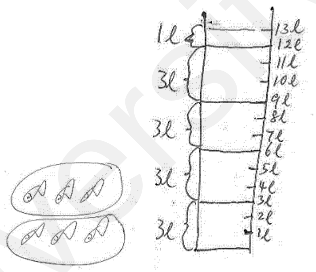
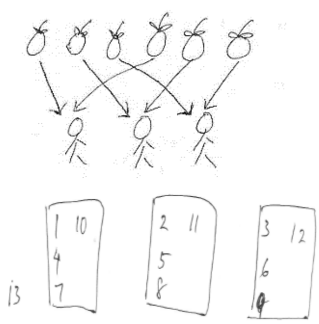
R: Saya guna menghafal sifir bagi nombor output, iaitu 2 dan 5, yang mana "2 × 2 =4" dan "2 × 5 =10" kerana fungsi silinder ajaib adalah bahagi dua, atau pun suatu nombor ada dua kali ganda..
P: Mengapakah cikgu memberi makna pembahagian nombor bulat begitu?
R: Saya nampak nombor yang keluar adalah setengah daripada nombor yang masuk. Ini menunjukkan nombor yang masuk itu telah dipisahkan kepada dua bahagian dengan nilai yang sama, iaitu dua nombor yang sama

Tong menyatakan nombor 4 ada dua 2 dan nombor 10 ada dua 5 dengan menghafal sifir bagi nombor output, iaitu 2 dan 5, yang mana "2 × 2 =4" dan "2 × 5 =10" kerana fungsi silinder ajaib sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi dua. Tong mentafsirkan pembahagian nombor bulat sebagai suatu yang memisahkan satu nombor besar kepada dua nombor kecil dengan nilai yang sama kerana beliau nampak nombor yang keluar adalah setengah daripada nombor yang dimasukkan, ini menunjukkan nombor yang masuk itu telah dipisahkan kepada dua bahagian dengan nilai yang sama.

Makna bahagi yang ditafsirkan oleh Tong terhadap situasi nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar, serta situasi nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder ajaib, melibatkan songsangan darab. Makna bahagi melibatkan songsangan darab yang dimiliki oleh Tong dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.9 (4) Songsangan Darab.

Makna Hasil Bahagi. Makna hasil bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditafsirkan melalui situasi (2), iaitu situasi nombor 6 dan 13 masuk ke dalam silinder ajaib berfungsi "÷ 3" hanya dapat dirumuskan kepada satu kategori sahaja, iaitu pengetahuan prosedural. Kategori ini dibahagikan kepada lima bahagian, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, songsangan darab, operasi tolak berulang, gabungan operasi tolak dan darab, operasi tambah berulang. Analisis makna hasil bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.10. Jadual ini menunjukkan kategori makna nombor bahagi, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang memiliki makna hasil bahagi tersebut.

Jadual 4.10
Makna hasil bahagi yang dimiliki oleh responden.

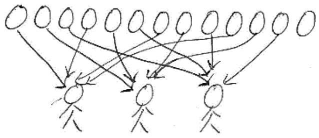
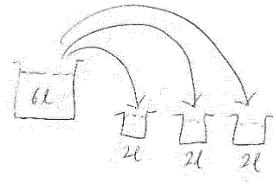
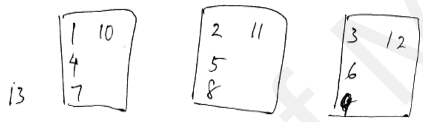
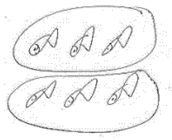
Kategori	Perkara	Huraian	Responden
Prosedural	(a) Kaedah pengukuran 	• Nombor masuk mewakili jumlah objek/angka, dan silinder berfungsi "÷ 3"mewakili operasi bahagi tiga. Oleh itu, jumlah objek tersebut diagihkan secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai tiga objek..	Kong, Tong, Chong, Shidah, Lim, John
	(b) Kaedah pemetakan 	• Nombor masuk mewakili jumlah objek/angka dan silinder berfungsi "÷ 3"mewakili operasi bahagi tiga. Oleh itu, jumlah angka/objek tersebut diagihkan secara satu demi satu kepada tiga kumpulan sehingga habis, dan kuantiti angka/objek yang tidak cukup tiga akan tinggal sebagai baki.	Tong, Kong, John, Chong, Lim, Shidah

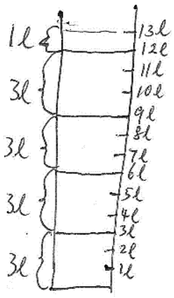
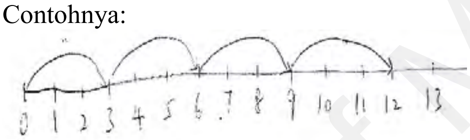
(c) Songsangan darab $6 \div 3 = 2$ $13 \div 3 = 4$ baki 1	• Nombor masuk mewakili suatu nombor bulat, dan silinder berfungsi "÷ 3"mewakili operasi bahagi tiga. Oleh itu nombor tiga didarab dengan suatu nombor untuk mendapat nombor masuk, atau hasil darab tersebut ditambah dengan suatu baki untuk mendapat nombor masuk.	Tong,
(d) Operasi tolak berulang $13 - 3 - 3 - 3 - 3 = 1$	• Nombor masuk mewakili suatu nombor bulat, dan silinder berfungsi "÷ 3"mewakili tolak 3 berulang. Oleh itu nombor bulat tersebut ditolakkan 3 berulang kali sehingga habis atau berbaki.	Chong, John
(e) Gabungan operasi darab dan tolak $13 - 4 \times 3 = 1$	• Nombor masuk mewakili suatu nombor bulat, dan silinder berfungsi "÷ 3"mewakili tolak 3 berulang. Oleh itu, nombor bulat tersebut ditolakkan dengan gandaan 3 yang terdekat dan lebih kecil daripada nombor bulat tersebut dan bezanya adalah nombor yang kurang daripada 3.	Chong
(f) Operasi tambah berulang $13 = 4 + 4 + 4 + 1$	• Nombor masuk mewakili suatu nombor bulat, dan silinder berfungsi "÷ 3"mewakili tiga nombor sama dan terbesar yang boleh dibentuk daripada nombor bulat tersebut. Oleh itu, nombor bulat tersebut disamakan dengan tiga nombor yang sama dan terbesar yang boleh dibentuk daripada nombor bulat tersebut, dan nombor yang lebih kecil daripada ketiga-tiga nombor tersebut..	Chong

Jadual 4.11

Tiga bahagian dalam pentafsiran makna hasil bahagi yang dimilki oleh responden.

Situasi yang diasimilasikan	**Aktiviti yang dijalankan**	**Hasil yang diharapkan**
Nombor input diasimilasikan sebagai jumlah objek/angka yang perlu diagihkan, dan "÷ 3" diasimilasikan sebagai mengagihkan	**(1) Kaedah Pemetakan** **a. Objek** 1. Mewakilkan nombor input dengan jumlah objek. 2. Menentukan bilangan kumpulan berdasarkan nombor bahagi. 3. Mengagihkan objek ke bilangan kumpulan yang ditetapkan dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga kuantiti objek tidak cukup diagihkan secara sama banyak.	Kuantiti objek/angka dalam setiap kumpulan, didapati dengan mengagihkan sejumlah objek mewakili

objek/angka ke dalam tiga kumpulan dengan kuantiti yang sama.	4. Mengira kuantiti objek dalam setiap kumpulan dan bilangan yang tinggal. Contohnya:   **b. Angka** 1. Mewakilkan nombor input dengan angka. 2. Menentukan bilangan kumpulan berdasarkan nombor bahagi. 3. Mengagihkan angka ke bilangan kumpulan yang ditentukan dengan satu demi satu mengikut urutan secara bergilir-gilir sehingga bilangan angka yang tidak cukup diagihkan secara sama banyak. 4. Mengira bilangan angka dalam setiap kumpulan dan bilangan yang tinggal. Contohnya: 	nombor output, *a* kepada bilangan kumpulan tertentu, *b* yang mewakili nombor bahagi dengan kuantiti yang sama untuk mendapat kuantiti objek dalam setiap kumpulan, c. Kuantiti yang tidak cukup diagihkan ke dalam kumpulan tinggal sebagai baki. Contohnya $a \div b = c$
Nombor input diasimilasikan sebagai jumlah objek diskret/ objek selanjar/ selang dalam garis nombor, dan "÷ 3" diasimilasikan sebagai mengagihkan objek diskret/ objek selanjar/ selang dalam garis nombor secara tiga-tiga. .	**(2) Kaedah Pengukuran** **a. Objek Diskret** 1. Mewakilkan nombor input dengan jumlah objek diskret . 2. Menentukan kuantiti agihan dalam setiap kumpulan berdasarkan nombor bahagi. 3. Mengagihkan objek secara berkumpulan dengan kuantiti yang sama. 4. Mengira bilangan kumpulan yang didapati dan kuantiti yang tinggal. Contohnya:   **b. Objek Selanjar** 1. Mewakilkan nombor input dengan objek selanjar . 2. Menentukan kuantiti agihan dalam setiap bahagian berdasarkan nombor bahagi. 3. Mengagihkan objek secara berkumpulan dengan kuantiti yang sama. 4. Mengira bilangan bahagian yang didapati dan kuantiti yang tinggal.	Bilangan kumpulan yang mempunyai objek diskret/ objek selanjar/ selang dalam garis nombor yang sama dengan saiz nombor bahagi, didapati dengan mengagihkan sejumlah objek/ nombor output, *a* secara kumpulan dengan saiz kumpulan, *c* yang mewakili nombor bahagi untuk mendapat bilangan kumpulan dengan kuantiti yang sama, *b*. Contohnya $a \div b = c$

	Contohnya:  **c. Garis Nombor** 1. Mewakilkan nombor input dengan jumlah selang dalam garis nombor. 2. Menentukan kuantiti selang yang diliputi anak panah melengkung berdasarkan nombor bahagi. 3. Melukis anak panah melengkung sehingga bilangan selang yang tidak cukup kuantiti untuk diliputi oleh satu anak panah melengkung. 4. Mengira bilangan anak panah melengkung dan kuantiti selang yang tinggal. Contohnya:  	
Nombor input diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, dan "3" diasimilasikan sebagai faktor pendaraban	**(3) Songsangan darab** 1. Mengenal pasti input, operasi dan nombor bahagi yang diberi. 2. Menentukan nombor yang dibahagi berdasarkan input. 3. Mencari hasil bahagi dengan menghafal sifir berdasarkan nombor bahagi, kemudian tambah bakinya untuk mendapat hasil darab yang sama dengan input. Contohnya: 13 ÷ 3 = 4 baki 1 6 ÷ 3 = 2	Faktor pendaraban, *b* apabila darab dengan faktor yang satu lagi, *c* mewakili nombor bahagi untuk mendapat nombor input mewakili hasil darab atau hasil darab yang hampir atau terdekat dengan nombor input, *a*. Contohnya, $a \div b = c$ baki r $b \times c + r = a$
Nombor input diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, dan "3" diasimilasikan	**(4) Gabungan operasi darab dan tolak** 1. Mengenal pasti input dan operasi yang diberi. 2. Menghafal sifir bagi nombor bahagi sehingga hasil darab yang kurang dan terdekat nombor input. 3. Menolakkan hasil darab yang didapati daripada nombor input untuk mendapat beza.	Faktor pendaraban, *b* untuk didarab dengan faktor satu lagi, *c* yang mewakili nombor bahagi

sebagai faktor pendaraban bagi nombor input.	Contohnya: $13 - 4 \times 3 = 1$	mendapat hasil darab untuk ditolak daripada nombor yang ditolak mewakili nombor input untuk mendapat beza, *d*. Contohnya, $a - b \times c = d$
Nombor input diasimilasikan sebagai hasil tambah, dan "÷ 3" diasimilasikan sebagai menambah kuantiti objek/nombor yang sama dengan bilangannya sama dengan nombor bahagi.	**(5) Operasi tambah berulang.** 1. Mengenal pasti input, operasi dan nombor bahagi yang diberi. 2. Menentukan nombor tambah yang sama dengan bilangannya mengikut nombor bahagi yang diberi. Mengagihkan objek ke dalam bilangan kumpulan yang ditetapkan dengan kuantiti yang sama, dan kuantiti yang tidak cukup diagihkan ke dalam bilangan kumpulan tersebut dengan kuantiti yang sama ditinggalkan sebagai baki.. 3. Menambahkan bilangan kumpulan objek/nombor tambah dengan kuantiti/nilai yang sama dengan nombor bahagi,kemudian tambahkan baki untuk mendapat hasil yang sama dengan nombor input. Contohnya: $13 = 4 + 4 + 4 + 1$	Nilai nombor tambah yang sama, *b* dengan bilangannya telah ditetapkan, *c* mewakili nombor bahagi apabila ditambahkan dengan baki, d akan mendapat nombor input. Contohnya, $a = b + b + d$ (Bilangan b = nombor bahagi)
Nombor input diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, dan "÷ 3" diasimilasikan sebagai menolak nombor yang sama dengan nombor bahagi berulang kali.	**(6) Operasi tolak berulang.** 1. Mengenal pasti input, operasi dan nombor bahagi yang diberi. 2. Menolak nombor bahagi berulang kali sehingga sifar atau beza yang kurang daripada nombor bahagi. 3. Menentukan bilangan nombor bahagi. Contohnya: $13 - 3 - 3 - 3 - 3 = 1$	Bilangan nombor tolak, *c* yang didapati dengan menolak nombor tolak, *b* daripada nombor yang ditolak yang mewakili nombor input, *a* untuk mendapat bezanya, *d* sifar atau kurang daripada nombor tolak. Contohnya, $a - b - b - b = d$ (Bilangan $b = c$)

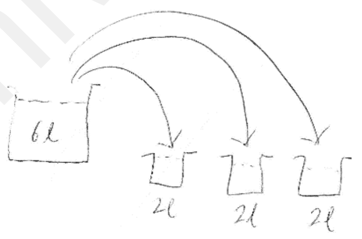
Seterusnya, pentafsiran makna hasil bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.11. Aktiviti yang dijalankan oleh responden dibahagikan kepada lima bahagian juga, iaitu kaedah pemetakan, kaedah pengukuran, songsangan darab, gabungan operasi tolak dan darab, operasi tambah berulang, dan operasi tolak berulang.

Dari hasil kajian ini, didapati keenam-enam orang responden mewakilkan makna hasil bahagi dari situasi (2) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pemetakan. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 3.5 (John) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan kaedah pemetakan.

Protokol 3.4 (John): Situasi Melibatkan Nombor 6

P: Ada cara lain silinder ajaib "÷ 3" buat pada nombor 6 yang dimasukkan ke dalamnya?

R: Silinder ajaib "÷ 3" menuangkan 6 liter air ke dalam tiga bekas dengan kuantiti yang sama. (Cikgu melukis satu bekas besar berlabel 6 ℓ, kemudian melukis tiga anak panah dari bekas besar ke tiga bekas kecil yang berlabel 2 ℓ).



P: Cuba terangkan.

R: 6 ℓ air mewakili nombor 6, tiga anak panah dari bekas besar ke bekas kecil mewakili operasi bahagi tiga, dan 2 ℓ mewakili dua liter air.

P: Mengapakah cikgu tafsir begitu?

R: Situasi nombor 6 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3, suatu nombor akan dikeluarkan boleh diterjemahkan dengan silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu mewakili operasi bahagi tiga menuangkan 6 ℓ air ke dalam tiga bekas kecil dengan kuantiti yang sama.

P: Dengan itu, apakah nombor akan keluar dari silinder ajaib "÷ 3"?

R: Nombor 2.
P: Mengapakah cikgu cakap begitu?
R: 6 ℓ air yang mewakili nombor 6 dituang ke dalam tiga bekas kecil dengan kuantiti yang sama. Dengan itu, setiap bekas mendapat 2 ℓ air mewakili nombor 2 yang dikeluarkan dari silinder ajaib "÷ 3".

John mewakilkan situasi nombor 6 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3", suatu nombor akan dikeluarkan dengan ayat matematik, "6ℓ ÷ 3= 2ℓ ". Beliau menyatakan ayat matematik itu adalah enam liter dibahagi dengan tiga sama dengan dua liter. Beliau menerangkan 6 ℓ mewakili 6 liter air, "÷ 3" mewakili air itu dituang ke dalam tiga bekas, dan 2ℓ mewakili dua liter air dalam setiap bekas. Beliau menerangkan lagi, ayat matematik ditulis begitu kerana situasi nombor 6 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3", suatu nombor akan dikeluarkan boleh diterjemahkan dengan silinder ajaib "÷ 3" sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga menuangkan air ke dalam tiga bekas dengan kuantiti yang sama, dengan itu terhasil 2ℓ air dalam setiap bekas, yang mana mewakili nombor 2 dikeluarkan.

Makna hasil bahagi yang ditafsirkan oleh John berdasarkan situasi nombor 6 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.11 (1) Kaedah Pemetakan.

Disamping itu, daripada hasil kajian ini didapati keenam-enam orang responden mewakilkan makna hasil bahagi dari situasi (2) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pengukuran. Sebagai contoh, tingkah laku Shidah dalam Protokol 3.5(Shidah) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pengukuran, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan kaedah pengukuran.

Protokol 3.5 (Shidah): Situasi Melibatkan Nombor 13

P: Sekarang saya masukkan nombor 13 ke dalam silinder ajaib "÷ 3", apakah akan silinder ajaib lakukan?
R: 13…(Cikgu diam seketika, kemudian melukis tiga belas bulatan dalam satu baris, seterusnya mengasingkan bulatan itu secara tiga-tiga dengan garis lurus. Oleh itu terdapat empat kumpulan tiga bulatan dan satu kumpulan hanya satu bulatan yang terletak di hujung sekali).

P: Boleh cikgu terangkan?
R: 13 bulatan mewakili 13 objek, objek itu diasingkan secara tiga-tiga dengan garis lurus mewakili "÷ 3", dan satu bulatan di hujung baris mewakili bakinya.
P: Mengapakah cikgu tafsir begitu?
R: Ini kerana nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3", suatu nombor akan dikeluarkan seperti 13 objek masuk ke dalam silinder ajaib "÷ 3" yang mewakili operasi bahagi tiga, mengasingkan objek itu secara tiga-tiga.
P: Oleh itu, apakah akan keluar dari silinder ajaib "÷ 3"?
R: Empat kumpulan tiga objek masing-masing dan bakinya satu objek.
P: Mengapakah cikgu cakap begitu?
R: Ini kerana silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengasingkan objek secara tiga-tiga. Oleh itu, terdapat empat kumpulan tiga objek dan satu kumpulan hanya satu objek sahaja.
P: Mengapakah ada satu kumpulan hanya ada satu objek sahaja?
R: Ini kerana silinder ajaib "÷ 3" mewakili operasi bahagi tiga, ia mengagihkan objek yang masuk ke dalamnya itu secara tiga-tiga. Akhirnya, hanya tinggal satu objek sahaja, maka ia tidak dikira sebagai satu kumpulan kerana tidak cukup tiga objek.

Berdasarkan situasi nombor 13 masuk dan sesuatu keluar dari silinder ajaib "÷ 3", Shidah mentafsirkan pembahagian nombor bulat dianggap sebagai suatu yang mengasingkan sejumlah objek ke dalam beberapa kumpulan dengan bilangan objek yang sama dan kuantiti objek yang tidak cukup bilangan untuk membentuk kumpulan dikira sebagai bakinya. Beliau menerangkan pembahagian nombor bulat ditafsirkan sebegitu kerana silinder ajaib "÷ 3" mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan objek secara tiga-tiga dalam kumpulan. Oleh itu, terdapat empat kumpulan masing-masing ada tiga objek dan bakinya satu.

Makna hasil bahagi pertama yang ditafsirkan oleh Shidah berdasarkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.11 (2) Kaedah Pengukuran.

Selain itu, dari hasil kajian ini didapati seorang responden mewakilkan makna hasil bahagi dari situasi (2) dalam kategori prosedural melibatkan songsangan darab. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 3.5(Tong) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan songsangan darab, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan songsangan darab.

Protokol 3.5 (Tong): Situasi Melibatkan Nombor 13

P: Bolehkah cikgu mewakilkan situasi ini dengan ayat matematik?
R: Boleh. (Cikgu menulis “13 ÷ 3 = 4 baki 1”).

13 ÷ 3 = 4 baki 1

P: Cuba cikgu terangkan apa yang dituliskan ini.
R: Baik. “13 ÷ 3 = 4 baki 1” adalah tiga belas bahagi tiga sama dengan empat baki satu. 13 mewakili 13 biji gula-gula, simbol “÷” mewakili bahagi, manakala 3 mewakili 3 orang, dan 4 mewakili 4 biji gula-gula, iaitu bilangan gula-gula yang diagihkan kepada setiap orang, manakala 1 mewakili sebiji gula yang tinggal.
P: Mengapakah cikgu menulis ayat matematik begitu?
R: Ini mewakili 13 gula-gula diagihkan kepada tiga orang dengan setiap orang mendapat empat biji gula dan bakinya sebiji.
P: Bagaimanakah cikgu tahu jawapannya ialah 4 baki 1?
R: Saya menghafal sifir 3 untuk mendapat hasil darab tambah 1 sama dengan 13.

Tong mewakilkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib “÷ 3” mengeluarkan 4 baki 1 dengan ayat matematik “13 ÷ 3 = 4 baki 1”. Beliau menerangkan “13 ÷ 3 = 4 baki 1” adalah tiga belas bahagi tiga sama dengan empat baki satu, yang mana 13 mewakili 13 biji gula-gula, simbol “÷” mewakili bahagi, manakala 3 mewakili 3 orang, dan 4 mewakili 4 biji gula-gula, iaitu bilangan gula-gula yang diagihkan kepada setiap orang, manakala 1 mewakili sebiji gula-gula yang tinggal. Beliau menyatakan ayat matematik tersebut mewakili 13 gula-gula diagihkan kepada tiga orang dengan setiap orang mendapat empat biji gula-gula dan bakinya sebiji. Beliau menyatakan lagi 4 baki 1 didapati dengan menghafal sifir 3 untuk mendapat hasil darab tambah 1 sama dengan 13.

Makna hasil bahagi yang ditafsirkan oleh Tong berdasarkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" melibatkan songsangan darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.11 (3) Songsangan Darab.

Di samping itu, hasil kajian ini didapati seorang daripada enam orang responden mewakilkan makna hasil bahagi dari situasi (2) dalam kategori prosedural melibatkan gabungan darab dan tolak. Sebagai contoh, tingkah laku Shidah dalam Protokol 3.5(Shidah) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori prosedural melibatkan gabungan tolak dan darab, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan gabungan tolak dan darab.

Protokol 3.5 (Shidah): Situasi Melibatkan Nombor 13

R: (Cikgu menulis ayat matematik, "13 – 4 × 3 = 1"). Tiga belas tolak empat darab tiga sama dengan satu. Ini kerana fungsi silinder ajaib "÷ 3" adalah mengasingkan objek secara tiga-tiga, maka setiap kali ia akan mengagihkan tiga objek dalam satu bekas. Selapas 13 keluarkan empat 3 akan tinggal 1. Oleh kerana akhirnya hanya terdapat satu objek, maka ia tidak cukup bilangan untuk diisikan dalam satu bekas, oleh itu ia ditinggalkan sebagai baki.

$$13 - 4 \times 3 = 1$$

P: Apakah maksud baki?
R: Baki maksudnya bilangan yang tidak cukup kuantiti yang ditetapkan untuk membentuk satu kumpulan.
P: Bagaimanakah cikgu tahu dalam 13 ada empat 3?
R: Saya menghafal sifir 3 yang dekat dengan 13, iaitu "4 × 3 = 12".

Chong menulis ayat matematik, "13 – 4 × 3 = 1" untuk menerangkan terdapat baki satu objek, iaitu, tiga belas tolak empat darab tiga sama dengan satu. Beliau menerangkan lagi, itu kerana fungsi silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengasingkan objek secara tiga-tiga, maka setiap kali ia akan mengagihkan tiga objek dalam satu bekas. Selepas 13 dikeluarkan empat 3 akan tinggal 1. Oleh kerana akhirnya hanya terdapat satu objek, maka ia tidak cukup bilangan untuk diisikan dalam satu bekas, oleh itu ia tinggal sebagai baki. Menurut pandangan beliau, baki maksudnya bilangan yang tidak cukup kuantiti yang ditetapkan untuk membentuk satu kumpulan. Chong menyatakan beliau mengetahui 13 ada empat 3 dengan menghafal sifir 3 yang dekat dengan 13, iaitu “4 × 3 = 12”.

Makna hasil bahagi yang ditafsirkan oleh Chong berdasarkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib “÷ 3” melibatkan gabungan operasi darab dan tolak, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.11 (4) Gabungan Operasi Darab dan Tolak.

Seterusnya, hasil kajian ini didapati dua orang daripada enam orang responden mewakilkan makna hasil bahagi dari situasi (2) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tolak berulang. Sebagai contoh, tingkah laku Shidah dalam Protokol 3.5(Shidah) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tolak berulang, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan operasi tolak berulang.

Protokol 3.5 (Shidah): Situasi Melibatkan Nombor 13

P: Bolehkah cikgu mewakilkan situasi ini dengan ayat matematik?
R: Boleh. (Cikgu menulis “13–3–3–3–3=1” dan “13–3=10, 10–3= 7, 7–3=4, ” 4–3=1).

13 - 3 = 10
10 - 3 = 7
7 - 3 = 4
4 - 3 = 1

P: Cuba cikgu terangkan apa yang ditulis ini.
R: Baik. “13 – 3 – 3 – 3 – 3 = 1” bermaksud 13 ditolak 3 sebanyak 4 kali, iaitu “13–3=10” mewakili 13kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 10kg beras,

kemudian “10–3=7” mewakili 10kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 7 kg beras, selepas itu, “7 – 3 = 4” mewakili 7kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 4kg beras, seterusnya, “4 – 3 = 1” mewakili 4kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 1kg beras.

P: Mengapakah cikgu menulis ayat matematik begitu?

R: Ini kerana nombor 13 boleh diwakili dengan 13kg beras, “ – 3” mewakili beras itu dikeluarkan secara tiga kilogram, “ – 3” guna empat kali mewakili dalam 13kg beras boleh dikeluarkan 3kg beras sebanyak empat kali, dan 1 mewakili 1kg beras yang tinggal.

John mewakilkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib “÷ 3”, 4 baki 1 akan dikeluarkan, dengan ayat matematik, “13 – 3 – 3 – 3 – 3 = 1” bermaksud 13 ditolak 3 sebanyak 4 kali, iaitu “13 – 3 = 10” mewakili 13kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 1kg beras, kemudian “10 – 3 = 7” mewakili 10kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 7kg beras, selepas itu, “7 – 3 = 4” mewakili 7kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 4kg beras, seterusnya, “4 – 3 = 1” mewakili 4kg beras dikeluarkan 3kg akan tinggal 1kg beras. Beliau menerangkan lagi, ayat matematik dituliskan begitu kerana nombor 13 boleh diwakili dengan 13kg beras, “– 3” mewakili beras itu dikeluarkan secara tiga kilogram, “–3” digunakan empat kali mewakili dalam 13kg beras boleh dikeluarkan 3kg beras empat kali , dan 1 mewakili 1kg beras yang tinggal.

Makna hasil bahagi yang ditafsirkan oleh John berdasarkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib “÷ 3” melibatkan operasi tolak berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.11 (6) Operasi Tolak Berulang.

Akhirnya, hasil kajian ini juga didapati seorang daripada enam orang responden mewakilkan makna hasil bahagi dari situasi (2) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tambah berulang. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 3.5(Chong) menunjukkan makna nombor bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tambah berulang, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan operasi tambah berulang

Protokol 3.5 (Chong): Situasi Melibatkan Nombor 13

P: Dengan itu, apa akan keluar dari silinder ajaib "÷ 3" apabila nombor 13 dimasukkan?
R: Tiga bekas ada empat biji guli masing-masing dan bakinya 1 biji.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan itu?
R: Situasi nombor 13 masuk dan suatu keluar dari silinder ajaib "÷ 3" boleh diterjemahkan dengan 13 biji guli masuk ke dalam silinder ajaib "÷ 3", kemudian silinder ajaib "÷ 3" memasukkan guli tersebut ke dalam tiga bekas dengan satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses itu sehingga guli ke-12 dan baki 1 biji, kerana "13 = 4 + 4 + 4 + 1". (Cikgu menulis ayat matematik, "13 = 4 + 4 + 4 + 1").

$13 = 4 + 4 + 4 + 1$

P: Bagaimanakah cikgu tahu 13 ada tiga 4 dan satu 1?
R: Saya menghafal sifir, iaitu "3 × 4 = 12" dan menggunakan operasi tolak , iaitu "13 – 12 = 1".
P; Bagaimana cikgu memastikan setiap bekas mempunyai bilangan guli yang sama?
R: Saya mengagihkan guli masing-masing ke dalam tiga bekas sambil membilang agar bilangan di bekas ketiga adalah gandaan 3. Ini kerana setiap kali agihan perlu ada tiga biji guli, iaitu setiap bekas mendapat sebiji guli. Ini sama dengan gandaan 3. Oleh itu, apabila mengagih guli hingga guli ke-12 dan didapati ia diagihkan ke bekas ketiga, maka telah tentu setiap bekas mempunyai bilangan guli yang sama.

Chong menyatakan hasil yang dikeluarkan dari silinder ajaib "÷ 3" apabila nombor 13 dimasukkan ialah tiga bekas masing-masing ada empat biji guli dan bakinya 1 biji. Beliau menjustifikasikan hasil yang didapati dengan menyatakan situasi nombor 13 masuk dan suatu keluar dari silinder ajaib "÷ 3" boleh diterjemahkan dengan 13 biji guli masuk ke dalam silinder ajaib "÷ 3", kemudian silinder ajaib "÷ 3" memasukkan guli tersebut ke dalam tiga bekas satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses itu sehingga guli ke-12 dan baki 1 biji. Beliau menulis ayat matematik, "13 = 4 + 4 + 4 + 1" untuk menerangkan pandangannya, iaitu 13 terdiri daripada tiga 4 dan satu 1.

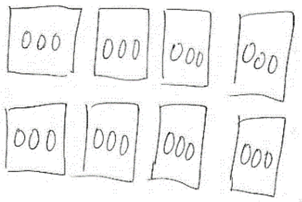
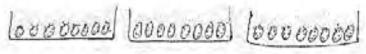
Makna hasil bahagi yang ditafsirkan oleh Chong berdasarkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" melibatkan gabungan operasi tambah berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.11 (5) Operasi Tambah Berulang.

Makna Nombor Yang Dibahagi. Makna nombor yang dibahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditafsirkan melalui situasi (3), iaitu situasi nombor 8 keluar dari silinder ajaib berfungsi "÷ 3" hanya dapat dirumuskan kepada satu kategori sahaja, iaitu pengetahuan prosedural. Kategori ini dibahagikan kepada lima bahagian, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, operasi tambah berulang, songsangan darab, dan operasi darab. Analisis makna nombor yang dibahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.12. Jadual ini menunjukkan kategori makna nombor bahagi, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang memiliki makna hasil bahagi tersebut.

Seterusnya, pentafsiran makna nombor yang bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden ditunjukkan dalam Jadual 4.13. Aktiviti yang dijalankan oleh responden dibahagikan kepada lima bahagian, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, operasi tambah berulang, songsangan darab, dan operasi darab.

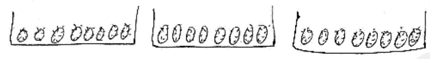
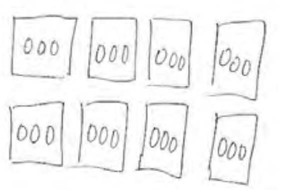
Jadual 4.12

Makna nombor yang dibahagi yang dimiliki oleh responden.

Kategori	**Perkara**	**Huraian**	**Responden**
Prosedural	(a) Kaedah Pengukuran 	• Nombor keluar mewakili bilangan kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama, dan silinder berfungsi "÷3" mewakili objek diagihkan secara tiga-tiga. Ini menunjukkan sejumlah objek telah diagihkan secara tiga-tiga. Oleh itu, terhasil bilangan kumpulan seperti nombor keluar dengan setiap kumpulan terdapat tiga objek.	Tong, Chong, Lim, John, Shidah
	(b) Kaedah pemetakan 	• Nombor keluar mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan dan silinder berfungsi "÷3" mewakili pengagihan objek ke dalam tiga kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama. Ini menunjukkan sejumlah objek telah diagihkan ke dalam tiga kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama. Oleh itu, terhasil kuantiti objek yang sama dengan nombor keluar dalam setiap kumpulan.	Tong, Chong, Lim, Shidah
	(c) Songsangan darab $(\ ) \div 3 = 8 \quad 8 \times 3 = (\ )$	• Nombor keluar mewakili kuantiti dalam satu kumpulan dan silinder berfungsi "÷3" mewakili tiga kumpulan. Oleh itu, jumlah objek didapati dengan menggunakan songsangan darab, iaitu bilangan kumpulan darab dengan kuantiti objek. •	Kong, John
	(d) Operasi tambah berulang $8+8+8 = 24$	• Nombor keluar mewakili kuantiti dalam satu kumpulan dan silinder berfungsi "÷3" mewakili tiga kumpulan. Oleh itu, jumlah objek didapati dengan menambahkan kuantiti dalam satu kumpulan sebanyak tiga kali..	Kong, John

Jadual 4.13

Tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor yang dibahagi yang dimilki oleh responden.

Situasi yang diasimilasikan	**Aktiviti yang dijalankan**	**Hasil yang diharapkan**
"÷3" diasimilasikan sebagai mengagihkan sejumlah objek kepada tiga kumpulan, dan nombor output diasimilasikan sebagai kuantiti objek dalam setiap kumpulan.	**A. Kaedah pemetakan** 1. Menentukan bilangan kumpulan berdasarkan nombor bahagi. 2. Mengenal pasti kuantiti objek dalam setiap kumpulan berdasarkan output. 3. Mewakilkan nombor input dengan objek diskret. 4. Memasukkan kuantiti objek yang sama ke dalam bilangan kumpulan yang telah ditentukan. 5. Mencari jumlah objek dengan operasi tambah berulang/ songsangan darab, iaitu jumlahkan kesemua nombor tambah, atau nombor bahagi darab dengan kuantiti kumpulan. Contohnya: 	Jumlah kesemua objek, yang didapati dengan mengagihkan sejumlah objek, *a* ke dalam bilangan kumpulan tertentu, *b* mewakili nombor bahagi dengan kuantiti yang sama, c mewakili nombor output. Contohnya, $a \div b = c$ $b \times c = a$ atau $b + b + b = a$
"÷3" diasimilasikan sebagai mengagihkan sejumlah objek secara tiga-tiga, dan nombor output diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan.	**B. Kaedah pengukuran** . 1. Mengenal pasti output, operasi dan nombor bahagi 2. Menentukan bilangan kumpulan berdasarkan output. 3. Mengenal pasti kuantiti objek dalam setiap kumpulan berdasarkan nombor bahagi. 4. Mewakilkan nombor bahagi dengan objek diskret. 5. Memasukkan objek secara kumpulan ke dalam bilangan kumpulan yang ditetapkan. dengan kuantiti yang sama. 6. Mencari jumlah objek dengan songsangan darab, iaitu bilangan kumpulan darab kuantiti objek dalam setiap kumpulan, atau dengan operasi tambah berulang, iaitu menambahkan kuantiti objek dalam kesemua kumpulan. Contohnya: 	Jumlah kesemua objek, yang didapati dengan mengagihkan sejumlah objek, *a* secara kumpulan dengan saiz kumpulan, b mewakili nombor bahagi untuk mendapat bilangan kumpulan, c yang sama dengan nombor output. Contohnya, $a \div b = c$ $b \times c = a$ atau $b + b + b = a$
"÷ 3" diasimilasikan sebagai menambahkan nombor output	**C. Operasi tambah berulang** 1. Mengenal pasti input, operasi dan nombor bahagi. 2. Menentukan bilangan output berdasarkan nombor bahagi. 3. Mencari hasil tambah dengan menambahkan output berulang kali dengan bilangan kali sama dengan nombor bahagi.	Hasil tambah objek, *c* yang didapati dengan menambah nombor output, *b* berulang kali

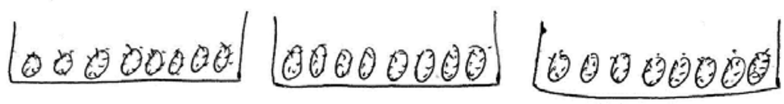
berulangan kali dengan bilangannya sama dengan nombor bahagi, dan nombor output diasimilasikan sebagai nombor tambah.	Contohnya: $\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ +8 \\ \hline 24 \end{array}$	dengan bilangannya sama dengan nombor bahagi, *a*. Contohnya, $b + b + b = c$
“3” diasimilasikan sebagai faktor pendaraban, , dan nombor output juga diasimilasikan sebagai faktor pendaraban yang satu lagi	**D. Songsangan darab** 1. Mengenal pasti operasi. 2. Mewakilkan nombor yang bahagi dengan ( ) atau anu. 3. Mengenal pasti hasil bahagi berdasarkan nombor output. 4. Mencari nombor yang dibahagi dengan menghafal sifir berdasarkan nombor bahagi. Contohnya: $(\ )\div 3 = 8 \quad 8 \times 3 = (\ )$	Hasil darab, *a* yang didapati dengan mendarabkan kedua-dua faktor pendaraban yang terdiri daripada nombor bahagi, *b* dan nombor output, *c*. Contohnya, $a \div b = c$ $b \times c = a$

Daripada hasil kajian ini didapati empat daripada enam responden mewakilkan makna nombor yang bahagi dari situasi (3) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pemetakan. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 3.6(Tong) menunjukkan makna nombor yang bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pemetakan dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan kaedah pemetakan.

Protokol 3.6 (Tong): Situasi Melibatkan Nombor 8

P: Apakah silinder ajaib “÷ 3” buat pada nombor yang dimasukkan ke dalamnya untuk mengeluarkan nombor 8?

R: Silinder ajaib “÷ 3” sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan satu kuantiti rambutan ke dalam tiga bakul dengan setiap bakul ada lapan biji rambutan. (Cikgu melukis tiga bakul, kemudian melukis lapan biji rambutan dalam setiap bakul).



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Mengagihkan rambutan itu ke dalam tiga bakul mewakili "÷ 3" dan lapan biji rambutan dalam setiap bakul mewakili nombor 8.
P: Mengapakah cikgu tafsir begitu?
R: Silinder ajaib "÷ 3" sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan kesemua objek yang ada kepada tiga kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan yang sama. Dengan itu, kesemua rambutan yang ada diagihkan kepada tiga kumpulan dengan bilangan yang sama. Nombor 8 adalah had atau ketetapan kuantiti dalam setiap kumpulan, dengan itu, setiap kumpulan perlu ada lapan biji rambutan.

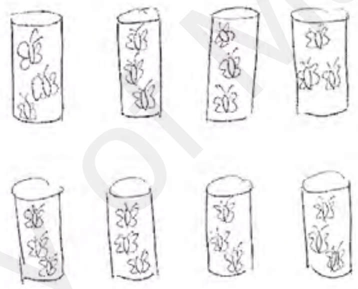
Tafsiran Tong yang melibatkan situasi suatu nombor yang dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" mengeluarkan nombor 8 adalah silinder ajaib "÷ 3" sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan satu kuantiti rambutan ke dalam tiga bakul dengan setiap bakul ada lapan biji rambutan. Beliau menterjemahkan tafsirannya dengan gambar tiga bakul yang berisi lapan biji rambutan dalamnya. Beliau menerangkan bahawa mengagihkan rambutan itu ke dalam tiga bakul mewakili "÷ 3" dan lapan biji rambutan dalam setiap bakul mewakili nombor 8. Beliau menjelaskan terjemahan tentang situasi tersebut dibuat begitu kerana silinder ajaib "÷ 3" sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan kesemua objek yang ada kepada tiga kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai bilangan yang sama. Beliau menyatakan dengan perwakilan silinder ajaib "÷ 3", kesemua rambutan yang ada diagihkan kepada tiga kumpulan dengan bilangan yang sama dan nombor 8 adalah had atau ketetapan kuantiti dalam setiap kumpulan, dengan itu, setiap kumpulan perlu ada lapan biji rambutan.

Makna nombor yang dibahagi yang ditafsirkan oleh Tong berdasarkan situasi nombor 8 dikeluarkan dari silinder ajaib "÷ 3" melibatkan pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.13 (1) Kaedah Pemetakan.

Selain itu, dari hasil kajian ini didapati lima daripada enam kesemua orang responden mewakilkan makna nombor yang bahagi dari situasi (3) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pengukuran. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 3.6(Lim) menunjukkan makna nombor yang bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan kaedah pengukuran, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan kaedah pengukuran.

Protokol 3.6 (Lim): Situasi Melibatkan Nombor 13

P: Ada cara lain silinder ajaib "÷ 3" buat pada nombor yang dimasukkan ke dalamnya untuk mengeluarkan nombor 8?
R: Ada. (Cikgu melukis lapan bekas, kemudian melukis tiga ekor rama-rama dalam setiap bekas).



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Baik. Lapan bekas mewakili nombor 8 dan rama-rama itu diagihkan secara tiga-tiga mewakili "÷ 3".
P: Mengapakah cikgu tafsir begitu?
R : Situasi suatu nombor masuk dan nombor 8 keluar dari silinder ajaib "÷ 3" boleh diterjemahkan dengan silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan sejumlah rama-rama secara tiga-tiga ke dalam lapan bekas.
P: Dengan itu, apakah nombor yang dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3"?
R: Nombor 24.
P: Bagaimanakah cikgu tahu nombor yang dimasukkan itu ialah nombor 24?
R: Silinder ajaib "÷ 3" mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan sejumlah rama-rama secara tiga-tiga ke dalam lapan bekas. Oleh itu, jumlah rama-rama yang dimasukkan ke dalam silinder itu boleh didapati dengan menambahkan kesemua rama-rama dalam kelapan-lapan bekas, iaitu lapan kumpulan tiga ekor rama-rama ditambahkan, jumlahnya 24 ekor yang mewakili nombor yang dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3".

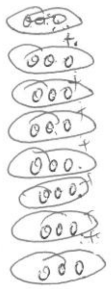
Tafsiran Lim yang melibatkan situasi suatu nombor masuk dan nombor 8 keluar dari silinder ajaib "÷ 3" adalah silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan sejumlah rama-rama secara tiga-tiga ke dalam lapan bekas. Beliau menyatakan tafsirannya dengan melukis lapan bulatan, kemudian melukis tiga ekor rama-rama dalam setiap bulatan. Beliau menerangkan lapan bulatan mewakili lapan bekas dan rama-rama itu diagihkan secara tiga-tiga mewakili "÷ 3". Seterusnya, beliau menerangkan situasi tersebut ditafsirkan sebegitu kerana situasi suatu nombor masuk dan nombor 8 keluar dari silinder ajaib "÷ 3" boleh diterjemahkan dengan silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan sejumlah rama-rama yang masuk ke dalamnya secara tiga-tiga ke dalam lapan bekas. Beliau menyatakan nombor yang dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" ialah nombor 24. Beliau menjustifikasikan jawapan tersebut dengan menyatakan silinder ajaib "÷ 3" mewakili operasi bahagi tiga mengagihkan sejumlah rama-rama secara tiga-tiga ke dalam lapan bekas. Oleh itu, jumlah rama-rama yang dimasukkan ke dalam silinder itu boleh didapati dengan menambahkan kesemua rama-rama dalam kelapan-lapan bekas, iaitu lapan kumpulan tiga ekor rama-rama ditambahkan, jumlahnya 24 biji yang mewakili nombor yang dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3".

Makna nombor yang dibahagi yang ditafsirkan oleh Lim berdasarkan situasi nombor 8 dikeluarkan dari silinder ajaib "÷ 3" melibatkan pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.13 (2) Kaedah Pengukuran.

Seterusnya, dari hasil kajian ini didapati dua daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor yang bahagi dari situasi (3) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tambah berulang. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 3.6(Tong) menunjukkan makna nombor yang bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan operasi tambah berulang, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan operasi tambah berulang.

Protokol 3.6 (Tong): Situasi Melibatkan Nombor 13

P: Dengan itu, apakah nombor yang masuk ke dalam silinder ajaib "÷ 3" supaya nombor 8 keluar dari silinder ajaib "÷ 3"?
R: Nombor 24.
P: Bagaimanakah cikgu menjustifikasikan nombor yang dimasukkan itu ialah nombor 24?
R: (Cikgu menulis "+" pada kelapan-lapan beg plastik yang ada tiga biji epal itu). Saya tambahkan kesemua epal dalam kelapan-lapan beg plastik ini.



P: Boleh cikgu terangkan?
R: Baik. Ada lapan beg plastik dengan setiap beg plastik ada tiga biji epal, maka untuk mengetahui jumlah kesemua epal itu, saya menggunakan operasi tambah, iaitu "3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24", dengan itu akan mendapat 24 biji epal, yang mana mewakili nombor 24.

Kong menyatakan situasi suatu nombor masuk dan nombor 8 keluar dari silinder ajaib "÷ 3", nombor yang masuk itu ialah nombor 24. Beliau menjustifikasikan nombor masuk itu adalah nombor 24 dengan operasi tambah. Beliau menulis simbol "+" pada kelapan-lapan beg plastik masing-masing ada tiga biji epal itu. Kemudian, beliau menjelaskan operasi tambah digunakan untuk mengetahui jumlah kesemua epal itu, iaitu "3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 24", dengan itu akan mendapat 24 biji epal, yang mana mewakili nombor 24.

Makna hasil bahagi pertama yang ditafsirkan oleh Kong berdasarkan situasi nombor 13 dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" melibatkan operasi tambah berulang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.13 (3) Operasi Tambah Berulang.

Akhirnya, daripada hasil kajian ini didapati dua daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor yang bahagi dari situasi (3) dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan songsangan darab. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 3.6(John) menunjukkan makna nombor yang bahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam yang dikelaskan dalam kategori pengetahuan prosedural melibatkan songsangan, dan urutan tiga bahagian dalam pentafsiran makna nombor bahagi melibatkan operasi darab.

Protokol 3.6 (Lim): Situasi Melibatkan Nombor 13

P: Boleh cikgu mewakilkan situasi ini dengan ayat matematik?
R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik, "$y \div 3 = 8$").

$y \div 3 = 8$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: Ok. y mewakili sejumlah rama-rama yang dimasukkan ke dalam silinder, " ÷ 3" mewakili rama-rama itu diagihkan secara tiga-tiga ke dalam lapan bekas dan "8" mewakili lapan bekas ada tiga ekor rama-rama.
P: Mengapakah cikgu menuliskan ayat matematik begitu?
R: Sejumlah rama-rama dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" diwakili dengan y, silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga, maka ia mengagihkan rama-rama tersebut secara tiga-tiga ke dalam lapan buah bekas.

Lim mewakilkan situasi suatu nombor dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3", supaya nombor 8 dikeluarkan dengan ayat matematik, "$y \div 3 = 8$". Beliau menerangkan y mewakili sejumlah epal yang di masukkan ke dalam silinder ajaib " ÷ 3", " ÷ 3" mewakili rama-rama itu diagihkan secara tiga-tiga ke dalam lapan buah bekas dan "8" mewakili lapan bekas ada tiga ekor rama-rama. Seterusnya, beliau menerangkan ayat matematik ditulis sebegitu kerana sejumlah rama-rama dimasukkan ke dalam silinder ajaib "÷ 3" diwakili dengan y, silinder ajaib "÷ 3" dianggap sebagai suatu yang mewakili operasi bahagi tiga, maka ia mengagihkan rama-rama tersebut secara tiga-tiga ke dalam lapan buah bekas.

Makna nombor yang dibahagi yang ditafsirkan oleh Lim berdasarkan situasi nombor 8 dikeluarkan dari silinder ajaib "÷ 3" melibatkan songsangan darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.13 (4) Songsangan Darab.

Pada keseluruhannya, makna nombor yang dibahagi yang dimiliki oleh guru Matematik Tahun Enam dikelaskan kepada kategori prosedural yang dibahagikan kepada lima bahagian, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, operasi darab, songsangan darab dan operasi tambah berulang. Didapati kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan adalah dominan kerana semua guru menggunakan kaedah itu. Selain itu, dua daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor yang bahagi melibatkan operasi tambah berulang, manakala tiga daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor yang bahagi melibatkan operasi darab. Akhirnya, lima daripada enam orang responden mewakilkan makna nombor yang bahagi melibatkan songsangan darab. Makna nombor yang dibahagi melibatkan kaedah pengukuran ialah jumlah objek dalam bilangan kumpulan yang sama dengan nombor bahagi, yang mana kuantiti objek dalam setiap kumpulan adalah sama dengan output. Makna nombor yang dibahagi melibatkan kaedah pemetakan pula ialah jumlah objek dalam bilangan kumpulan sama dengan output dengan kuantiti objek dalam setiap kumpulan sama dengan nombor bahagi. Selain itu, makna nombor yang dibahagi melibatkan operasi tambah berulang ialah hasil tambah bagi bilangan nombor yang sama dengan nombor bahagi dan nilai nombor tersebut sama dengan output, manakala makna nombor yang dibahagi melibatkan songsangan darab ialah hasil darab dengan songsangan darab bagi nombor yang didarab sama dengan output dan nombor darab sama dengan nombor bahagi.

Secara umumnya, makna bagi bahagi, nombor bahagi, hasil bahagi dan nombor yang dibahagi yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam adalah berbeza.

Penaakulan

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat melibatkan cara penaakulan yang digunakan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat membabitkan tiga soalan:

(1) Ali dan Ah Seng menyertai acara maraton. Setiap kali Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Jika Ali berlari sejauh 12 km, berapa jauhkah Ah Seng berlari?;

(2) 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula. Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama?; dan

(3) Pak Kassim ada 27 biji durian. Setelah dia mengagihkan durian itu kepada beberapa orang jirannya dengan bilangan yang sama, dia masih tinggal 3 biji durian. Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?.

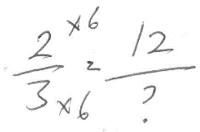
Penaakulan Dalam Penyelesaian Masalah Melibatkan Pembahagian Nombor Bulat. Cara penaakulan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat dirumuskan kepada satu kategori sahaja, iaitu prosedural. Kategori ini dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu penaakulan deduktif dan penaakulan induktif. Penaakulan deduktif tersebut dibahagikan kepada 11 perkara, iaitu konsep kadaran, konsep gandaan, pecahan setara, kaedah pengukuran, gandaan yang lebih besar dan terdekat, gabungan operasi bahagi dan tolak, gandaan yang lebih kecil dan tersekat, kaedah pemetakan, faktor dengan operasi bahagi, faktor dengan operasi darab, dan baki dengan operasi bahagi. Penaakulan induktif pula dibahagikan kepada 10 perkara, iaitu konsep kadaran, konsep gandaan, pecahan setara, kaedah pengukuran, gandaan yang lebih besar dan terdekat, gabungan operasi bahagi dan tolak, gandaan yang lebih kecil dan tersekat, faktor dengan operasi bahagi, faktor dengan operasi darab, dan baki dengan operasi bahagi. Analisis cara penaakulan dalam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.14. Jadual ini menunjukkan kategori cara penaakulan, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang menggunakan cara penaakulan tersebut.

Seterusnya, cara penaakulan deduktif dan induktif yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden ditunjukkan dalam Jadual 4.15.

Jadual 4.14
Cara penaakulan yang dimiliki oleh responden untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat.

Kategori	Perkara	Huraian	Responden
	i. Penaakulan Deduktif		
Prosedural	**A. Konsep Kadaran** Ali Seng 2km 3km ×6 ×6 12km 18km	• Jika nilai *a* berkadar dengan nilai *b*, apabila nilai a bertambah sebanyak *x* kali ganda, maka nilai b juga akan bertambah sebanyak *x* kali ganda.	Lim, Kong
	B. Konsep Gandaan $\frac{3}{2} \times 12\text{km} = 18\text{km}$	• *b* adalah *x* gandaan bagi *a*. Jika nilai a berubah didapati, maka nilai *b* berubah akan didapati dengan mendarabkan *x* gandaan dengan nilai *a* yang berubah	Kong, Chong, Shidah

C. Pecahan setara

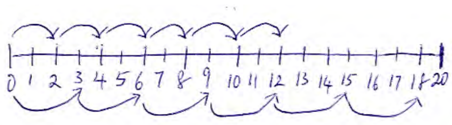


- Jika nisbah nilai *a* kepada nilai *b* ditulis dalam bentuk pechan, iaitu *a*/*b*, maka nisbah nilai *a* berubah kepada nilai *b* berubah juga boleh ditulis dalam bentuk pecahan dan nilai mereka adalah setara.

John, Chong

D. Kaedah Pengukuran

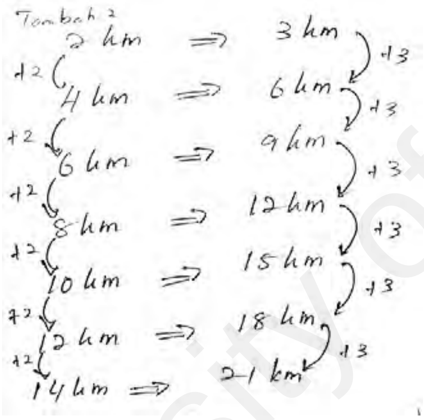
i. Garis nombor



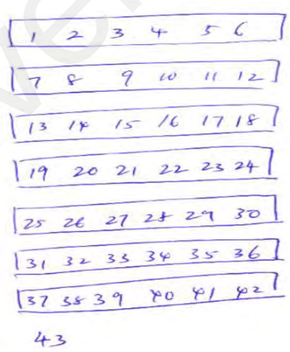
- Mengagihkan sejumlah objek/angka/garisan secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi bagi kumpulan yang tidak cukup kuantiti objek untuk membentuk satu kumpulan.

Tong, Chong, Lim, John, Shidah

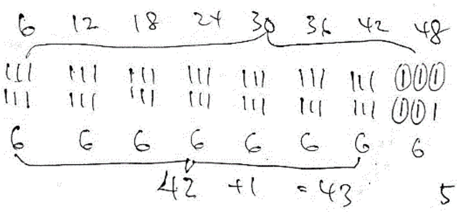
ii. Operasi tambah berulang



ii. Guna angka



iii. Guna garisan



iv. Gambar rajah

v. Senarai kes demi kes

Ali		Ah Seng
2km	→	3km
2km	→	3km
2km	→	2km
2km	→	3km
2km	→	3km
2km	→	3km
Jumlah 12km	→	18km

E. Gandaan yang lebih besar dan terdekat

- Mencari gandaan bagi bilangan kumpulan agihan lebih besar dan terdekat dengan nombor yang diberi, kemudian, menolakkan nombor yang diberi daripada gandaan tersebut akan mendapat kuantiti yang diperlukan lagi.

Chong, Lim, John, Shidah, Kong

1x6=6
2x6=12
3x6=18
4x6=24
5x6=36
6x6=36
7x6=42 →
8x6=48
9x6=54
43+5=48
Perlu 5 biji lagi

43
48
−43
5

F. Gabungan operasi bahagi dan tolak

- Membahagikan nombor yang diberi dengan bilangan kumpulan agihan untuk mendapat bakinya, kemudian menolak baki daripada bilangan kumpulan tersebut untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi bagi nombor yang diberikan agar setiap kumpulan mendapat kuantiti yang sama.

Tong, Kong, Chong, John

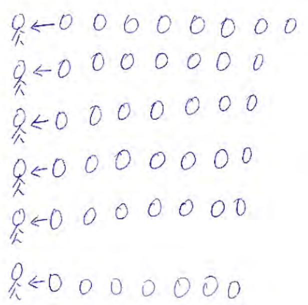
43 ÷ 6 = 7 b 1
6 − 1 = 5

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6\overline{)43} \\ 42 \\ \hline 1 \end{array}$$

G. Kaedah pemetakan

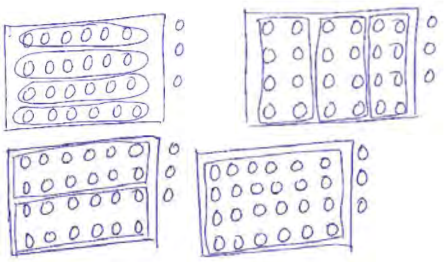
- Mengagihkan sejumlah objek kepada bilangan kumpulan tertentu dengan kuantiti objek yang sama agar mendapat kuantiti yang diperlukan lagi supaya setiap kumpulan mendapat kuantiti objek yang sama.

Lim,



H. Faktor dalam ayat matematik bahagi b = 24 b ÷ 8 = 24 ÷ 8 = 3. b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X b ÷ 8 = 24 ÷ 8 = 3 b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4 b ÷ 5 = 24 ÷ 5 = X b ÷ 4 = 24 ÷ 4 = 6 b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8 b ÷ 2 = 24 ÷ 2 = 12 b ÷ 1 = 24 ÷ 1 = 24 b ÷ 12 = 24 ÷ 12 = 2	• Menolak baki yang diberi daripada jumlah objek untuk mendapat kuantiti yang perlu diagihkan. Selepas itu mencari ayat matematik bahagi tanpa baki dengan nombor bahagi dan hasil bahaginya lebih besar daripada baki yang diberi, iaitu dua faktor bagi kuantiti tersebut yang akan menghasilkan baki tersebut.	Chong, Lim, Shidah
I. Faktor dalam ayat matematik darab "27 – 3 = 24", "1 × 24", "2 × 12", "3 × 8", "4 × 6", "6 × 4", "8 × 3", "12 × 2", "24 × 1"	• Menolakkan baki daripada jumlah objek untuk mendapat kuantiti yang perlu diagihkan. Kemudian menyenaraikan semua ayat matematik darab dengan hasil darabnya sama dengan kuantiti tersebut. Selepas itu, mencari nombor yang didarab dan nombor darab sesuatu ayat matematik darab yang lebih besar daripada baki, iaitu dua faktor bagi kuantiti tersebut yang akan menghasilkan baki seperti yang diberikan.	Kong, Tong
J. Baki dalam ayat matematik bahagi 27 ÷ 2 = 13 b 1 27 ÷ 3 = 9 27 ÷ 4 = 6 b 3 ✓ 27 ÷ 5 = 5 b 2 27 ÷ 6 = 4 b 3 ✓ 27 ÷ 7 = 3 b 6 27 ÷ 8 = 3 b 3 ✓ 27 ÷ 9 = 3 27 ÷ 10 = 2 b 7 27 ÷ 11 = 2 b 5 27 ÷ 12 = 2 b 3 ✓	• Menyenaraikan kesemua kemungkinan, iaitu kemungkinan mendapat baki yang ditetapkan dengan membahagikan nombor yang diberi dengan sebarang nombor. Bilangan kumpulan dan kuantiti objek yang diperlukan boleh didapati dengan mengambil nombor bahagi dan hasil bahagi yang lebih besar daripada baki pada ayat matematik bahagi yang sesuai	John

II. Penaakulan Induktif

A. Konsep kadaran Ali 2km ×6 12km Seng 3km ×6 18km dirumuskan sebagai $b = a \div 2 \times 3$	• b mewakili kuantiti B, a mewakili jumlah kuantiti A, 2 mewakili kuantiti asal A dan 3 mewakili kuantiti asal B.	Kong
B. Konsep gandaan $\frac{3}{2} \times 12km = 18km$ dirumuskan sebagai $b = \frac{3}{2} \times a$	• b mewakili jumlah kuantiti b, manakala a mewakili jumlah kuantiti a, 3/2 mewakili gandaan bagi nilai a.	Kong, Chong, Shidah
C. Pecahan setara $\frac{2^{\times 6}}{3_{\times 6}} = \frac{12}{?}$ dirumuskan sebagai $(2 \times a) / (3 \times a) = x/y$	• 2 mewakili kuantiti asal A, 3 mewakili kuantiti asal B, manakala x mewakili kuantiti A yang telah berubah, y mewakili kuantiti B yang telah berubah dan “× a” mewakili a kali ganda.	John, Chong,
D. Kaedah Pengukuran Ali : 2km + 2km + 2km + 2km + 2km + 2km Ah Seng : (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) Dirumuskan sebagai $z = x + x/a\ (b - a)$	• z mewakili jumlah kuantiti bagi B, x mewakili jumlah kuantiti bagi A, x/a mewakili jumlah kali gandaan, a mewakili kuantiti A asal, b mewakili kuantiti B asal, manakala “+ ” mewakili tambah,“– ” mewakili tolak, dan $(b - a)$ mewakili beza di antara kuantiti A asal dan B asal.	Lim, Tong, Shidah, John, Chong
atau  dirumuskan sebagai $Z - 3 = xy$	**atau** • z mewakili jumlah objek yang diberi, 3 mewakili baki, x mewakili bilangan objek dalam kumpulan, manakala y mewakili bilangan kumpulan. x dan y adalah faktor kepada beza bagi $(z - 3)$ dan nilainya mesti lebih daripada 3.	

E. Gabungan operasi bahagi dan tolak $43 \div 6 = 7$ b 1 $6\overline{)43}$, 7, 42, 1 $6 - 1 = 5$ dirumuskan sebagai $x \div 6 = a$ baki b $6 - b = c$	• *a* mewakili nombor yang diberi, 6 mewakili bilangan kumpulan yang diperlukan, *c* mewakili baki dan *d* mewakili kuantiti yang diperlukan lagi.	Chong, Kong, John, Tong
F. Gandaan yang lebih besar dan terdekat $8 \times 6 = 48$ $48 - 43 = 5$ dirumuskan sebagai $a \times 6 - 43 = b$, di mana $(a \times 6) > 43$	• *a* mewakili nombor yang mendarab bilangan kumpulan mendapat gandaan yang lebih besar dan terdekat dengan nombor yang diberi, 6 mewakili bilangan kumpulan, dan 43 mewakili nombor yang diberi, manakala *b* mewakili kuantiti yang diperlukan lagi	Kong, Chong, Lim, John, Shidah
G. Gandaan yang lebih kecil dan terdekat $43 - 7(6) = 1$, $1 + 5 = 6$ dirumuskan sebagai $x - n(6) = a$ $a + b = 6$	• *x* mewakili nombor yang diberi, *n* mewakili jumlah kali bilangan kumpulan yang ditolak, *a* mewakili beza bagi nombor yang diberi dan n kali gandaan bagi bilangan kumpulan yang telah ditolakkan, manakala *b* mewakili bilangan yang diperlukan lagi	Shidah
H. Faktor dalam ayat matematik darab "27 – 3 = 24", "1 × 24 = 24", "2 × 12 = 24", "3 × 8= 24 ", "4 × 6 = 24", "6 × 4 = 24", "8 × 3 = 24", "12 × 2 = 24", "24 × 1= 24" dirumuskan sebagai $27 - 3 = 24$, dan $24 \div x = y$, x dan $y > 3$	• 27 mewakili jumlah objek yang diberi, simbol " – " mewakili tolak, 3 mewakili baki dan 24 mewakili jumlah objek yang perlu diagihkan, manakala *x* mewakili bilangan kumpulan dan *y* mewakili bilangan objek dalam kumpulan, *x* dan *y* perlu lebih besar daripada baki.	Kong, Tong
I. Faktor dalam ayat matematik bahagi	• *n* mewakili kuantiti yang diberi, 3 mewakili baki, *b* mewakili kuantiti yang perlu diagihkan kepada bilangan kumpulan tertentu	Chong, Lim, Shidah

	27 – 3 = 24”, jika b =24”, “b ÷ 1 = 24÷ 1=24”, “b ÷ 2 = 24 ÷ 2 =12”, “b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8”, “b ÷ 4 = 24 ÷ 4 =6”, “b ÷ 5 = 24 ÷ 5 = X”, “b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4”, “b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X”, “b ÷ 8 = 24 ÷ 8 =3”, “b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X”, “b ÷ 12 = 24 ÷12 =2”, “b ÷ 24 = 24÷ 24 = 1” dirumuskan sebagai $n– 3 = b$, dan $b ÷ a =$ c , a dan b > 3	manakala *a* mewakili bilangan kumpulan dan *c* mewakili kuantiti objek yang diagihkan. *a* dan *b* perlu lebih besar daripada 3, iaitu bakinya.	
	J. Baki dalam ayat matematik bahagi 27÷2 = 13b1 27÷3 = 9 27÷4 = 6b3 ✓ 27÷5 = 5b2 27÷6 = 4b3 ✓ 27÷7 = 3b6 27÷8 = 3b3 ✓ 27÷9 = 3 27÷10 = 2b7 27÷11 = 2b5 27÷12 = 2b3 ✓ dirumuskan sebagai 27÷x = y baki 3 y > 3	• 27 mewakili bilangan objek yang diberi, simbol “÷” mewakili bahagi, dan *x* mewakili bilangan kumpulan dan *y* mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan, dan 3 mewakili baki.	John

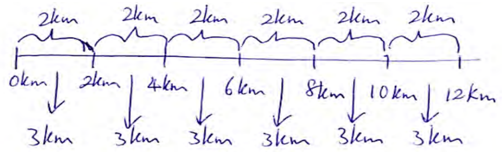
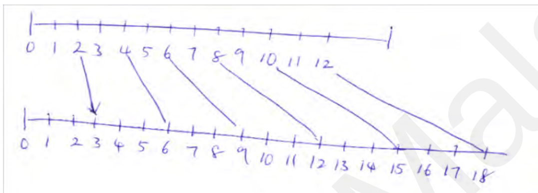
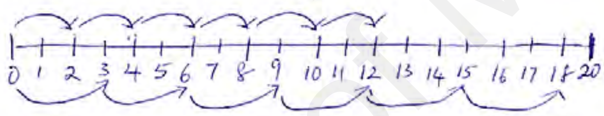
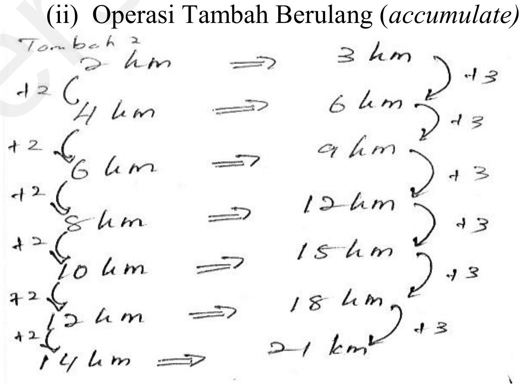
Jadual 4.15

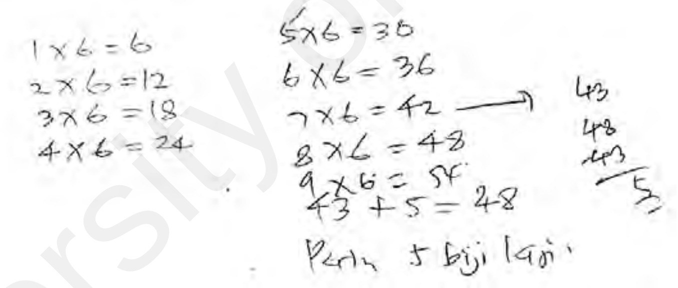
Tiga bahagian dalam cara penaakulan menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat

Situasi yang diasimilasikan	Aktiviti yang dijalankan	Hasil yang diharapkan
Perkaitan nilai *a* dengan nilai *b* diasimilasikan	**I. Penaakulan Deduktif** A. **Konsep kadaran** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh:	Nilai *b* berubah, didapati

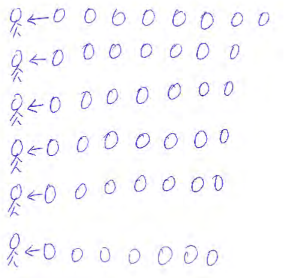
sebagai nilai *a* berkadar dengan nilai *b*; nilai *a* berubah diasimilasikan sebagai bilangan gandaan bagi nilai *a*, dan nilai *b* berubah diasimilasikan sebagai bilangan gandaan bagi nilai *b*.	Apabila Ali berlari 2km, Ah Seng akan berlari 3km, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari? (3) Menentu situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum yang diketahui: Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan konsep kadaran, iaitu nilai *a* berkadar dengan nilai *b*. Jika nilai *a* berubah dengan gandaan tertentu, maka nilai *b* akan turut berubah mengikut gandaan yang sama dengan nilai *a*. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut. Contoh: Ali Seng 2km . 3km. ×6 ×6 12km 18km. Yang mana 2km mewakili nilai a dan 3 km mewakili nilai b. Jika nilai a berubah ke 12km dengan 6 kali gandaan, maka nilai b juga perlu berubah 6 kali ganda, menjadi 18km.	dengan konsep kadaran, iaitu jika nilai *a* berubah dengan gandaan tertentu, *n* , maka nilai *b* akan turut berubah mengikut gandaan yang sama dengan nilai *a*. Contohnya, $na \longrightarrow nb$
Nilai *b* diasimilasikan sebagai gandaan bagi nilai *a*, dan nilai *b* berubah diasimilasikan sebagai gandaan nilai *a* berubah	B. **Konsep Gandaan** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Apabila Ali berlari 2km, Ah Seng akan berlari 3km, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari? . (3) Menentu situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum yang diketahui: Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan kes umum, iaitu nilai *b* berubah didapati apabila nilai *a* berubah diketahui, dengan mendarabkan gandaan bagi nilai *b* kepada nilai *a* dengan nilai *a* berubah. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut.	Nilai *b* berubah didapati dengan konsep gandaan, iaitu gandaan bagi niali *b* asal kepada nilai *a* asal darab dengan nilai *a* berubah. Contohnya, Nilai b = *b*/*a* × nilai *a* berubah.

	Contoh: $\frac{3}{2} \times 12km = 18km$ yang mana 3/2 mewakili gandaan bagi jarak Ah Seng kepada jarak Ali, 12km mewakili jumlah jarak Ali dan 18km mewakili jumlah jarak Ah Seng.	
Nilai *a* dan nilai *b* masing-masing diasimilasikan sebagai pengangka dan penyebut bagi pecahan, nilai *a* berubah dan nilai b berubah masing-masing juga diasimilasikan.sebagai. pengangka dan penyebut, dan pecahan bagi nilai *a* kepada nilai *b* dan pecahan nilai *a* berubah kepada nilai *b* berubah diasimilasikan sebagai pecahan setara.	C. **Konsep Pecahan Setara** 1. Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Apabila Ali berlari 2km, Ah Seng akan berlari 3km, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai. 2. Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari? 3. Menentu situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum yang diketahui: Contoh: Menentukan situasi yang diteliti mempunyai kesamaan ciri dengan pecahan setara, iaitu pecahan bagi jarak *a* kepada jarak *b* dengan pecahan bagi jarak *a* berubah kepada jarak *b* berubah. 4. Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut. Contoh: $\frac{2^{\times 6}}{3_{\times 6}} = \frac{12}{?}$ yang mana 2 mewakili 2km, iaitu jarak Ali berlari, 3 mewakili 3km, iaitu jarak Ah Seng berlari, 12 mewakili 12km mewakili jumlah jarak Ali berlari dan ? mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari.	Nilai penyebut *b* yang mewakili nilai *b* berubah, didapati dengan konsep pecahan setara, iaitu pecahan bagi nilai *a* asal kepada nilai *b* asal setara dengan pecahan bagi nilai *a* berubah kepada nilai *b* berubah. Contohnya, *a*/*b* = *a* ubah/*b* ubah.
Nilai *a* berubah diasimilasikan sebagai jumlah kuantiti beberapa kumpulan yang bersaiz nilai *a*, manakala nilai *b* berubah diasimilasikan sebagai jumlah kuantiti beberapa kumpulan yang bersaiz nilai *b*; nilai *a*	D. **Kaedah Pengukuran** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Apabila Ali berlari 2km, Ah Seng akan berlari 3km, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari? . (3) Menentu situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum yang diketahui: Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri	Bilangan kumpulan nilai *b* yang setara dengan bilangan kumpulan nilai *a*, didapati dengan kaedah pengukuran, iaitu daripada sejumlah objek/ nombor/selan, *c* diagihkan secara

diasimilasikan sebagai saiz kumpulan bagi kumpulan nilai *a*, manakala nilai *b* diasimilasikan sebagai saiz kumpulan bagi kumpulan nilai *b*; jumlah bilangan kumpulan nilai *a* dan jumlah bilangan kumpulan nilai *b* diasimilasikan sebagai bilangan yang sama.	dengan kaedah pengukuran, iaitu dengan gambar rajah. yang mana setiap kali agihan kuantiti *a* adalah tetap sehingga jumlah kuantiti yang ditetapkan. Dengan bilangan agihan yang setara dengan kuantiti *a* akan mendapat jumlah kuantiti *b*. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut. Contoh: (i) garis nombor    Dengan mengikut ketetapan pada garis nombor setiap 2 km Ali berlari, Ah Seng akan berlari 3km. Oleh itu, mengasingkan 12km secara dua-dua km. Dengan menjumlahkan kesemua 3km yang setara dengan 12km bagi Ali, maka jumlah jarak Ah Seng berlari akan didapati (ii) Operasi Tambah Berulang (*accumulate)*  	kumpulan dengan kuantiti *a* adalah tetap dengan bilangan agihan yang setara dengan kuantiti *a* akan mendapat jumlah kuantiti *b*.
Jumlah objek diasimilasikan sebagai gandaan bagi bilangan kumpulan yang ditetapkan, beza antara gandaan yang	**E. Gandaan Lebih Besar Dan Terdekat** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula, Maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek dikongsi sama banyak antara beberapa orang.	Beza yang mewakili kuantiti yang diperlukan lagi, didapati dengan mencari beza, *c* antara gandaan, *b*

lebih besar dan terdekat dengan kumpulan yang ditetapkan dan jumlah yang diberi diasimilasikan sebagai kuantiti yang diperlukan lagi.	(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak? (3) Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum. Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan kes mencari gandaan bagi bilangan kumpulan agihan lebih besar dan terdekat dengan nombor yang diberi, kemudian, menolakkan nombor yang diberi daripada gandaan tersebut akan mendapat kuantiti yang diperlukan lagi. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/ rumusan/konsep/kes umum tersebut. Contoh: Mencari kuantiti gula-gula yang diperlukan lagi daripada 43 biji gula-gula supaya kuantitinya cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak, dengan mencari gandaan yang lebih besar dan terdekat dengan nombor 43 dengan sifir 6, iaitu “8 × 6 = 48”. Selepas itu, menolakkan 43 daripada 48 untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi.  	yang lebih besar dan terdekat dengan jumlah objek, *a*. Contohnya, $c = b - a$
Jumlah objek diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, bilangan kumpulan diasimilasikan sebagai nombor bahagi, dan beza antara bilangan kumpulan dengan baki diasimilasikan sebagai kuantiti yang diperlukan lagi.	**F. Gabungan Operasi Bahagi Dan Tolak** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek dikongsi sama banyak antara beberapa orang. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak? (3) Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum. Contoh:	Beza yang mewakili kuantiti objek yang diperlukan lagi, *e,* didapati membahagikan nombor yang diberi, *a* dengan bilangan kumpulan agihan, *b* untuk mendapat kuantiti dalam setiap kumpulan, c dan bakinya, *d* , kemudian menolak baki daripada

	Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan kes membahagikan nombor yang diberi dengan bilangan kumpulan agihan untuk mendapat bakinya, kemudian menolak baki daripada bilangan kumpulan tersebut untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi bagi nombor yang diberikan agar setiap kumpulan mendapat kuantiti yang sama. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/ rumusan/konsep/kes umum tersebut. Contoh: Membahagikan 43 biji gula-gula dengan 6 orang kanak-kanak untuk mendapat bakinya. Kemudian menolakkan bakinya, 1 daripada 6 untuk mendapat bilangan gula-gula yang diperlukan lagi. $43 \div 6 = 7$ b 1 $6 - 1 = 5$ $6 \overline{)43}$ = 7, 42, 1	bilangan kumpulan tersebut untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi. Contohnya $a \div b = c$ baki d $b - d = e$
Jumlah objek diasimilasikan sebagai jumlah objek, bilangan kumpulan objek diasimilasikan bilangan kumpulan objek dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama. kuantiti objek yang tidak cukup untuk diagihkan kepada bilangan kumpulan tertentu diasimilasikan sebagai kuantiti yang diperlukan lagi.	**G. Kaedah Pemetakan** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi Contoh: 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula, Maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek dikongsi sama banyak antara beberapa orang. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak? (3) Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum. Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan kaedah pemetakan, iaitu mengagihkan sejumlah objek ke dalam bilangan kumpulan tertentu dengan kuantiti yang sama, dan kuantiti objek yang tidak cukup diagihkan kepada bilangan kumpulan yang ditetapkan adalah bakinya. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut dengan gambar rajah. Contoh: Melukis 43 buah bulatan yang mewakili 43 biji gula-gula. Kemudian mengagihkannya satu demi satu kepada enam gambar orang yang mewakili enam orang kanak-kanak sehingga habis diagihkan. Didapati lajur terakhir hanya ada satu bulatan sahaja dan ada lima baris tidak ada bulatan. Ini bermakna bakinya 1, dan perlu 5 lagi bulatan kecil untuk mencukupkan lajur itu, iaitu	Kuantiti objek yang tidak cukup untuk diagihkan kepada bilangan kumpulan tertentu, *e* yang mewakili kuantiti yang diperlukan lagi, didapati dengan kaedah pemetakan, iaitu mengagihkan sejumlah objek, *a* ke dalam bilangan kumpulan tertentu, *b* dengan kuantiti yang sama, *c* dan kuantiti objek yang tidak cukup diagihkan kepada bilangan kumpulan yang ditetapkan adalah bakinya, *d*. Kuantiti kumpulan tolak baki akan mendapat bilangan yang

	mewakili masih perlu 5 biji gula-gula lagi agar setiap kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak. 	diperlukan lagi. Contohnya $a \div b = c$ baki d $b - d = e$
Beza antara jumlah objek dan dengan baki diasimilasikan sebagai objek yang perlu diagihkan; bilangan orang yang mendapat objek diasimilasikan sebagai nombor bahagi, dan hasil bahagi diasimilasikan sebagai kuantiti objek yang diperoleh setiap kumpulan.	H. **Faktor Dalam Ayat Matematik Bahagi** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek, perlu tinggal baki yang ditetapkan. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?". (3) Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum. Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan kes menolak baki yang diberi daripada jumlah objek untuk mendapat kuantiti yang perlu diagihkan. Selepas itu mencari ayat matematik bahagi tanpa baki dengan nombor yang dibahagi mewakili kuantiti yang diperlukan, nombor bahagi dan hasil bahaginya lebih besar daripada baki yang diberi. Nombor bahagi dan hasil bahagi adalah dua faktor pembahagian. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut. Contoh: b = 24 b ÷ 8 = 24 ÷ 8 = 3 b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = × b ÷ 8 = 24 ÷ 8 = 3 b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = × b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4 b ÷ 5 = 24 ÷ 5 = × b ÷ 4 = 24 ÷ 4 = 6 b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8 b ÷ 2 = 24 ÷ 2 = 12 b ÷ 1 = 24 ÷ 1 = 24 b ÷ 12 = 24 ÷ 12 = 2	Faktor dalam ayat matematik bahagi, yang didapati dengan kes umum, iaitu mencari faktor (b dan c) dalam ayat matematik bahagi. Contohnya $a \div b = c$ yang mana, a mewakili jumlah objek yang perlu diagihkan, b mewaikili bilangan kumpulan/ saiz kumpulan, dan c mewakili saiz kumpulan/ bilangan kumpulan.

Beza antara jumlah objek ditolak dengan baki diasimilasikan sebagai objek yang perlu diagihkan; nombor darab diasimilasikan sebagai bilangan orang yang mendapat objek, dan hasil darab diasimilasikan sebagai kuantiti objek yang diperoleh setiap kumpulan.	I. **Faktor Dalam Ayat Matematik Darab** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek, perlu tinggal baki yang ditetapkan. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?”. (3) Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum. Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri kes menolakkan baki daripada jumlah objek untuk mendapat kuantiti yang perlu diagihkan. Kemudian menyenaraikan semua ayat matematik darab dengan hasil darabnya sama dengan kuantiti tersebut. Selepas itu, mencari nombor yang didarab dan nombor darab sesuatu ayat matematik darab yang lebih besar daripada baki, iaitu dua faktor bagi kuantiti tersebut yang akan menghasilkan baki seperti yang diberikan. (4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut. Contoh: “27 – 3 = 24”, “1 × 24”, “2 × 12”, “3 × 8”, “4 × 6”, “6 × 4”, “8 × 3”, “12 × 2”, “24 × 1” yang mana 27 mewakili nombor yang diberi, 24 mewakili bezanya dan nombor yang diperlukan, 3 mewakili bakinya, dan “1 × 24”, “2 × 12”, “3 × 8”, “4 × 6”, “6 × 4”, “8 × 3”, “12 × 2”, “24 × 1 mewakili faktor 24.”	Faktor dalam ayat matematik darab, yang didapati dengan kes umum, iaitu mencari faktor (*b* dan *c*) dalam ayat matematik darab.. Contohnya $a \times b = c$ yang mana, *a* mewakili jumlah objek yang perlu diagihkan, *b* mewaikili bilangan kumpulan/ saiz kumpulan, dan *c* mewakili saiz kumpulan/ bilangan kumpulan.
Jumlah objek diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, Bilangan kumpulan objek diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan, dan hasil bahagi diasimilasikan sebagai kuantiti objek dalam setiap kumpulan.	J. **Baki Bagi Ayat Matematik Bahagi** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek, perlu tinggal baki yang ditetapkan. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?”. (3) Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan formula/rumusan/konsep/kes umum. Contoh: Menentukan situasi yang diteliti ada kesamaan ciri dengan kes menyenaraikan kesemua kemungkinan, iaitu	Nombor bahagi mewakili kuantiti objek dan hasil bahagi mewakili bilangan kumpulan objek, yang didapati dengan mencari ayat matematik bahagi yang mempunyai baki yang

ayat matematik bahagi dengan nombor yang dibahagi sama dengan jumlah objek, kemudian mempertimbangkan ayat matematik bahagi yang mempunyai baki yang sama dengan baki yang diberikan, yang mana bilangan kumpulan dan kuantiti objek yang diperlukan boleh didapati dengan mengambil nombor bahagi dan hasil bahagi yang lebih besar daripada baki.

sama dengan baki yang diberi

Contohnya
$a \times b = c$ baki d

(4) Membuat kesimpulan khusus berdasarkan formula/rumusan/konsep/kes umum tersebut.

Contoh:

27 ÷ 2 = 13 b 1
27 ÷ 3 = 9
27 ÷ 4 = 6 b 3 ✓
27 ÷ 5 = 5 b 2
27 ÷ 6 = 4 b 3 ✓
27 ÷ 7 = 3 b 6
27 ÷ 8 = 3 b 3 ✓
27 ÷ 9 = 3
27 ÷ 10 = 2 b 7
27 ÷ 11 = 2 b 5
27 ÷ 12 = 2 b 3 ✓

II. Penaakulan Induktif

A. Konsep Kadaran

Perkaitan antara nilai *a* dengan nilai *b* diasimilasikan sebagai nilai *a* berkadar dengan nilai *b*

(1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi.

Contoh:

Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai.

(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan.

Contoh:

Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari?

Rumusan melibatkan konsep kadaran, iaitu nilai *b* berubah sama dengan nilai *a* berubah bahagi nilai *a* darab nilai *b*. Contohnya *b* berubah = *a* berubah ÷ *a* × *b*,

.

(3) Mengumpul beberapa kes khusus yang mempunyai kesamaan ciri melalui pemerhatian/uji kaji.

Contoh:

Mengumpul contoh tentang perubahan nilai *y* dan nilai *z*, yang mana jika nilai *y* digandakan 1 kali, maka nilai *z* juga digandakan 1 kali; jika nilai *y* digandakan 2 kali, maka nilai *z* juga digandakan 2 kali .

Ali	Seng
2km	3km
×6	×6
12km	18km

yang mana 2km mewakili jarak Ali berlari, 3km mewakili jarak Ah Seng berlari, ×6 mewakili 6 kali gandaan, 12km mewakili jumlah jarak Ali berlari dan 18 km mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari.

(4) Menentukan ketetapan/pola/peraturan daripada data/eviden/kes/contoh khusus yang didapati dengan membanding, mengkategori, menganalisis dan mensintesis, mengabkstrak dan merumus.

Contoh:

Menentukan pola berdasarkan gandaan di antara jarak Ali berlari dan jarak Ah Seng berlari, iaitu jika jarak Ali berlari digandakan *x* kali, maka jarak Ah Seng berlar juga perlu digandakan *x* kali.

Contohnya:

Ali	Seng
2km	3km
×6	×6
12km	18km

mendapat pola

“2”→”3”, “2 x”→”3x”, “$2x = a$”,

“$x = a \div 2$”, dan “$3x = b = a \div 2 \times 3$”

(5) Membuat hipotesis berdasarkan pola/kes khusus yang didapati.

Contoh:

$b = a \div 2 \times 3$

yang mana *“x”* mewakili gandaan, *a* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, *b* mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari, simbol “÷” mewakili pembahagian, “2” mewakili jarak Ali berlari, manakala simbol “×” mewakili pendaraban, dan “3” mewakili jarak Ah Seng berlari. Oleh itu, ($a \div 2$) akan mendapat gandaan 2 km, iaitu 6 kali ganda dan $b = (a \div 2) \times 3$, iaitu 6 kali ganda bagi 3 km ialah jumlah jarak Ah Seng berlari.

(6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/ penerangan yang logikal.

Contoh:

Jika *a* ialah 12, maka dengan rumusan: “$a \div 2 \times 3$”, $12 \div 2 \times 3 = 18$. Jika Ali telah berlari 2 km, dengan rumusan, “$2 \div 2 \times 3 = 3$ ”, Ah Seng akan berlari 3km. Ini sama seperti nilai yang diberi dalam masalah.

(7) Membuat kesimpulan/rumusan umum daripada hipotesis.

Contoh: $b = a \div 2 \times 3$,

yang mana b mewakili jarak B berlari, a mewakili jumlah jarak A berlari, 2 mewakili jarak asal A berlari dan 3 mewakili jarak asal B berlari.

Nilai *b* diasimilasikan sebagai gandaan bagi nilai *a*, dan nilai *b* berubah diasimilasikan sebagai gandaan bagi nilai *a* berubah.

B. Konsep Gandaan

(1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi.
Contoh:
Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai.

(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan.
Contoh:
Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari?

(3) Mengumpul contoh mencari nilai *b* yang telah berubah dengan menggunakan gandaan bagi nilai *b* asal kepada nilai *a* asal darab nilai *a* yang telah berubah.
Contohnya:

$$\frac{3}{2} \times 12km = 18km$$

3km mewakili jarak Ah Seng berlari manakala 2km mewakili jarak Ali berlari dan 3/2 mewakili gandaan bagi jarak Ah Seng berbanding dengan jarak Ali. Simbol "×" mewakili darab, 12km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, dan 18km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng. Didapati jarak Ah Seng adalah 3/2 kali ganda jarak Ali, jika jumlah jarak Ali ialah 12km, maka jumlah jarak Ah Seng adalah 3/2 kali ganda 12km, iaitu 18km.

(4) Menentukan pola berdasarkan cara penyelesaian, iaitu mendapat gandaan nilai *b* kepada nilai a terlebih dahulu, kemudian mendarabkan nilai *a* berubah dengan gandaan tersebut untuk mendapat nilai *b* berubah.
Contohnya:

$$\frac{3\cancel{km}}{2\cancel{km}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \times 12km = 18km$$

Mendapat pola

$$b = \frac{3}{2} \times a$$

(5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati.
Contohnya:

$$b = \frac{3}{2} \times a$$

yang mana 3/ 2 mewakili gandaan, *a* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali dan *b* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng.

(6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/ penerangan yang logikal.

Contohnya:

Rumusan melibatkan konsep gandaan, iaitu nilai *b* berubah sama dengan gandaan bagi nilai *b* kepada nilai *a* darab nilai *a* berubah. Contohnya *b* berubah = *a/b* × *a* berubah.

Jika jumlah jarak Ali, *a* ialah 12km , maka dengan rumusan, “3/2 × 12 = 18”, jumlah jarak Ah Seng, *b* akan didapati,iaitu 18km. “3/2 × *a* = *b*” boleh ditulis sebagai “3/2 = *b*/*a*”, maka “3/2” adalah pecahan setara bagi “18/12” kerana (18 ÷ 6)/(12 ÷ 6) = 3/2. Ini bermaksud bilangan gandaan jarak Ah Seng berbanding dengan jarak Ali adalah sentiasa sama.

(7) Membuat kesimpulan/rumusan umum berdasarkan hipotesis.

Contohnya:

$b = 3/2 \times a$,

yang mana *b* mewakili jumlah jarak *b*, manakala *a* mewakili jumlah jarak *a*, 3/2 mewakili gandaan bagi nilai *a*.

Nilai *a* dan nilai *b* masing-masing diasimilasikan sebagai pengangka dan penyebut bagi pecahan, nilai *a* berubah dan nilai b berubah masing-masing juga diasimilasikan sebagai. pengangka dan penyebut bagi pecahan; dan pecahan bagi nilai *a* kepada nilai *b* dan pecahan nilai *a* berubah kepada nilai *b* berubah diasimilasikan sebagai pecahan setara.

C. Konsep Pecahan Setara

(1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi.

Contoh:

Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai.

(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan.

Contoh:

Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari?

(3) Mengumpul contoh mencari nilai *b* yang telah berubah dengan menggunakan pecahan setara yang melibatkan pecahan nilai *a* asal kepada nilai *b* asal setara dengan nilai *a* yang telah berubah kepada nilai b yang telah berubah.

Contohnya:

$$\frac{2^{\times 6}}{3_{\times 6}} = \frac{12}{?}$$

2 mewakili jarak asal Ali berlari, 3 mewakili jarak asal Ah Seng berlari,manakala 12 mewakili jumlah jarak Ali berlari, “?” mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari dan “× 6” mewakili 6 kali ganda.

(4) Menentukan pola berdasarkan cara penaakulan, iaitu membentuk pecahan setara, iaitu pecahan bagi nilai *a* asal kepada nilai *b* asal, dan pecahan bagi nilai *a* yang telah berubah kepada nilai *b* yang telah berubah.

Contohnya:

$$\frac{2^{\times 6}}{3_{\times 6}} = \frac{12}{?}$$

Mendapat pola

$$\frac{2^{\times 9}}{3_{\times 9}} = \frac{x}{y}$$

(5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati.

Contohnya:

Rumusan melibatkan pecahan setara untuk mendapat nilai *b* berubah, iaitu pecahan nilai *a* kepada nilai *b* setara dengan pecahan bagi nilai a berubah kepada nilai *b* berubah. Contohnya *a/b*= *a* berubah/ *b* berubah.

$$\frac{2^{\times a}}{3 \times a} = \frac{x}{y}$$

yang mana *x* mewakili jumlah jarak Ali berlari, 2 mewakili jarak asal Ali berlari,*a* mewakili bilangan gandaan 2 dalam *x*, manakala 3 mewakili jarak asal Ah Seng berlari dan *y* mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari.

(6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/ penerangan yang logikal.

Contohnya:

Apabila Ali berlari 2km, Ah Seng akan berlari 3km, jika jumlah jarak Ali berlari ialah 12km, cari jumlah jarak Ah Seng berlari. Dengan menggunakan rumusan: 2/3 = 12/18. 12/18 adalah pecahan setara bagi 2/3.

(7) Membuat kesimpulan/rumusan umum berdasarkan hipotesis.

Contohnya:

2/ 3 = *x*/*y*

yang mana 2 mewakili jarak asal A, 3 mewakili jarak asal B, manakala *x* mewakili jarak A yang telah berubah, *y* mewakili jarak B yang telah berubah dan "× *a*" mewakili a kali ganda.

Nilai *a* berubah diasimilasikan sebagai hasil tambah bagi beberapa kumpulan bersaiz nilai *a* ; bilangan kumpulan nilai *a* diasimilasikan sebagai bilangan yang setara dengan bilangan kumpulan nilai *b*.

D. Kaedah pengukuran

(1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi.

Contoh:

Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan ukuran panjang, unit km dan perkaitan antara dua nilai.

(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan.

Contoh:

Jika Ali berlari sejauh 12km, berapa jauhkah Ah Seng berlari?

(3) Mengumpul contoh menggunakan kaedah pengukuran menggunakan operasi tambah berulang atau melukis gambar rajah dengan mengagihkan objek secara kumpulan dengan kuantiti objek yang sama, iaitu nilai *a* berubah diasingkan secara kumpulan yang bersaiz nilai *a*, kemudian nilai *b* berubah didapati dengan menambahkan bilangan kumpulan bersaiz nilai *b* dengan bilangannya sama dengan bilangan kumpulan bersaiz a

Contohnya:

Ali : 2km + 2km + 2km + 2km + 2km + 2km

Ah Seng : (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km)

2km adalah jarak Ali berlari, 2km tambah enam kali bermaksud Ali telah berlari enam kali 2km, manakala (2 km+1km) mewakili Ah Seng berlari lebih Ali 1km apabila Ali berlari 2km. (2km + 1km) tambah enam kali

Rumusan yang melibatkan kaedah pengukuran menggunakan operasi tambah berulang atau melukis gambar rajah mengagih objek secara kumpulan dengan kuantiti yang sama, iaitu nilai b berubah sama dengan nilai *a* berubah tambah gandaan bagi nilai *a* berubah kepada nilai *a*, darab beza antara nilai *b* dan nilai *a*; atau gandaan nilai a berubah

	bermaksud Ah Seng telah berlari enam kali (2km + 1 km), iaitu berkadar terus dengan Ali yang berlari enam kali 2km. 4） Menentukan pola berdasarkan kaedah pengukuran dengan operasi tambah berulang, iaitu menambahkan nilai a beberapa kali sehingga mendapat nilai a berubah, kemudian menambah bilai b dengan bilangan kumpulan yang sama dengan nilai a untuk memperoleh nilai b berubah. Contohnya: Ali : 2km + 2km + 2km + 2km + 2km + 2km Ah Seng : (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) 12km + 6(1km) = 12km + 6km = 18km Mendapat pola $z = x + x/a\ (b - a)$ （5） Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati. Contohnya: $z = x + x/a\ (b - a)$ yang mana z mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari, x mewakili jumlah jarak Ali berlari, x/a mewakili jumlah bilangan 2km, a mewakili jarak Ali berlari, b mewakili jarak Ah Seng berlari, manakala “+” mewakili tambah,“– ” mewakili tolak, dan ($b - a$) mewakili beza antara jarak Ali dan Ah Seng. (6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/ penerangan yang logikal. Contohnya: Jika Ali berlari 12km, kita guna rumusan: $z = x + x/a$ (b – a) = 12 + 12/2 (3 – 2) = 12 + 6 (1) =18. Jarak Ah Seng berlari ialah 18km, iaitu jarak yang sentiasa lebih daripada jarak Ali berlari. (7) Membuat kesimpulan/rumusan umum berdasarkan hipotesis. Contohnya: $z = x + x/a\ (b - a)$ yang mana z mewakili jumlah jarak bagi B, x mewakili jumlah jarak bagi A, x/a mewakili jumlah kali gandaan, a mewakili jarak A asal, b mewakili jarak B asal, manakala “+ ” mewakili tambah,“– ” mewakili tolak, dan ($b - a$) mewakili beza antara jarak A asal dan B asal.	kepada nilai a darab dengan nilai b. Contohnya, b berubah = a berubah + a berubah $/a$ ($b - a$).
Jumlah objek diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, bilangan kumpulan diasimilasikan sebagai nombor bahagi, dan beza antara	**E. Gabungan Operasi Bahagi Dan Tolak** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula, Maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek dikongsi sama banyak antara beberapa orang. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan.	Rumusan melibatkan gabungan operasi bahagi dan tolak, iaitu jumlah objek, a bahagi bilangan kumpulan, b untuk

bilangan kumpulan dengan baki diasimilasikan sebagai kuantiti yang diperlukan lagi.	Contoh: Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak- kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak? (3) Mengumpul beberapa data/eviden/kes/contoh khusus yang mempunyai ciri yang sama melalui pemerhatian/ ujikaji. Contoh: Mengumpul contoh nombor yang diberi dibahagikan dengan bilangan kumpulan agihan untuk mendapat baki, kemudian menolakkan baki daripada bilangan kumpulan agihan untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi. Contohnya: $43 \div 6 = 7 \text{ b} 1$ $\begin{array}{r} 7 \\ 6\overline{)43} \\ 42 \\ \hline 1 \end{array}$ $6 - 1 = 5$ yang mana 43 mewakili nombor yang diberi, 6 mewakili bilangan kumpulan, 7 mewakili kuantiti gula dalam setiap kumpulan, dan 1 mewakili baki. (4) Menentukan ketetapan/pola/peraturan daripada data/eviden/kes/contoh khusus yang didapati dengan membanding, mengategori, menganalisis dan mensintesis, mengabkstrak dan merumus. Contoh: Menentukan pola berdasarkan langkah penyelesaian yang menggunakan operasi bahagi dan tolak. Daripada 43 ÷ 6 = 7 baki 1, 6 – 1 = 5, mendapat pola $x \div 6 = a \text{ baki } b$ $6 - b = c$ (5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati. Contohnya: Membuat hipotesis daripada pola yang didapati: $x \div 6 = a \text{ baki } b$ $6 - b = c$ yang mana *x* mewakili 43 biji gula-gula, 6 mewakili 6 orang kanak-kanak, simbol "÷" mewakili bahagi, *a* mewakili bilangan gula-gula yang diagihkan kepada setiap kanak-kanak, *b* mewakili bakinya, manakala *c* mewakili beza, iaitu kuantiti gula-gula yang masih kurang. (6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan melakukan uji kaji/penerangan yang logikal. Contohnya: Jika jumlah gula-gula yang ada ialah 43, maka, "43 ÷ 6 = 7 baki 1" dan "6 – 1 = 5", iaitu masih memerlukan 5 biji gula-gula lagi. Jika jumlah gula-gula ialah 7 biji, maka, "7 ÷ 6 = 1 baki 1" dan "6 – 1 = 5", iaitu masih memerlukan 5 biji gula-gula lagi. 7 biji gula-gula diagihkan kepada 6 orang akan tinggal sebiji gula-gula yang hanya cukup diagihkan kepada seorang sahaja,	mendapat kuantiti dalam satu kumpulan, *c* dan baki, *d*. Kemudian bilangan kumpulan, *b* tolak baki, *d* untuk mendapat kuantiti objek yang diperlukan lagi, *e*. Contohnya $a \div b = c$ baki d $b - d = e$

yang lima orang lagi tidak memperoleh gula-gula.
Dengan itu, kita memerlukan 5 biji gula-gula lagi. supaya setiap orang mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak.

(7) Membuat kesimpulan/rumusan umum daripada hipotesis yang dibina.
Contohnya:

$x \div 6 = a$ baki b

$6 - b = c$

yang mana *a* mewakili nombor yang diberi, 6 mewakili bilangan kumpulan yang diperlukan, *c* mewakili bilangan kumpulan yang diperlukan, *c* mewakili baki dan *d* mewakili kuantiti yang diperlukan lagi.

Jumlah objek diasimilasikan sebagai gandaan bagi bilangan kumpulan yang ditetapkan, beza antara gandaan yang lebih besar dan terdekat bagi kumpulan yang ditetapkan dan jumlah yang diberi diasimilasikan sebagai kuantiti objek yang diperlukan lagi.

F. Gandaan Lebih Besar Dan Terdekat

Rumusan melibatkan gandaan untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi, *d* sama dengan beza antara gandaan bagi bilangan kumpulan yang lebih besar dan terdekat dengan jumlah objek (nombor, *a* darab bilangan kumpulan, *b*), dan jumlah objek yang diberi, c. Contohnya, $a \times b - c = d$

(1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi.
Contoh:
6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek dikongsi sama banyak antara beberapa orang.

(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan.
Contoh:
Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak?

(3) Mengumpul contoh tentang bilangan kumpulan yang diberi darab dengan sesuatu nombor untuk mendapat gandaan yang lebih besar daripada nombor yang diberi, kemudian menolak nombor yang diberi daripada gandaan tersebut.
Contohnya:

$8 \times 6 = 48$

$48 - 43 = 5.$

8 mewakili nombor yang digunakan untuk mendapat gandaan 6 yang lebih besar daripada nombor yang diberi, 43 mewakili nombor yang diberi, dan 5 mewakili kuantiti yang diperlukan lagi.

(4) Menentukan pola berdasarkan langkah penyelesaian yang menggunakan operasi darab dan tolak.
Contohnya:
Daripada $8 \times 6 = 48$, $48 - 43 = 5$
mendapat pola
$a \times 6 - 43 = b$

(5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati.
Contohnya:
Membuat hipotesis daripada pola yang didapati:
$a \times 6 - 43 = b$, yang mana $(a \times 6) > 43$
a mewakili kuantiti gula-gula yang diperoleh oleh setiap

	kanak-kanak, 6 mewakili bilangan kanak-kanak, dan "×" mewakili darab, 43 mewakili kuantiti gula-gula yang diberi, b mewakili beza, hasil darab bagi ($a \times 6$) perlu lebih besar daripada 43 dengan itu baru ada beza. (6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/ penerangan yang logikal. Contohnya: Jika ada 43 biji gula-gula nak tambah berapa biji gula-gula agar enam orang budak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak? Dari sifir didapati 43 terletak di antara hasil darab 42 dan 48, maka 43 ditolak dari 48 akan mendapat 5, iaitu masih perlu 5 biji gula-gula lagi. Ini kerana 43 diagihkan kepada 6 orang budak, setiap orang akan mendapat 7 biji dan tinggal 1 biji. Jika 48 biji gula-gula diagihkan kepada 6 orang budak setiap orang akan mendapat 8 biji gula-gula tanpa baki. Dengan cara ini, senang kita tahu kuantiti yang diperlu lagi. (7) Membuat kesimpulan/rumusan umum daripada hipotesis. Contohnya: $a \times 6 - 43 = b$, di mana $(a \times 6) > 43$, yang mana a mewakili nombor yang mendarab bilangan kumpulan mendapat gandaan yang lebih besar dan terdekat dengan nombor yang diberi, 6 mewakili bilangan kumpulan, dan 43 mewakili nombor yang diberi, manakala b mewakili kuantiti yang diperlukan lagi.	
Jumlah objek diasimilasikan sebagai gandaan bagi bilangan kumpulan yang ditetapkan; beza antara gandaan bagi kumpulan yang ditetapkan dan jumlah yang diberi diasimilasikan sebagai kuantiti yang diperlukan lagi.	**G. Gandaan Lebih Kecil Dan Terdekat** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek dikongsi sama banyak antara beberapa orang. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak? (3) Mengumpul contoh tentang bilangan kumpulan yang diberi tolak dengan sesuatu gandaan enam yang lebih kecil dan terdekat dengan nombor yang diberi untuk mendapat beza, kemudian menambahkan beza dengan sesuatu nombor untuk mendapat kuantiti yang sama dengan bilangan kumpulan tersebut. Contohnya: $43 - 7(6) = 1$, $1 + 5 = 6$ (4) Menentukan pola berdasarkan langkah penyelesaian yang menggunakan operasi darab dan tolak. Contohnya: Daripada	Rumusan melibatkan gandaan untuk mendapat kuantiti yang diperlukan lagi,iaitu kuantiti yang diperlukan lagi, *c* tambah dengan beza, *a* bagi gandaan bagi bilangan kumpulan yang lebih kecil dan terdekat dengan jumlah objek (gandaan, *n* bagi bilangan kumpulan, *b*) dengan jumlah objek yang diberi, *x* sama

	$43 - 7(6) = 1$, $1 + 5 = 6$, mendapat pola $x - n(6) = a$ $a + b = 6$ (5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati. Contohnya: Membuat hipotesis daripada pola yang didapati: $x - n(6) = a$ $a + b = 6$ yang mana *x* mewakili 43 biji gula-gula, *n* mewakili bilangan 6 yang ditolak, *a* mewakili beza bagi nombor yang diberi dan jumlah kesemua enam yang telah ditolakkan, manakala *b* mewakili bilangan yang diperlukan lagi (6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/ penerangan yang logikal. Contohnya: $35 - 6 = 29$, $29 - 6 = 23$, $23 - 6 = 17$, $17 - 6 = 11$, $11 - 6 = 5$ $5 + 1 = 6$ $35 - 5(6) = 5$ "35 – 5(6)" bermaksud 35 ditolak 6 sebanyak 5 kali, iaitu 35 biji gula-gula diagihkan secara enam-enam, dengan itu setiap kali perlu tolakkan enam biji gula-gula. Akhirnya tinggal lima biji. Lima perlu tambah 1 baru cukup 6. Dengan itu, terbuktilah, rumusan di atas adalah betul. (7) Membuat kesimpulan/rumusan umum daripada hipotesis. Contohnya: $x - n(6) = a$ $a + b = 6$ yang mana *x* mewakili nombor yang diberi, *n* mewakili jumlah kali bilangan kumpulan yang ditolak, *a* mewakili beza bagi nombor yang diberi dan n kali gandaan bagi bilangan kumpulan yang telah ditolakkan, manakala *b* mewakili bilangan yang diperlukan lagi.	dengan bilangan kumpulan. Contohnya, $x - n(b) = a$, $a + c = b$
Beza antara jumlah objek dan baki yang diberi diasimilasikan sebagai hasil darab, kedua-dua	**H. Faktor Dalam Ayat Matematik Darab** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek, perlu tinggal baki yang ditetapkan.	Rumusan melibatkan faktor dalam ayat matematik darab, iaitu jumlah objek, *a* tolak baki, *b*

faktor pendaraban diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan dan kuantiti objek dalam setiap kumpulan masing-masing.	(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?". (3) Mengumpul contoh tentang baki ditolak daripada nombor yang diberi untuk mendapat hasil tolak yang diperlukan untuk membuat agihan. Kemudian menyenaraikan kesemua ayat matematik darab dengan hasil darabnya sama dengan hasil tolak tersebut atau menunjukkan dengan gambar rajah bilangan kumpulan agihan dan kuantiti agihan dalam setiap kumpulan. Contohnya: "$27 - 3 = 24$", "$1 \times 24 = 24$", "$2 \times 12 = 24$", "$3 \times 8 = 24$ ", "$4 \times 6 = 24$", "$6 \times 4 = 24$", "$8 \times 3 = 24$", "$12 \times 2 = 24$", "$24 \times 1 = 24$" (4) Menentukan pola berdasarkan langkah penyelesaian yang menggunakan operasi bahagi dan tolak. Contohnya: $27 - 3 = 24$, dan $x \times y = 24$, x dan $y > 3$ "$1 \times 24 = 24$", "$2 \times 12 = 24$", "$3 \times 8 = 24$ ", "$4 \times 6 = 24$", "$6 \times 4 = 24$", "$8 \times 3 = 24$", "$12 \times 2 = 24$", "$24 \times 1 = 24$" Mendapat pola $27 - 3 = 24$, dan $x \times y = 24$, x dan $y > 3$ (5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati. Contohnya: $27 - 3 = 24$, dan $x \times y = 24$, x dan $y > 3$ yang mana 27 mewakili 27 biji durian, simbol " – " mewakili tolak, 3 mewakili bilangan durian yang tinggal dan 24 mewakili jumlah durian yang diagihkan kepada jiran, manakala x mewakili bilangan jiran dan y mewakili bilangan durian yang diagihkan kepada setiap jiran. x dan y perlu lebih besar daripada 3. (6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/ penerangan yang logikal. Contohnya: Jika kedua-dua faktor dalam ayat matematik darab lebih besar daripada 3, maka bakinya boleh dapat 3. Contohnya "$4 \times 6 = 24$", boleh ditulis sebagai "$24 \div 4 = 6$", atau "$24 \div 6 = 4$". Jika "$24 \div 4 = 6$" digunakan maka nombor bahaginya ialah 4, ini bermaksud durian itu diagihkan secara empat-empat. 3 adalah tidak cukup 4 maka ayat matematik darab ini sesuai digunakan Jika "$24 \div 6 = 4$" digunakan maka nombor bahaginya ialah 6, ini bermaksud durian itu diagihkan secara enam-enam. 3 adalah tidak cukup 6 maka ayat matematik darab ini sesuai digunakan. (7) Membuat kesimpulan/rumusan umum daripada hipotesis. Contohnya: $27 - 3 = 24$, dan $x \times y = 24$, x dan $y > 3$ yang mana 27 mewakili jumlah objek yang diberi, simbol " – " mewakili tolak, 3 mewakili baki dan 24	sama dengan kuantiti yang diperlukan, c. Kuantiti objek yang diperlukan, c sama dengan x darab y, yang mana x dan y adalah dua faktor pendaraban dengan nilainya lebih besar daripada baki, b, dan x mewakili bilangan kumpulan dan y mewakili kuantiti dalam setiap kumpulan. Contohnya, $a - b = c$, $c = x \times y$

mewakili jumlah objek yang perlu diagihkan, manakala *x* mewakili bilangan kumpulan dan *y* mewakili bilangan objek dalam kumpulan, *x* dan *y* perlu lebih besar daripada baki.

Beza antara jumlah objek dan baki yang diberi diasimilasikan sebagai hasil bahagi, nombor bahagi dan hasil bahagi diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan dan kuantiti objek dalam setiap kumpulan masing-masing.

I. Faktor Dalam Ayat Matematik Bahagi

(1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi.
Contoh:
Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek, perlu tinggal baki yang ditetapkan.

(2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan.
Contoh:
Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?".

(3) Mengumpul contoh tentang baki ditolak daripada nombor yang diberi untuk mendapat hasil tolak yang diperlukan untuk membuat agihan. Kemudian menyenaraikan kesemua ayat matematik bahagi dengan nombor yang dibahagi sama dengan hasil tolak tersebut.
Contohnya:

27 – 3 = 24", jika b =24",
"b ÷ 1 = 24÷ 1=24", "b ÷ 2 = 24 ÷ 2 =12",
"b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8", "b ÷ 4 = 24 ÷ 4 =6",
"b ÷ 5 = 24 ÷ 5 = X", "b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4",
"b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X", "b ÷ 8 = 24 ÷ 8 =3",
"b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X", "b ÷ 12 = 24 ÷12 =2",
"b ÷ 24 = 24÷ 24 = 1"

(4) Menentukan pola berdasarkan langkah penyelesaian yang menggunakan operasi bahagi dan tolak.
Contohnya:

27 – 3 = 24",
jika b =24",
"b ÷ 1 = 24÷ 1= 24",
"b ÷ 2 = 24 ÷ 2 =12",
"b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8",
"b ÷ 4 = 24 ÷ 4 = 6",
"b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4",
"b ÷ 8 = 24 ÷ 8 = 3",
"b ÷ 12 = 24 ÷12 =2",
"b ÷ 24 = 24÷ 24 = 1"

Mendapat pola

$$n - 3 = b$$
$$b \div a = c$$

(5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati.
Contohnya:

$$n - 3 = b$$
$$b \div a = c$$

Rumusan melibatkan faktor dalam ayat matematik bahagi, iaitu jumlah objek, *a* tolak baki, *b* sama dengan kuantiti yang diperlukan, *c*. Kuantiti objek yang diperlukan, *c* bahagi bilangan kumpulan, *x* sama dengan kuantiti dalam setiap kumpulan, *y*. yang mana *x* dan *y* adalah dua faktor pendaraban dengan nilainya lebih besar daripada baki, *b*.
Contohnya,
$a – b = c$,
$c \div x = y$

	yang mana *n* mewakili 27 biji durian, 3 mewakili baki durian, *b* mewakili 24 biji durian, iaitu kuantiti yang perlu diagihkan kepada beberapa kumpulan, manakala *a* mewakili bilangan jiran yang mendapat durian dan *c* mewakili kuantiti durian yang diagihkan kepada setiap jiran. (6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh / penerangan yang logikal. Contohnya: Jika ada 12 biji durian diagihkan kepada beberapa orang dengan meninggalkan 3 biji durian. Dengan rumusan di atas, “12 – 3 = 9”, kemudian “9 ÷ 1 = 9”, “9 ÷ 2 = X” dan “9 ÷3 = 3”, “9 ÷ 4 = X”, “9 ÷ 5 = X”, “9 ÷ 6 = X”, “9 ÷ 7= X”, “9 ÷ 8 = X”, dan “9 ÷ 9 = 1, 12 biji durian ditolakkan 3 kerana perlu tinggal tiga biji. 9 mewakili 9 biji durian yang perlu diagihkan. X mewakili ayat matematik bahagi itu tidak sesuai digunakan kerana ia tidak boleh dibahagikan dengan sempurna, iaitu ia masih ada baki. Dengan itu, hanya “9 ÷ 1 = 9”, “9 ÷3 = 3” dan “9 ÷ 9 = 1” sahaja sesuai digunakan. Ini kerana ketiga-tiga ayat matematik bahagi ini tidak ada baki. (7) Membuat kesimpulan/rumusan umum daripada hipotesis. Contohnya: $n - 3 = b$, dan $b \div a = c$, a dan b > 3 yang mana *n* mewakili kuantiti yang diberi, 3 mewakili baki, *b* mewakili kuantiti yang perlu diagihkan kepada bilangan kumpulan tertentu manakala *a* mewakili bilangan kumpulan dan *c* mewakili kuantiti objek yang diagihkan. *a* dan *b* perlu lebih besar daripada 3, iaitu bakinya.	
Jumlah objek diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, bilangan kumpulan objek diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan, dan hasil bahagi diasimilasikan sebagai kuantiti objek dalam setiap kumpulan.	**J. Baki Dalam Ayat Matematik Bahagi** (1) Menentukan bentuk maklumat yang diberi. Contoh: Daripada soalan di atas, maklumat yang didapati adalah berkaitan dengan kuantiti objek, perlu tinggal baki yang ditetapkan. (2) Menentukan perkara yang hendak dilakukan. Contoh: Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?”. (3) Mengumpul contoh mendapat baki yang ditetapkan dengan membahagikan nombor yang diberi dengan sebarang nombor. Contohnya:	Rumusan melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi, iaitu jumlah objek, *a* bahagi dengan bilangan kumpulan, *b* sama dengan kuantiti dalam setiap kumpulan, *c* dan baki, *d*. yang mana kuantiti objek dalam setiap kumpulan, *b* mesti lebih besar daripada baki,

$27 \div 2 = 13 \text{ b } 1$
$27 \div 3 = 9$
$27 \div 4 = 6 \text{ b } 3$ ✓
$27 \div 5 = 5 \text{ b } 2$
$27 \div 6 = 4 \text{ b } 3$ ✓
$27 \div 7 = 3 \text{ b } 6$
$27 \div 8 = 3 \text{ b } 3$ ✓
$27 \div 9 = 3$
$27 \div 10 = 2 \text{ b } 7$
$27 \div 11 = 2 \text{ b } 5$
$27 \div 12 = 2 \text{ b } 3$ ✓

d. Contohnya, $a \div b = c$ baki d

(4) Menentukan pola berdasarkan langkah penyelesaian yang menggunakan operasi bahagi dan tolak.
Contohnya:

$27 \div 2 = 13 \text{ b } 1$
$27 \div 3 = 9$
$27 \div 4 = 6 \text{ b } 3$ ✓
$27 \div 5 = 5 \text{ b } 2$
$27 \div 6 = 4 \text{ b } 3$ ✓
$27 \div 7 = 3 \text{ b } 6$
$27 \div 8 = 3 \text{ b } 3$ ✓
$27 \div 9 = 3$
$27 \div 10 = 2 \text{ b } 7$
$27 \div 11 = 2 \text{ b } 5$
$27 \div 12 = 2 \text{ b } 3$ ✓

menjadi

$$27 \div x = y \text{ baki } 3$$
$$y > 3$$

(5) Membuat hipotesis berdasarkan pola yang didapati.
Contohnya:

$$27 \div x = y \text{ baki } 3$$
$$y > 3$$

yang mana 27 mewakili 27 biji durian yang diberi, simbol "÷" mewakili bahagi, dan x mewakili bilangan jiran yang mendapat durian dan y mewakili kuantiti durian dalam setiap kumpulan, dan 3 mewakili baki.

(6) Membuktikan/menjustifikasikan hipotesis dengan contoh/penerangan yang logikal.
Contohnya:
Ini kerana masalah ini ada dua anu, iaitu bilangan jiran dan kuantiti yang diagihkan kepada setiap orang. Kuantiti yang diagihkan perlu lebih daripada baki. Ini kerana jika kuantiti yang diagihkan kepada setiap jiran itu sama atau kurang daripada baki, maka baki itu

cukup diagihkan kepada jiran yang lain.

(7) Membuat kesimpulan/rumusan umum daripada hipotesis.
Contohnya:

$27 \div x = y$ baki 3

$y > 3$

yang mana 27 mewakili bilangan objek yang diberi, simbol "÷" mewakili bahagi, dan *x* mewakili bilangan kumpulan dan *y* mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan, dan 3 mewakili baki, serta *y* mesti lebih besar daripada 3.

Cara Penaakulan Deduktif Dalam Penyelesaian Masalah Melibatkan Pembahagian Nombor Bulat. Daripada kajian ini, didapati semua guru cenderung menggunakan penaakulan deduktif dalam kategori prosedural untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Terdapat dua daripada enam orang responden menggunakan penaakulan deduktif melibatkan konsep kadaran. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 4.1(Kong) menunjukkan penaakulan deduktif dalam kategori prosedural yang menggunakan konsep kadaran, dan dijelaskan dalam urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1(Kong): Masalah Melibatkan Jarak

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis secara menegak "Ali" dan di bawahnya menulis "2km", seterusnya di bawah "2km" menulis "× 6", Akhirnya di bawah "× 6" di tulis "12 km". kemudian menulis secara menegak "Ah Seng" dan di bawahnya menulis "3 km", seterusnya di bawah "3 km" menulis "× 6", Akhirnya di bawah "× 6" di tulis "18km").

Ali	Seng
2km	3km
×6	×6
12km	18km

P: Boleh cikgu terangkan apa yang ditulis itu?
R: 2 km mewakili jarak setiap kali Ali berlari, "× 6" mewakili 6 kali ganda, dan"12km" mewakili jarak yang telah Ali berlari, manakala 3 km mewakili jarak setiap kali Ah Seng berlari jika Ali telah berlari 2 km, "× 6" mewakili 6 kali ganda, dan "18 km" mewakili jarak yang telah Ah Seng berlari jika Ali telah berlari 12 km.
P: Mengapakah cikgu tulis "× 6"? c
R: Ini adalah gandaan, iaitu dalam 12 km ada 6 kali ganda 2 km.
P: Bagaimanakah cikgu tahu dalam 12 km ada 6 kali ganda 2 km?

R: Saya guna operasi bahagi, iaitu “12 ÷ 2 = 6”.
P: Mengapakah pula cikgu guna “12 ÷ 2”?
R: Saya hendak tahu dalam 12 ada berapa 2.
P: Bagaimana cikgu tahu dalam 12 ada berapa 2?
R: Saya guna kaedah pengumpulan bagi operasi bahagi, iaitu saya mengasingkan 12 secara dua-dua untuk mengetahuinya ada berapa 2.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya menulis jarak Ali dan Ah Seng yang telah ditetapkan, iaitu Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3km. Kemudian berdasarkan jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, iaitu 12km, saya perlu mencari Ali telah berlari berapa kali 2 km dalam jumlah 12km itu. Dengan itu, saya membahagikan 12km dengan 2 km untuk mendapat gandaan 2km, iaitu 6 kali ganda. Jika gandaan jarak Ali diketahui, maka gandaan jarak Ah Seng juga akan diketahui kerana gandaan mereka adalah sama. Seterusnya jarak Ah Seng boleh didapati.
P: Mengapakah cikgu perlu mengetahui dalam 12km ada berapa 2km?
R: Ini untuk mengetahui gandaan 2km. Jika gandaan jarak bagi Ali diketahui, maka gandaan Ah Seng juga diketahui, kerana jarak Ali berkadar terus dengan jarak Ah Seng.
P: Mengapakah cikgu guna cara begini?
R: Cara ini secara terus dengan kiraan, iaitu mencari gandaannya akan mendapat jawapan. Saya sentiasa menggunakan operasi asas untuk mencari jawapan
P: Bagaimanakah cikgu tahu cara ini sesuai digunakan?
R: Saya guna contoh, jika Ali telah berlari 20km, cari jarak Ah Seng berlari.(Cikgu menulis 20 ÷ 2 = 10, 3 × 10 = 30).

$20 \div 2 = 10 \quad 3 \times 10 = 30$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: 20 mewakili 20km dan 2 mewakili 2km yang dilalui oleh Ali. “20 ÷ 2” untuk mencari gandaan 2 dalam 20, 10 ialah gandaan bagi 2. Oleh kerana 2km ada 10 kali dalam 20km, maka 3km juga perlu ada 10 kali. Dengan itu, “10 × 3km = 30km”, iaitu Ah Seng telah berlari 30km. Jumlah jarak Ali berlari, iaitu 20km dan jumlah jarak Ah Seng berlari, iaitu 30 m, jika dipermudahkan akan jadi 2 km dan 3km, iaitu sama seperti jarak asal Ali dan Ah Seng berlari. Dengan itu, terbuktilah jarak Ali sentiasa berkadar terus dengan jarak Ah Seng, dan cara ini adalah sesuai digunakan untuk mencari jarak Ah Seng.
P: Dengan cara begini, apakah jawapan cikgu?
R: 18km.

Cara penaakulan dalam penyelesaian masalah bagi Kong melibatkan kadaran, iaitu mencari gandaan bagi nombor *a*, kemudian menggunakan gandaan itu untuk mencari jumlah kuantiti *B*, iaitu (gandaan × nombor *b*). Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis secara menegak “Ali” dan di bawahnya menulis “2 km”, seterusnya di bawah “2 km” menulis “× 6”, Akhirnya di bawah “× 6” ditulis “12 km”. kemudian menulis secara menegak “Ah Seng” dan di bawahnya menulis “3 km”, seterusnya di bawah “3 km” menulis “× 6”, Akhirnya di bawah “× 6” ditulis “18 km”. Beliau menerangkan 2 km mewakili jarak setiap kali Ali berlari, “× 6” mewakili 6 kali, dan “12 km” mewakili jarak yang telah Ali berlari, manakala 3 km mewakili jarak setiap kali Ah Seng berlari jika Ali telah berlari 2 km, “× 6” mewakili 6 kali, dan “18 km” mewakili jarak yang telah Ah Seng berlari jika Ali telah berlari 12 km. Beliau menerangkan lagi, “× 6” adalah gandaan, iaitu dalam 12 km ada 6 kali 2 km. Beliau menggunakan operasi bahagi, iaitu “12 ÷ 2 = 6”, untuk mengetahui dalam 12 ada berapa 2. Beliau menggunakan kaedah pengumpulan bagi operasi bahagi, iaitu beliau mengasingkan 12 secara dua-dua untuk mengetahuinya ada berapa 2.

Cara penaakulan Kong dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak seperti di atas dengan penaakulan deduktif menggunakan konsep kadaran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (A) Konsep Kadaran

Daripada kajian ini juga, didapati tiga daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan deduktif melibatkan gandaan untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 4.1(Kong) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural yang menggunakan gandaan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1 (Kong): Masalah Melibatkan Jarak

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ya. Saya mencari gandaannya. (Cikgu menulis 3km/2km, kemudian memotong kedua-dua km jadi 3/2. Selepas itu, cikgu menulis 3/2 × 12km = 18km).

$$\frac{3\cancel{km}}{2\cancel{km}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \times 12km = 18km$$

P: Tolong jelaskan.

R: 3km mewakili jarak Ah Seng berlari manakala 2km mewakili jarak Ali berlari dan 3/2 mewakili gandaan bagi jarak Ah Seng berbanding dengan jarak Ali. Simbol “×” mewakili darab, 12km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, dan 18km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng. Didapati jarak Ah Seng adalah 3/2 kali ganda jarak Ali, jika jumlah jarak Ali ialah 12km, maka jumlah jarak Ah Seng adalah 3/2 kali ganda 12km, iaitu 18km.

P: Bagaimanakah cikgu tahu cara ini sesuai digunakan untuk mencari jawapan?

R: Jika gandaan bagi suatu nombor *b* kepada suatu nombor *a* diketahui, maka apabila nombor *a* berubah, nombor *b* yang turut berubah itu boleh dilakukan dengan berdasarkan gandaan dan nombor *a* telah berubah itu. Contohnya, jika jumlah jarak Ali berubah dari 2km ke 14km, maka dengan cara ini, “3/2 × 14 = 21”, jumlah jarak Ah Seng ialah 21km. 21/14 apabila dipermudahkan akan dapat 3/2. Ini bermaksud gandaannya sentiasa sama. Dengan itu, cara ini adalah sesuai digunakan untuk mencari jawapan.

P: Dengan cara ini, apakah jawapan didapati?

R: Jawapannya ialah 18 km.

Kong menunjukkan penyelesaian masalah membabitkan penaakulan deduktif menggunakan gandaan dengan menulis 3 km/2 km, kemudian memotong kedua-dua km jadi 3/2. Selepas itu, beliau menulis 3/2 × 12 km = 18 km. Beliau menjelaskan bahawa 3 km mewakili jarak Ah Seng manakala 2 km mewakili jarak Ali dan 3/2 mewakili gandaan bagi jarak Ah Seng kepada jarak Ali. Simbol “×” mewakili darab, 12 km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, dan 18 km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng. Didapati jarak Ah Seng adalah 3/2 kali jarak Ali, jika jumlah jarak Ali ialah 12 km, maka jumlah jarak Ah Seng adalah 3/2 kali 12 km, iaitu 18 km. Beliau menjustifikasikan cara itu sesuai digunakan untuk mencari jawapan dengan menyatakan jika gandaan bagi suatu nombor *b* kepada suatu nombor *a* diketahui, maka apabila nombor *a* berubah, nombor *b* yang turut berubah itu boleh dicari dengan berdasarkan gandaan dan nombor *a* telah berubah itu.

Cara penaakulan deduktif Kong dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak dengan konsep gandaan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (B) Konsep Gandaan.

Selain itu, hasil kajian ini juga mendapati dua daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan deduktif melibatkan pecahan setara dalam penyelesaian masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 4.1(Chong) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural yang menggunakan konsep pecahan setara, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1 (Chong): Masalah Melibatkan Jarak

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Saya guna pecahan setara. (Cikgu menulis 2/3 = 12/?, kemudian di sebelah kanan 2 tulis “× 6” dan di sebelah kanan 3 tulis “× 6”).

$$\frac{2^{\times 6}}{3_{\times 6}} = \frac{12}{?}$$

P: Tolong jelaskan.
R: 2 mewakili jarak asal Ali berlari, 3 mewakili jarak asal Ah Seng berlari, manakala 12 mewakili jumlah jarak Ali berlari, “?” mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari dan “× 6” mewakili 6 kali ganda.
P: Bagaimanakah cikgu selesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya menulis pecahan setara, iaitu 2/3 = 12/?. Kemudian mencari gandaan bagi 2 untuk memperbesarkan 2 jadi 12. Selepas itu mendarabkan gandaan itu dengan 3 untuk mendapat nilai bagi “?”, agar memadankan pecahan setara. Saya guna sifir 2 untuk mencari gandaan itu, iaitu “6 × 2 = 12”, kemudian menggunakan gandaan itu darab dengan 3 akan mendapat 18.
P: Dengan cara ini, apakah jawapannya?
R: 18km.

Cara penaakulan yang digunakan oleh Chong dalam menyelesaikan masalah (1) melibatkan pecahan setara. Beliau menunjukkan cara penaakulannya dengan menulis 2/3 = 12/?, kemudian di sebelah kanan 2 tulis “× 6” dan di sebelah kanan 3 tulis “× 6”. Beliau menerangkan 2 mewakili jarak asal Ali berlari, 3 mewakili jarak asal Ah Seng berlari, manakala 12 mewakili jumlah jarak Ali berlari, “?” mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari dan “× 6” mewakili 6 kali ganda. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula menulis pecahan setara, “2/3 = 12/?”. Kemudian mencari gandaan bagi 2 untuk memperbesarkan 2 menjadi 12. Selepas itu mendarabkan gandaan itu dengan 3 untuk mendapat jarak bagi “?”, agar memadankan pecahan setara. Beliau menyatakan sifir 2 digunakan untuk mencari gandaan itu, iaitu “6 × 2 = 12”, kemudian menggunakan gandaan itu darab dengan 3, iaitu “6 × 3 = 18” akan mendapat 18.

Cara penaakulan deduktif Chong dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak dengan konsep pecahan setara dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (C) Konsep Pecahan Setara.

Selain itu, hasil kajian ini mendapati lima daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan deduktif melibatkan kaedah pengukuran dalam penyelesaian masalah melibatkan jarak. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 4.1(John) menunjukkan cara penaakulan deduktif dalam kategori prosedural yang menggunakan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1 (John): Masalah Melibatkan Jarak

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ada. (Cikgu menulis “Ali: 2 km + 2 km + 2 km + 2 km + 2 km + 2 km”, dan “Ah Seng: “(2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km)”.

Ali : 2km + 2km + 2km + 2km + 2km + 2km
Ah Seng : (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km)
+ (2km + 1km) + (2km + 1km) + (2km + 1km)

P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
R: 2km adalah jarak Ali berlari, 2km tambah enam kali bermaksud Ali telah berlari enam kali 2km, manakala (2km + 1km) mewakili Ah Seng berlari lebih Ali 1km apabila Ali berlari 2km. (2km + 1km) tambah enam kali bermaksud Ah Seng telah berlari enam kali (2km + 1km), iaitu berkadar terus dengan Ali yang berlari enam kali 2km.
P: Mengapakah cikgu 2km tambah enam kali?
R: Saya bahagikan 12km dengan 2km untuk mengetahui dalam 12km adalah berapa 2km.
P: Mengapakah cikgu buat begitu?
R: Dengan pembahagian ini, saya akan mengetahui jumlah bilangan 2km dalam 12 km, maka saya akan dapat tahu jarak Ah Seng berlari, kerana jarak Ah Seng adalah berkadar terus dengan jarak Ali.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya membahagikan 12km dengan 2km untuk mendapat jumlah bilangan 2km dalam 12km. Kemudian, saya menuliskan ayat matematik 2km ditambah berulang sebanyak 6 kali. Dengan itu, saya akan mengetahui jumlah jarak Ah Seng berlari dengan menambahkan (2km + 1km) sebanyak enam kali juga.
P: Mengapakah cikgu menambahkan (2km + 1km) sebanyak enam kali?
R: Ini kerana setiap kali Ali berlari 2km, Ah Seng akan melebihinya 1km, maka saya menjadikan (2km+ 1km) sebagai satu unit, dengan itu (2km + 1km) ditambahkan sebanyak enam kali juga.
P: Dengan cara begini, apakah jawapannya?
R: Ah Seng berlari18km.

Cara penaakulan dalam penyelesaian masalah (1) bagi Tong bertumpu pada ayat matematik penambahan 2 km berulang enam kali dan ayat matematik penambahan (2 km + 1 km) berulang enam kali. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya dengan ayat matematik, iaitu "Ali: 2 km + 2 km + 2 km + 2 km + 2 km + 2 km", dan "Ah Seng: (2 km + 1 km) + (2 km + 1 km) + (2 km + 1 km) + (2 km + 1 km) + (2 km +   1 km) + (2 km + 1 km)". Beliau menerangkan bahawa 2 km adalah jarak Ali berlari, 2 km tambah enam kali bermaksud Ali telah berlari enam kali 2 km, manakala (2 km + 1 km) mewakili Ah Seng berlari lebih Ali 1 km apabila Ali berlari 2 km. (2 km + 1 km) tambah enam kali bermaksud Ah Seng telah berlari enam kali (2 km + 1 km), iaitu berkadar terus dengan Ali yang berlari enam kali 2 km. Beliau menerangkan 2 km ditambah sebanyak enam kali kerana selepas beliau membahagikan 12 km dengan 2 km didapati dalam 12 km adalah enam kali 2 km. Beliau menerangkan lagi, pembahagian itu dilakukan untuk mengetahui jumlah bilangan 2 km dalam 12 km, maka beliau akan mengetahui jarak Ah Seng berlari, kerana jarak Ah Seng adalah berkadar terus dengan jarak Ali.

Cara penaakulan deduktif Tong dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak dengan kaedah pengukuran menggunakan operasi tambah berulang dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (D) Kaedah Pengukuran.

Seterusnya, terdapat lima daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan melibatkan gandaan yang lebih besar dan terdekat dalam menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 4.2(John) menunjukkan cara penaakulan deduktif dalam kategori prosedural melibatkan gandaan yang lebih besar dan terdekat, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.2 (John): Masalah Melibatkan Pengagihan Gula-gula

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ada. Saya guna sifir 6. (Cikgu menulis sifir 6 : 1 × 6 = 6, 2 × 6 = 12, 3 × 6 = 18, 4 × 6 = 24, 5 × 6 = 30, 6 × 6 = 36, 7 × 6 = 42, 8 × 6 = 48, dan 9 × 6 = 54. Cikgu menuliskan satu anak panah di antara 7 × 6 = 42 dan 8 × 6 = 48, kemudaan menulis nombor 43. Seterusnya menulis bentuk lazim 48 – 43 = 5).

$1 \times 6 = 6$
$2 \times 6 = 12$
$3 \times 6 = 18$
$4 \times 6 = 24$
$5 \times 6 = 30$
$6 \times 6 = 36$
$7 \times 6 = 42 \longrightarrow$ 43
$8 \times 6 = 48$
$9 \times 6 = 54$
$43 + 5 = 48$

$\begin{array}{r} 48 \\ -43 \\ \hline 5 \end{array}$

Perlu 5 biji lagi.

P: Boleh cikgu terangkan apa yang dilukis itu?
R: 6 mewakili enam orang kanak-kanak. 1 × 6 = 6 sehingga 9 × 6 = 54 ialah sifir 6. 43 mewakili kuantiti yang diberi. 48 – 43 untuk mencari bezanya, iaitu 5.
P: Mengapakah cikgu menggunakan sifir 6?
R: Ini kerana terdapat enam orang kanak-kanak. Setiap kali saya mengagihkan sebiji gula-gula kepada seorang kanak-kanak, maka saya perlu enam biji gula-gula. Dengan itu, setipa kali agihan gula-gula saya perlu ada enam biji gula-gula.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya menulis sifir 6 dari 1 × 6 = 6 sehingga 9 × 6 = 54 untuk mengenal pasti kuantiti yang diberi itu terletak di antara mana dua hasil darab. Selepas itu, saya menggunakan hasil darab yang besar, iaitu 48 tolak kuantiti yang diberi, iaitu 43 untuk mendapat kuantiti yang perlu ditambahkan, iaitu 5.
P: Mengapakah cikgu tidak meletakkan 43 di antara 6 × 6 = 36, dan 7 × 6 = 42?
R: Kalau saya agihkan 6 biji gula-gula kepada setiap orang kanak-kanak, saya akan tinggal 7 biji gula-gula. Ini boleh diagihkan lagi kepada 6 orang kanak-kanak, kerana 7 lebih daripada 6.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara begini?
R: Cara ini secara visual dapat tahu kuantiti gula-gula yang diberi kepada setiap kanak-kanak dan kuantiti yang diperlukan lagi.
P: Dengan cara begini, apakah jawapannya?

R: Masih perlu 5 biji gula-gula.

Cara penyelesaian masalah bagi John membabitkan sifir 6. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis sifir 6 : $1 \times 6 = 6$, $2 \times 6 = 12$, $3 \times 6 = 18$, $4 \times 6 = 24$, $5 \times 6 = 30$, $6 \times 6 = 36$, $7 \times 6 = 42$, $8 \times 6 = 48$, dan $9 \times 6 = 54$. Beliau menuliskan satu anak panah di antara $7 \times 6 = 42$ dan $8 \times 6 = 48$, kemudian menulis nombor 43. Seterusnya menulis bentuk lazim $48 – 43 = 5$. Beliau menerangkan 6 mewakili enam orang kanak-kanak. $1 \times 6 = 6$ sehingga $9 \times 6 = 54$ ialah sifir 6. 43 mewakili kuantiti yang diberi. 48 – 43 untuk mencari bezanya iaitu 5.

Seterusnya, beliau menjelaskan sifir 6 digunakan kerana terdapat enam orang kanak-kanak. Setiap kali mengagihkan sebiji gula-gula kepada seorang kanak-kanak, maka perlu enam biji gula-gula. Dengan itu, setiap kali agihan gula-gula perlu ada enam biji gula-gula. Ini sama dengan sifir 6. Setiap kali tambah 6. Beliau menerangkan cara menyelesaikan masalah itu, iaitu mula-mula beliau menulis sifir 6 dari $1 \times 6 = 6$ sehingga $9 \times 6 = 54$ untuk mengenal pasti kuantiti yang diberi itu terletak di antara mana dua hasil darab. Selepas itu, beliau menggunakan hasil darab yang besar, iaitu 48 tolak kuantiti yang diberi, iaitu 43 untuk mendapat kuantiti yang perlu ditambahkan, iaitu 5. Beliau menerangkan 48 tolak 43 , bukan 43 tolak 42 kerana jika mengagihkan 7 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka tinggal sebiji lagi, dan jika mengagihkan 8 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka perlu ada 48 biji gula-gula, tetapi sekarang ada 43 sahaja. Dengan itu, beliau hendak mengetahui bilangan yang kurang, maka perlu menolakkan kuantiti yang diperlukan dengan kuantiti yang ada.

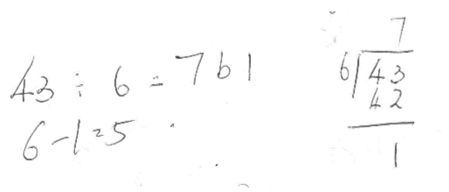
Beliau menerangkan 43 diletakkan di antara $6 \times 6 = 36$, dan $7 \times 6 = 42$ kerana kalau mengagihkan 6 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka beliau akan tinggal 7 biji gula-gula. Ini boleh diagihkan lagi kepada 6 orang kanak-kanak, kerana 7 lebih daripada 6. Beliau menyatakan dengan cara begitu akan mendapat jawapan, iaitu masih perlu 5 biji gula-gula.

Cara penaakulan John dalam menyelesaikan masalah pengagihan gula-gula melibatkan penaakulan deduktif dengan mencari gandaan yang lebih besar dan terdekat dengan jumlah objek dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (E) Gandaan Lebih Besar Dan terdekat.

Selain itu, daripada kajian ini, didapati empat daripada enam orang guru menggunakan cara penaakulan dalam kategori prosedural yang melibatkan penaakulan deduktif membabitkan gabungan operasi bahagi dan tolak untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 4.2(Chong) menunjukkan cara penaakulan deduktif dalam kategori prosedural melibatkan gabungan operasi bahagi dan tolak, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.2 (Chong): Masalah Melibatkan Pengagihan Gula-gula

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis “43 ÷ 6= ” kemudian menggunakan pembahagian panjang untuk mendapat hasil bahagi, iaitu 7 baki 1. Selepas itu, menulis “6 – 1 = 5”).



P: Boleh cikgu terangkan?
R: 43 mewakili 43 biji gula-gula, 6 mewakili enam orang kanak-kanak, simbol “÷” mewakili bahagi, manakala 7 mewakili tujuh biji gula-gula yang diperolehi oleh setiap kanak-kanak, dan 1 mewakili baki. 5 ialah beza bagi enam dan satu, yang mewakili lima biji gula-gula, iaitu bilangan gula-gula yang diperlukan lagi.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya menentukan jenis operasi yang perlu digunakan untuk menyelesaikan masalah. Saya dapati masalah ini minta kita mengagihkan 43 biji gula-gula kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, maka saya pun tahulah masalah itu berkaitan dengan operasi bahagi. Saya juga dapati 43 bukan gandaan 6, maka ia mesti ada baki, dengan itu saya

membahagikan 43 dengan 6 untuk mendapat hasil bahagi dan bakinya. Kemudian saya menolakkan 1 daripada 6 untuk mendapat bilangan gula-gula yang diperlukan lagi agar keenam-enam kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak.

P: Mengapakah cikgu membahagikan 43 dengan 6 untuk mendapat hasil bahagi dan bakinya?

R: Saya hendak tahu baki bagi 43 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak.

P: Mengapakah cikgu hendak tahu bakinya?

R: Daripada baki inilah saya akan tahu bilangan gula-gula yang diperlukan lagi, iaitu saya menolakkan satu daripada enam.

P: Mengapakah cikgu menolak satu daripada enam?

R: Ini kerana gula-gula itu perlu diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, tetapi bakinya sebiji sahaja, hanya cukup diagihkan kepada seorang kanak-kanak sahaja. Saya hendak tahu bilangan yang diperlukan lagi supaya semua kanak-kanak memperoleh bilangan gula-gula yang sama, dengan itu, saya pun menolakkan satu daripada enam dan mendapat bezanya lima, iaitu masih perlu lima biji gula-gula untuk mengagihkan kepada lima orang kanak-kanak dengan setiap orang sebiji.

P: Dengan cara begini, apakah jawapan cikgu?

R: 5 biji gula-gula yang diperlukan lagi.

Cara penaakulan deduktif dalam penyelesaian masalah yang digunakan oleh Chong untuk menyelesaikan masalah tentang mencari bilangan gula-gula yang diperlukan lagi agar sejumlah gula-gula cukup diagihkan sama banyak kepada sejumlah kanak-kanak membabitkan pembahagian dan penolakan. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis ayat matematik “43 ÷ 6 =”, kemudian menggunakan pembahagian panjang untuk mendapat hasil bahagi, iaitu 7 baki 1. Selepas itu, menulis “6 – 1 = 5”. Beliau menerangkan 43 mewakili 43 biji gula-gula, 6 mewakili enam orang kanak-kanak, simbol “÷” mewakili bahagi, manakala 7 mewakili tujuh biji gula-gula yang diperoleh oleh setiap kanak-kanak, dan 1 mewakili baki, manakala 5 ialah beza bagi enam dan satu, yang mewakili lima biji gula-gula, iaitu bilangan gula-gula yang diperlukan lagi.

Chong menjelaskan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula beliau menentukan jenis operasi yang perlu digunakan untuk menyelesaikan masalah. Beliau menyatakan, beliau mendapati masalah itu meminta kita mengagihkan 43 biji gula-gula kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, maka beliau pun mengetahui masalah itu berkaitan dengan operasi bahagi. Sambungan beliau, beliau juga mendapati 43 bukan gandaan 6, maka ia mesti ada baki, dengan itu beliau membahagikan 43 dengan 6 untuk mendapat hasil bahagi dan bakinya. Kemudian beliau menolakkan 1 daripada 6 untuk mendapat bilangan gula-gula yang diperlukan lagi agar keenam-enam orang kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak.

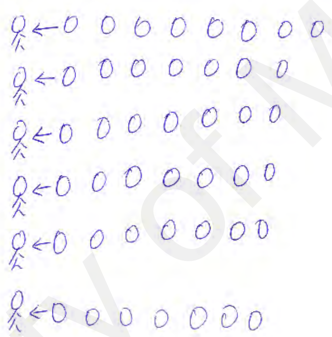
Chong menerangkan 43 dibahagi dengan 6 untuk mendapat hasil bahagi dan bakinya kerana beliau hendak tahu baki bagi 43 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak. Tambahan beliau, baki itu perlu diketahui kerana daripada baki inilah beliau akan tahu bilangan gula-gula yang diperlukan lagi, iaitu beliau menolakkan satu daripada enam. Beliau menjelaskan satu ditolak daripada enam kerana gula-gula itu perlu diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, tetapi bakinya sebiji sahaja, iaitu hanya cukup diagihkan kepada seorang kanak-kanak, dengan itu beliau hendak tahu bilangan yang diperlukan lagi supaya semua kanak-kanak memperoleh bilangan gula-gula yang sama. Sambungan beliau, menolakkan satu daripada enam akan mendapat bezanya lima, iaitu masih perlu lima biji gula-gula untuk mengagihkan kepada lima orang kanak-kanak dengan setiap orang sebiji.

Cara penaakulan deduktif bagi menyelesaikan masalah melibatkan gabungan operasi bahagi dan tolak yang dimiliki oleh Chong dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (F) Gabungan Operasi Bahagi dan Tolak.

Seterusnya, dari hasil kajian ini didapati seorang daripada enam orang guru menggunakan cara penaakulan dalam kategori prosedural yang melibatkan penaakulan deduktif membabitkan kaedah pemetakan untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 4.2(Lim) menunjukkan cara penaakulan deduktif dalam kategori prosedural melibatkan kaedah pemetakan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.2 (Lim): Masalah Melibatkan Pengagihan Gula-gula

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
S: Ada. (Cikgu melukis gambar enam orang dalam satu lajur, kemudian melukis 43 buah bulatan kecil satu demi satu secara bergilir-gilir di antara enam gambar orang itu sambil mengira 1…43. Akhirnya, setiap barisan ada 7 bulatan kecil, kecuali barisan pertama ada 7 bulatan kecil. Setiap barisan ada satu anak panah yang menuju ke gambar orang yang sebaris dengannya).



P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
S: Gambar enam orang mewakili enam orang kanak-kanak, manakala 43 buah bulatan kecil mewakili 43 biji gula-gula. Anak panah itu menunjukkan barisan bulatan itu kepunyaan oleh orang yang sebaris itu.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
S: Saya melukis 43 buah bulatan yang mewakili 43 biji gula-gula. Kemudian mengagihkannya satu demi satu kepada setiap gambar orang yang mewakili kanak-kanak itu sehingga habis diagih. Didapati lajur terakhir hanya ada satu bulatan sahaja dan ada lima baris tidak ada bulatan. Ini bermakna bakinya 1, dan perlu 5 lagi bulatan kecil untuk mencukupkan lajur itu, iaitu masih perlu 5 biji gula lagi agar setiap kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara begini?
S: Cara ini secara visual dapat tahu bilangan gula-gula yang perlu ditambahkan agar semua kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama.
P: Dengan cara begini, apakah jawapannya?
S: Masih perlu 5 biji gula-gula.

Cara penaakulan dalam penyelesaian Lim membabitkan gambar rajah enam orang dalam satu lajur dan 43 bulatan kecil. Lim menunjukkan cara penyelesaiannya dengan melukis gambar rajah enam orang dalam satu lajur, kemudian melukis 43 buah bulatan kecil satu demi satu sebaris dengan gambar enam orang sambil mengira 1…43, sehingga setiap barisan ada 6 buah bulatan kecil, kecuali barisan pertama ada tujuh buah bulatan kecil, Setiap barisan ada satu anak panah yang menuju ke gambar orang yang sebaris dengannya. Beliau menerangkan gambar enam orang mewakili enam orang kanak-kanak, manakala 43 buah bulatan kecil mewakili 43 biji gula-gula. Anak panah itu menunjukkan barisan bulatan itu kepunyaan oleh gambar orang yang sebaris itu.

Lim menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu beliau melukis 43 buah bulatan yang mewakili 43 biji gula-gula. Kemudian mengagihkannya satu demi satu kepada setiap gambar orang yang mewakili kanak-kanak itu sehingga habis diagih. Didapati lajur terakhir hanya ada satu bulatan sahaja dan ada lima baris tidak ada bulatan. Ini bermakna bakinya 1, dan perlu 5 lagi bulatan kecil untuk mencukupkan lajur itu, iaitu masih perlu 5 biji gula-gula lagi agar setiap kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak. Lim mengatakan cara begitu digunakan kerana cara itu secara visual dapat tahu bilangan gula-gula yang perlu ditambahkan agar semua kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama. Beliau mengatakan lagi, dengan cara tersebut akan mendapat jawapan, iaitu 5 biji gula-gula.

Cara penaakulan Lim bagi menyelesaikan masalah pengagihan gula-gula melibatkan kaedah pemetakan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (G) Kaedah Pemetakan.

Di samping itu, terdapat tiga daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan deduktif dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik bahagi dalam menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 4.3(Chong) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik bahagi, dan urutan tiga bahagian dalam penaakulan melibatkan faktor dalam ayat matematik bahagi juga.

Protokol 4.3 (Chong): Masalah Melibatkan Pengagihan Durian

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis "27 – 3 = 24", kemudian menulis "b =24", "b ÷ 1 = 24÷1=24", "b ÷ 2 = 24 ÷ 2 =12", "b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8", "b ÷ 4 = 24 ÷ 4 =6", "b ÷ 5= 24 ÷ 5 = X", "b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4", "b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X", "b ÷ 8 = 24 ÷ 8 =3", "b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X", "b ÷ 12 = 24 ÷12 =2", "b ÷ 24 = 24÷ 24 = 1").

$b = 24$
$b \div 8 = 24 \div 8 = 3.$
$b \div 9 = 24 \div 9 = X$
$b \div 8 = 24 \div 8 = 3$
$b \div 7 = 24 \div 7 = X$
$b \div 6 = 24 \div 6 = 4$
$b \div 5 = 24 \div 5 = X$
$b \div 4 = 24 \div 4 = 6$
$b \div 3 = 24 \div 3 = 8$
$b \div 2 = 24 \div 2 = 12$
$b \div 1 = 24 \div 1 = 24$
$b \div 12 = 24 \div 12 = 2$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 27 mewakili 27 biji durian, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, manakala b mewakili 24 biji durian yang perlu diagihkan sama banyak kepada beberapa orang jiran. "24 ÷ 2 = 12" mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua-dua, dengan itu 12 orang boleh mendapat durian itu; "24 ÷ 3 = 8" mewakili 24 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, dengan itu 8 orang boleh mendapat durian itu; "24 ÷ 4 = 6" mewakili 24 biji durian diagihkan secara empat-empat, dengan itu 6 orang boleh mendapat durian itu; "24 ÷ 8 = 3" mewakili 24 biji durian diagihkan secara lapan-lapan, dengan itu 3 orang boleh mendapat durian itu, "24 ÷ 12 = 2" mewakili 24 biji durian diagihkan secara duabelas-duabelas, dengan itu 2 orang boleh mendapat durian itu; dan "24 ÷ 24 = 1" mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua puluh empat-dua puluh empat, dengan itu 1 orang boleh mendapat durian itu.

P: Mengapakah cikgu memangkah di "24 ÷ 5", "24 ÷ 7" dan "24 ÷ 9"?

R: 24 dibahagikan dengan 5, 7 atau 9 akan meninggalkan baki, iaitu "24 ÷ 5 = 4 baki 5", "24 ÷ 7 = 3 baki 3" dan "24 ÷ 9 = 2 baki 6".

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menolakkan 3 daripada 27 untuk mendapat kuantiti durian yang perlu diagihkan kepada sejumlah jiran, iaitu 24 biji. Kemudian saya cuba membahagikan 24 dengan nombor 1 hingga 9 dan seterusnya 12 dan 24 untuk memastikan bilangan orang dan kuantiti durian yang boleh diagihkan dengan 24 biji durian tanpa baki.

P: Mengapakah cikgu perlu mencari nombor bahagi dan hasil bahagi bagi ayat matematik bahagi itu?

R: Ini kerana dalam masalah ini, perlu kita mencari dua anu iaitu bilangan jiran dan kuantiti durian yang diagihkan kepada setiap orang jiran. Dalam ayat matematik bahagi, nombor bahagi mewakili bilangan jiran yang mendapat durian dan hasil bahagi mewakili kuantiti durian yang diagihkan kepada setiap orang jiran.

P: Dengan itu, apakah jawapan cikgu?

R: Jawapannya ada banyak. Ia boleh jadi 24 biji durian itu diberikan kepada 1 orang jiran, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, 24 biji durian diberikan kepada 3 orang jiran dengan setiap orang mendapat 8 biji, 24 biji durian diberikan kepada 4 orang jiran dengan setiap orang mendapat 6 biji, 24 biji durian diberikan kepada 6 orang jiran dengan setiap orang mendapat 4 biji, 24 biji durian diberikan kepada 8 orang jiran dengan setiap orang mendapat 3 biji, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, dan 24 biji durian diberikan kepada 24 orang jiran dengan setiap orang mendapat 1 biji.

P: Pada pendapat cikgu, daripada banyak jawapan di atas, jawapan manakah yang kemungkinan besar Pak Kassim akan pilih?

R: 12 orang jiran dengan setiap orang mendapat 2 biji durian.

P: Mengapakah cikgu cakap begitu?

R: Pada kebiasaannya, kita ingin lebih ramai kawan bersama dengan kita untuk menikmati sesuatu, begitu juga anggapan Pak Kassim, dia ingin menikmati duriannya bersama-sama dengan seberapa ramai jirannya yang boleh. Dengan itu, lebih ramai jiran lebih baik. Kalau Pak Kassim memberikan sebiji durian sahaja kepada setiap jirannya mungkin keluarga jirannya tidak cukup makan dan jika berikan tiga biji, maka hanya lapan orang jiran mendapat durian sahaja. Oleh demikian, 12 orang jiran mendapat durian itu dengan setiap orang memperolehi dua biji adalah paling sesuai.

Cara penaakulan dalam penyelesaian masalah yang digunakan oleh Chong untuk menyelesaikan masalah tentang pengagihan durian membabitkan penolakan dan faktor. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis “27 – 3 = 24”, kemudian menulis “b =24”, “b ÷ 1 = 24÷ 1=24”, “b ÷ 2 = 24 ÷ 2 =12”, “b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8”, “b ÷ 4 = 24 ÷ 4 =6”, “b ÷ 5 = 24 ÷ 5 = X”, “b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4”, “b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X”, “b ÷ 8 = 24 ÷ 8 =3”, “b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X”, “b ÷ 12 = 24 ÷12 =2”, “b ÷ 24 = 24÷ 24 = 1”. Beliau menerangkan 27 mewakili 27 biji durian, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, manakala b mewakili 24 biji durian yang perlu diagihkan sama banyak kepada beberapa orang jiran. “24 ÷ 2 = 12” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua-dua, dengan itu 12 orang boleh mendapat durian itu; "24 ÷ 3 = 8" mewakili 24 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, dengan itu 8 orang boleh mendapat durian itu; "24 ÷ 4 = 6" mewakili 24 biji durian diagihkan secara empat-empat, dengan itu 6 orang boleh mendapat durian itu; "24 ÷ 8 = 3" mewakili 24 biji durian diagihkan secara lapan-lapan, dengan itu 3 orang boleh mendapat durian itu, "24 ÷ 12 = 2" mewakili 24 biji durian diagihkan secara duabelas-duabelas, dengan itu 2 orang boleh mendapat durian itu; dan "24 ÷ 24 = 1" mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua puluh empat-dua puluh empat, dengan itu 1 orang sahaja boleh mendapat durian itu. Beliau menerangkan "24 ÷ 5", "24 ÷ 7" dan "24 ÷ 9" dipangkah "X" kerana 24 dibahagikan dengan 5, 7 atau 9 akan meninggalkan baki, iaitu "24 ÷ 5 = 4 baki 5", "24 ÷ 7 = 3 baki 3" dan "24 ÷ 9 = 2 baki 6".

Chong menerangkan ayat matematik yang ada baki tidak boleh digunakan kerana ada baki bermakna objek itu tidak cukup diagihkan kepada sejumlah orang dengan bilangan yang sama. Chong menyatakan dengan cara tersebut di atas beliau akan mendapat banyak jawapan. Beliau menyenaraikan kesemua jawapan: jawapan boleh jadi 24 biji durian itu diberikan kepada 1 orang jiran, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, 24 biji durian diberikan kepada 3 orang jiran dengan setiap orang mendapat 8 biji, 24 biji durian diberikan kepada 4 orang jiran dengan setiap orang mendapat 6 biji, 24 biji durian diberikan kepada 6 orang jiran dengan setiap orang mendapat 4 biji, 24 biji durian diberikan kepada 8 orang jiran dengan setiap orang mendapat 3 biji, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, dan 24 biji durian diberikan kepada 24 orang jiran dengan setiap orang mendapat 1 biji. Pada pendapat beliau, daripada banyak jawapan di atas, kemungkinan besar Pak Kassim akan pilih ialah 12 orang jiran dengan setiap orang mendapat 2 biji durian. Beliau menerangkan mengikut kebiasaannya, kita ingin lebih ramai kawan bersama dengan kita untuk menikmati sesuatu, begitu juga Pak Kassim, dia ingin menikmati duriannya bersama-sama dengan seberapa ramai jirannya yang boleh. Dengan itu, lebih ramai jiran lebih baik. Kalau Pak Kassim memberikan sebiji durian sahaja kepada setiap jirannya mungkin keluarga jirannya tidak cukup makan dan jika berikan tiga biji, maka hanya lapan orang jiran mendapat durian sahaja. Oleh demikian, 12 orang jiran mendapat durian itu dengan setiap orang memperolehi dua biji adalah paling sesuai.

Cara penaakulan deduktif Chong dalam menyelesaikan masalah pengagihan durian melibatkan faktor dalam ayat matematik bahagi dijelaskan dalam satu urutan mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (H) Faktor Dalam Ayat Matematik Bahagi.

Selain itu, dari hasil kajian ini juga didapati dua daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan deduktif dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik darab untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 4.3(Kong) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.3 (Kong): Masalah Melibatkan Pengagihan Durian

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik “27 - 3 = 24”, kemudian menulis ayat matematik: 1 × 24 = 24, 2 × 12 = 24, 3 × 8 = 24, 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24, 8 × 3 = 24, 12× 2 = 24, 24 × 1 = 24, selepas itu menandakan “ /” dan “X” di tepi ayat matematik itu, iaitu kesemua ayat matematik ditandakan “X” kecuali ayat matematik , 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24).

$27 - 3 = 24$ $\quad$ $1 \times 24 = 24$ ×
$2 \times 12 = 24$ ×
$3 \times 8 = 24$ ×
$4 \times 6 = 24$ /
$6 \times 4 = 24$ /
$8 \times 3 = 24$ ×
$12 \times 2 = 24$ ×
$24 \times 1 = 24$ ×

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 27 mewakili 27 biji durian, simbol "– " mewakili tolak, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, manakala 24 mewakili 24 biji durian yang boleh diagihkan kepada jiran. Ayat matematik "1 × 24 = 24, 2 × 12 = 24, 3 × 8 = 24, 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24, 8 × 3 = 24, 12× 2 = 24, 24 × 1 = 24," mewakili lapan situasi yang mungkin berlaku, iaitu "1 × 24 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara satu-satu, maka 24 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang sebiji; "2 × 12 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua-dua, maka 12 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang dua biji; "3 × 8 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, maka 24 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang sebiji; "4 × 6 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara empat-empat, maka 6 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang empat biji; "6 × 4 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara enam-enam, maka 4 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang enam biji; "8 × 3 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara lapan-lapan, maka 3 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 8 biji; "12 × 2 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua belas-dua belas, maka 2 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang dua belas biji; dan "24 × 1 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua puluh empat-dua puluh empat, maka seorang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 24 biji.

P: Apakah maksud tanda "/" dan "X"?

R: Tanda "/" bermaksud ayat matematik itu sesuai diguna, manakala tanda "X" bermaksud ayat matematik itu tidak sesuai digunakan. Dengan itu, didapati hanya ada dua ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu "4 × 6 = 24" dan "6 × 4 = 24".

P: Mengapakah cikgu cakap begitu?

R: Ini kerana baki adalah 3 biji durian, maka nombor dibahagi, iaitu bilangan durian yang diagihkan dengan nombor bahagi, iaitu bilangan jiran yang mendapat durian tidak boleh sama atau kurang daripada 3. Ini kerana jika bilangan durian yang diagih itu sama atau kurang daripada 3, maka baki 3 biji durian itu boleh diagihkan kepada seorang lagi jiran. Ini sama juga dengan jumlah bilangan jiran yang mendapat durian, jika bilangannya sama atau kurang daripada 3, maka baki 3 biji durian itu boleh diagihkan kepada jiran itu dengan setiap orang tambah sebiji. Contohnya, jika durian itu diagihkan secara tiga-tiga, maka lapan orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang mendapat tiga biji, tetapi baki ada 3 biji, maka ia boleh diagihkan kepada seorang jiran yang lain. Jika durian itu diagihkan secara dua belas-dua belas, maka dua orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang mendapat dua belas biji, tetapi bakinya ada 3 biji, maka durian itu boleh diagihkan kepada 12 orang jiran itu dengan seorang ditambah sebiji, menjadi seorang mendapat 13 biji dan bakinya sebiji sahaja.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menolak 3 daripada 27, untuk mengetahui bilangan yang boleh diagihkan sama banyak kepada jiran. Selepas itu, saya menulis kesemua ayat matematik yang mungkin untuk membuat analisis yang mana sesuai digunakan, iaitu saya perlu memastikan nombor dibahagi dan nombor bahagi lebih daripada 3. Dengan itu, saya mendapat hanya ada dua ayat matematik yang menepati kehendak, iaitu "4 × 6 = 24" dan "6 × 4 = 24". Oleh itu, jawapannya ada dua kemungkinan, iaitu 4 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 6 biji dan 6 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 4 biji.

P: Dengan itu, yang manakah kemungkinan besar bilangan jiran Pak Kassim mendapat durian?

R: Enam orang jiran dengan setiap orang mendapat empat biji durian.

P: Bolehkah Pak Kassim memberikan empat orang jiran dengan setiap orang mendapat enam biji durian?

R: Boleh juga. Ini mungkin Pak Kassim hanya ada empat orang jiran sahaja atau ada empat orang jiran yang rapat dengannya.

Cara penyelesaian masalah Kong membabitkan baki ditolak dan mencari ayat matematik darab yang sesuai. Beliau menunjukkan cara penyelesaian masalahnya dengan menulis "27 – 3 = 24", kemudian menulis "1 × 24", "2 × 12", "3 × 8", "4 × 6", "6 × 4", "8 × 3", "12 × 2", "24 × 1". Beliau menerangkan 27 mewakili 27 biji durian, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, 24 mewakili 24 biji durian yang diagihkan sama banyak kepada beberapa orang jiran, manakala "1 × 24", "2 × 12", "3 × 8", "4 × 6", "6 × 4", "8 × 3", "12 × 2", "24 × 1" ialah ayat matematik darab yang mendapat hasil darabnya 24.

Kong menerangkan cara penyelesaian masalahnya, iaitu mula-mula saya menolakkan 3 daripada 27 untuk mendapat kuantiti durian yang diagihkan kepada jiran Pak Kassim, iaitu 24 biji. Selepas itu, beliau menuliskan semua ayat matematik yang hasil darabnya 24. Kemudian, beliau mengenal pasti ayat matematik darab yang kedua-dua faktornya lebih besar daripada 3. Beliau berpendapat kedua-dua faktor bagi ayat matematik darab "4 × 6" dan "6 × 4" adalah lebih besar daripada 3. Dengan itu, beliau memilih kedua-dua ayat darab itu. Beliau menerangkan 3 ditolak daripada 27 kerana 3 ialah kuantiti durian yang tinggal, dengan itu, perlu mengambilkannya keluar daripada jumlah durian itu. Beliau menyatakan selepas baki dikeluarkan, jumlah yang tinggal itu adalah kuantiti yang diagihkan kepada jiran, iaitu 24 biji durian. Seterusnya, beliau menerangkan semua ayat matematik darab yang hasil darabnya 24 dituliskan kerana beliau ingin mencari kesemua faktor 24. Beliau menerangkan lagi, kesemua faktor 24 dicari kerana dengan faktor itu, beliau akan menentukan ayat matematik darab yang mana sesuai digunakan. Beliau menjelaskan ayat matematik darab yang mempunyai kedua-dua faktor lebih besar daripada 3 akan dipilih kerana jika faktor itu lebih besar daripada 3, maka ia adalah sesuai digunakan, manakala jika faktor itu kurang daripada 3, maka ia tidak akan dapat baki 3. Beliau menyatakan dengan cara tersebut akan mendapat dua jawapan kemungkinan. Kemungkinan pertama ialah bilangan jiran yang mendapat durian itu adalah 4 orang dan durian yang diagihkan kepada setiap orang sebanyak 6 biji, manakala kemungkinan kedua ialah bilangan jiran yang mendapat durian itu adalah 6 orang dan durian yang diagihkan kepada setiap orang sebanyak 4 biji.

Cara penaakulan deduktif Kong dalam menyelesaikan masalah melibatkan pengagihan durian dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (I) Faktor Dalam Ayat Matematik Darab.

Akhirnya, dari hasil kajian ini juga didapati seorang daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan dalam kategori prosedural menggunakan penaakulan deduktif melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 4.3(John) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi, dan urutan tiga bahagian dalam penaakulan melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi juga.

Protokol 4.3(John): Masalah Melibatkan Pengagihan Durian

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik "27 ÷ x = y baki 3", kemudian menulis ayat matematik: 27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5

baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3. Kemudian cikgu menandakan "/' pada ayat matematik "27 ÷ 4 = 6 baki 3", "27 ÷ 6 = 4 baki 3", "27 ÷ 8 = 3 baki 3" dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3".

$27 \div 2 = 13 b 1$
$27 \div 3 = 9$
$27 \div 4 = 6 b 3$ ✓
$27 \div 5 = 5 b 2$
$27 \div 6 = 4 b 3$ ✓
$27 \div 7 = 3 b 6$
$27 \div 8 = 3 b 3$ ✓
$27 \div 9 = 3$
$27 \div 10 = 2 b 7$
$27 \div 11 = 2 b 5$
$27 \div 12 = 2 b 3$ ✓

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 27 mewakili 27 biji durian, simbol "÷ " mewakili bahagi, *x* mewakili bilangan durian yang diagihkan, manakala *y* mewakili bilangan jiran yang terima durian dan 3 ialah baki. Ayat matematik "27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5 baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3, ditulis untuk mencari *x* dan *y* yang sesuai. Tanda "/" bermaksud ayat matematik itu sesuai digunakan. Dengan itu, hanya terdapat empat ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu "27 ÷ 4 = 6 baki 3", "27 ÷ 6 = 4 baki 3" dan "27 ÷ 8 = 3 baki 3" dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3".

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menulis ayat matematik pembahagian dengan menggunakan anu yang menunjukkan situasi masalah, iaitu 27 biji durian diagihkan kepada beberapa orang jiran, yang diwakili oleh *y*, dengan setiap orang mendapat beberapa biji durian, yang diwakili oleh *x* dan tinggal 3 biji. Selepas itu, saya cuba membahagikan 27 dengan 2 hingga 12 satu persatu untuk mencari bakinya adalah 3. Kemudian, memilih ayat matematik yang sesuai dengan menandakan "/" pada ayat matematik itu.

P: Dengan itu, apakah kemungkinan besar bilangan jiran dan kuantiti durian yang diberikan kepada setiap jiran?

R: Saya rasa Pak Kassim akan memberikan 6 orang jiran dengan setiap orang mendapat 4 biji durian dan tinggal 3 biji durian untuk keluarganya.

P: Mengapakah cikgu fikir begitu?

R: Pak Kassim ingin tinggal tiga biji durian untuk keluarganya, maka terdapat 24 biji durian perlu diagihkan kepada jiran dengan bilangan yang sama. Pada pendapat saya dia ingin memberikan seberapa banyak jiran yang boleh, agar jirannya turut serta menikmati duriannya, tetapi perlu adil, setiap orang perlu diagihkan dengan bilangan yang sama.

P: Mengapakah perlu mengagihkan durian itu dengan bilangan yang sama kepada jiran?

R: Ini untuk mengelakkan pergaduhan atau salah faham pilih kasih di antara jiran kerana pengagihan itu tidak adil, iaitu tidak sama .

Cara penyelesaian masalah bagi John melibatkan ayat matematik pembahagian melibatkan baki. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis ayat matematik “27 ÷ x = y baki 3”, kemudian menulis ayat matematik: 27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5 baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3. Kemudian beliau menandakan “/’ pada ayat matematik “27 ÷ 4 = 6 baki 3”, “27 ÷ 6 = 4 baki 3”, “27 ÷ 8 = 3 baki 3” dan “27 ÷ 12 = 2 baki 3”. Beliau menerangkan 27 mewakili 27 biji durian, simbol “÷ ” mewakili bahagi, x mewakili bilangan durian yang diagihkan, manakala y mewakili bilangan jiran yang terima durian dan 3 ialah baki. Ayat matematik “27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5 baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3, ditulis untuk mencari x dan y yang sesuai. Tanda “/” bermaksud ayat matematik itu sesuai digunakan. Dengan itu, hanya terdapat empat ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu “27 ÷ 4 = 6 baki 3”, “27 ÷ 6 = 4 baki 3” dan “27 ÷ 8 = 3 baki 3” dan “27 ÷ 12 = 2 baki 3”. Beliau menerangkan hanya ayat matematik “27 ÷ 4 = 6 baki 3”, “27 ÷ 6 = 4 baki 3” dan “27 ÷ 8 = 3 baki 3”, dan “27 ÷ 12 = 2 baki 3” sahaja sesuai digunakan, ini kerana ayat matematik pembahagian yang lain bakinya bukan 3 atau tiada baki, yang mana masalah telah menetapkan baki perlu ada 3 biji durian. Keempat-empat ayat matematik di atas bakinya 3, dengan itu ia sesuai digunakan.

Cara penyelesaian masalah bagi John, iaitu mula-mula menulis ayat matematik pembahagian dengan menggunakan anu yang menunjukkan situasi masalah, iaitu 27 biji durian diagihkan kepada beberapa orang jiran, yang diwakili oleh y, dengan setiap orang mendapat beberapa biji durian, yang diwakili oleh x dan tinggal 3 biji. Selepas itu, cuba membahagikan 27 dengan 2 hingga 12 satu persatu untuk mencari bakinya ialah 3. Seterusnya, memilih ayat matematik yang sesuai dengan menandakan “/” pada ayat matematik itu. Beliau menyatakan kemungkinan besar bilangan jiran dan kuantiti durian yang diberikan kepada setiap jiran ialah 6 orang jiran dengan setiap orang mendapat 4 biji durian dan tinggal 3 biji durian untuk keluarganya.

Cara penaakulan deduktif John dalam menyelesaikan masalah pengagihan durian melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (J) Baki Dalam Ayat Matematik Bahagi.

Cara Penaakulan Induktif Dalam Penyelesaian Masalah Melibatkan Pembahagian Nombpr Bulat. Dari kajian ini, didapati seorang daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan induktif melibatkan konsep kadaran. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 4.1(Kong) menunjukkan cara penaakulan induktif dalam kategori prosedural melibatkan konsep kadaran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1 (Kong): Masalah Melibatkan Jarak

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis secara menegak “Ali” dan di bawahnya menulis “2 km”, seterusnya di bawah “2 km” menulis “× 6”, Akhirnya di bawah “× 6” di tulis “12 km”. kemudian menulis secara menegak “Ah Seng” dan di bawahnya menulis “3 km”, seterusnya di bawah “3 km” menulis “× 6”, Akhirnya di bawah “× 6” di tulis “18 km”).

Ali	Seng
2km	3km.
×6	×6
12km	18km.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menulis jarak Ali dan Ah Seng yang telah ditetapkan, iaitu Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Kemudian berdasarkan jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, iaitu 12 km, saya perlu mencari Ali telah berlari berapa kali 2 km dalam jumlah 12 km itu. Dengan itu, saya membahagikan 12 km dengan 2 km untuk mendapat gandaan 2 km, iaitu 6 kali. Jika gandaan jarak Ali diketahui, maka gandaan jarak Ah Seng juga akan diketahui kerana gandaan mereka adalah sama. Seterusnya jarak Ah Seng boleh didapati.

P: Mengapakah cikgu perlu mengetahui dalam 12 km ada berapa 2 km?

R: Ini untuk mengetahui gandaan 2 km. Jika gandaan jarak bagi Ali diketahui, maka gandaan Ah Seng juga diketahui, kerana jarak Ali berkadar terus dengan jarak Ah Seng.

P: Mengapakah cikgu guna cara begini?

R: Cara ini secara terus dengan kiraan, iaitu mencari gandaannya akan mendapat jawapan. Saya sentiasa menggunakan operasi asas untuk mencari jawapan.

P: Bagaimanakah cikgu tahu cara ini sesuai digunakan?

R: Saya guna contoh, jika Ali telah berlari 20 km, cari jarak Ah Seng berlari.(Cikgu menulis 20 ÷ 2 = 10, 3 × 10 = 30).

$20 \div 2 = 10$

$3 \times 10 = 30$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 20 mewakili 20 km dan 2 mewakili 2 km yang dilalui oleh Ali. “20 ÷ 2” untuk mencari gandaan 2 dalam 20, 10 ialah gandaan bagi 2. Oleh kerana 2 km ada 10 kali dalam 20 km, maka 3 km juga perlu ada 10 kali. Dengan itu, “10 × 3km = 30 km”, iaitu Ah Seng telah berlari 30 km. Jumlah jarak Ali berlari, iaitu 20 km dan jumlah jarak Ah Seng berlari, iaitu 30 km, jika dipermudahkan akan jadi 2 km dan 3 km, iaitu sama seperti jarak asal Ali dan Ah Seng berlari. Dengan itu, terbuktilah jarak Ali sentiasa berkadar terus dengan jarak Ah Seng, dan cara ini adalah sesuai digunakan untuk mencari jarak Ah Seng.

P: Dengan cara begini, apakah jawapan cikgu?

R: 18 km.

P: Bagaimanakah cikgu tahu jawapan ini adalah betul?

R: Saya menjustifikasikan dengan gambar rajah. (Cikgu menulis 2 km, kemudian melukis satu anak panah dari 2 km ke 3 km, seterusnya 4 km ke 6 km, 6 km ke 9 km, 8 km ke 12 km, 10 km ke 15 km, dan 12 km ke 18 km).

2km → 3km
4km → 6km
6km → 9km
8km → 12km.
10km → 15km
12km → 18km

P: Boleh cikgu terangkan.

R: Apabila Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Apabila Ali berlari 4 km, Ah Seng akan berlari 6 km. Apabila Ali berlari 6 km, Ah Seng akan berlari 9 km. Apabila Ali berlari 8 km, Ah Seng akan berlari 12 km. Apabila Ali berlari 10 km, Ah Seng akan berlari 15 km. Apabila Ali berlari 12 km, Ah Seng akan berlari 18 km. Dengan itu terbuktilah jawapan itu adalah betul.

P: Dengan itu, bolehkah cara ini dipermudahkan?

R: Em… (Cikgu menulis “2”→”3”, “*x*2”→”*x*3”, “*x*2 = *a*”, “*x* = *a* ÷ 2”, dan “*x*3 = *b* = *a* ÷ 2 × 3”).

“2”→”3”, “*x*2”→”*x*3”, “*x*2 = *a*”, “*x* = *a* ÷ 2”, dan “*x*3 = *b* = *a* ÷ 2 × 3”

$b = a \div 2 \times 3$

P: Cuba terangkan.

R: *a* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, simbol “÷” mewakili pembahagian, “2” mewakili jarak Ali berlari, manakala simbol “×” mewakili pendaraban, dan “3” mewakili jarak Ah Seng berlari. Oleh itu, (*a* ÷ 2) akan mendapat gandaan 2 km, iaitu 6 kali dan (a ÷ 2) × 3, iaitu 6 kali ganda bagi 3 km, ialah jumlah jarak Ah Seng berlari.

P: Bagaimanakah cikgu dapat buktikan rumusan ini adalah betul?

R: Saya guna contoh, jika a ialah 12, maka dengan rumusan: "$b = a \div 2 \times 3$", 12 ÷ 2 × 3 = 18. Jika Ali telah berlari 2 km, dengan rumusan, "2 ÷ 2 × 3 = 3 ", Ah Seng akan berlari 3 km. Ini sama seperti nilai yang diberi dalam masalah. Dengan itu, rumusan ini adalah betul.

Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula beliau menulis jarak Ali dan Ah Seng yang telah ditetapkan, yang mana Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Kemudian berdasarkan jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, iaitu 12 km, beliau mencari Ali telah berlari berapa kali 2 km dalam jumlah 12 km itu. Dengan itu, beliau membahagikan 12 km dengan 2 km untuk mendapat gandaan 2 km, iaitu 6 ganda 2. Jika gandaan Ali diketahui, maka gandaan Ah Seng juga akan diketahui kerana gandaan mereka adalah sama, maka jarak Ah Seng boleh didapati. Beliau menerangkan bilangan 2 km dalam 12 km perlu diketahui untuk mendapat gandaan 2 km. Jika gandaan jarak bagi Ali diketahui, maka gandaan Ah Seng juga diketahui, kerana jarak Ali berkadar terus dengan jarak Ah Seng. Beliau menerangkan cara begitu digunakan kerana cara itu boleh dikira secara terus, iaitu mencari gandaannya akan mendapat jawapan. Beliau menyatakan beliau sentiasa menggunakan operasi asas untuk mencari jawapan.

Kong memberi justifikasi bahawa cara itu sesuai digunakan dengan contoh, jika Ali telah berlari 20 km, cari jarak Ah Seng berlari. Beliau menunjukkan jalan kerjanya dengan menulis "20 ÷ 2 = 10" dan "3 × 10 = 30". Beliau menerangkan 20 mewakili 20 km dan 2 mewakili 2 km yang dilalui oleh Ali. "20 ÷ 2" untuk mencari gandaan 2 dalam 20, iaitu 10 ialah gandaan bagi 2. Oleh sebab 2 km ada 10 kali dalam 20 km, maka 3 km juga perlu ada 10 kali. Dengan itu, "10 × 3km = 30 km", iaitu Ah Seng telah berlari 30 km. Jumlah jarak Ali berlari, iaitu 20 km dan jumlah jarak Ah Seng berlari, iaitu 30 km, jika dipermudahkan akan jadi 2 km dan 3 km, iaitu sama seperti jarak asal Ali dan Ah Seng berlari. Dengan itu, terbuktilah jarak

Ali sentiasa berkadar terus dengan jarak Ah Seng, dan cara ini adalah sesuai digunakan untuk mencari jarak Ah Seng. Beliau menyatakan dengan cara begitu, jawapannya ialah 18 km. Beliau membuktikan jawapannya itu adalah betul dengan gambar rajah, iaitu beliau menulis 2 km, kemudian melukis satu anak panah dari 2 km ke 3 km, seterusnya 4 km ke 6 km, 6 km ke 9 km, 8 km ke 12 km, 10 km ke 15 km, dan 12 km ke 18 km. Beliau menerangkan apabila Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Dengan ketetapan itu, apabila Ali berlari 4 km, Ah Seng akan berlari 6 km. Seterusnya, apabila Ali berlari 6 km, Ah Seng akan berlari 9 km, dan apabila Ali berlari 8 km, Ah Seng akan berlari 12 km. Apabila Ali berlari 10 km, Ah Seng akan berlari 15 km, dan apabila Ali berlari 12 km, Ah Seng akan berlari 18 km. Dengan itu terbuktilah jawapan itu adalah betul. Beliau mencadangkan satu rumusan untuk mempermudah cara itu, iaitu rumusan: $b = a \div 2 \times 3$. Beliau menerangkan a mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, simbol "÷" mewakili pembahagian, "2" mewakili jarak Ali berlari, manakala simbol "×" mewakili pendaraban, dan "3" mewakili jarak Ah Seng berlari. Beliau membuktikan rumusan itu adalah betul dengan contoh, jika a ialah 12, maka dengan rumusan: "$b = a \div 2 \times 3$", $12 \div 2 \times 3 = 18$. Jika Ali telah berlari 2 km, dengan rumusan, "$2 \div 2 \times 3 = 3$ ", Ah Seng akan berlari 3 km. Ini sama seperti nilai yang diberi dalam masalah. Dengan itu, rumusan ini adalah betul.

Cara penaakulan induktif Kong dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak dengan konsep kadaran dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 II (A) Konsep Kadaran.

Selain itu, hasil kajian itu mendapati tiga daripada enam orang responden juga menggunakan penaakulan induktif melibatkan gandaan untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Kong dalam Protokol 4.1(Kong) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural yang menggunakan konsep gandaan, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1 (Kong): Masalah Melibatkan Jarak

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?

R: Ya. Saya mencari gandaannya. (Cikgu menulis 3km/2 km, kemudian memotong kedua-dua km jadi 3/2. Selepas itu, cikgu menulis 3/2 × 12 km = 18 km).

$$\frac{3\cancel{km}}{2\cancel{km}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \times 12km = 18km$$

P: Tolong jelaskan.

R: 3 km mewakili jarak Ah Seng berlari manakala 2 km mewakili jarak Ali berlari dan 3/2 mewakili gandaan bagi jarak Ah Seng berbanding dengan jarak Ali. Simbol "×" mewakili darab, 12 km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, dan 18 km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng. Didapati jarak Ah Seng adalah 3/2 kali jarak Ali, jika jumlah jarak Ali ialah 12 km, maka jumlah jarak Ah Seng adalah 3/2 kali 12 km, iaitu 18 km.

P: Bagaimanakah cikgu tahu cara ini sesuai digunakan untuk mencari jawapan?

R: Jika gandaan bagi suatu nombor *b* kepada suatu nombor *a* diketahui, maka apabila nombor *a* berubah, nombor *b* yang turut berubah itu boleh dicari dengan berdasarkan gandaan dan nombor *a* telah berubah itu. Contohnya, jika jumlah jarak Ali berubah dari 2 km ke 14 km, maka dengan cara ini, "3/2 × 14 = 21", jumlah jarak Ah Seng ialah 21 km. 21/14 apabila dipermudahkan akan dapat 3/2. Ini bermaksud gandaannya sentiasa sama. Dengan itu, cara ini adalah sesuai digunakan untuk mencari jawapan.

P: Dengan cara ini, apakah jawapan didapati?

R: Jawapannya ialah 18 km.

P: Bagaimanakah cikgu tahu jawapan ini adalah betul?

R: Saya guna nisbah, jarak Ah Seng kepada jarak Ali, iaitu 3 : 2 boleh di tulis sebagi 3/2, manakala nisbah jumlah jarak Ah seng kepada Jumlah Jarak Ali, iaitu 18 km : 12 km boleh ditulis sebagai 18 km/12 km = 18/12 = 3/2. Kedua-dua pecahan itu adalah setara, maka jawapan 18 km itu adalah betul.

P: Mengapakah cikgu guna cara begini?

R: Cara ini senang dan secara mekanikal boleh mendapat jawapan.

P: Mengapakah cikgu cakap begitu?

R: Saya hanya perlu mengetahui gandaan bagi nombor *b* kepada nombor *a*, maka nombor *b* yang turut berubah akan dapat dicari jika nombor *a* itu berubah, iaitu saya hanya perlu mendarabkan nombor *a* yang telah berubah itu dengan gandaan itu untuk mendapat nombor *b* yang turut berubah itu.

P: Bolehkah cikgu mempermudah cara ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis b/*a* = 3/2, *b* = 3/2 × *a*).

$$b = \frac{3}{2} \times a$$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 3 mewakili jarak Ah Seng berlari dan 2 mewakili jarak Ali berlari, 3/2 mewakili bilangan gandaan bagi jarak Ah Seng kepada jarak Ali, manakala *a* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali dan *b* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng.

P: Bagaimanakah cikgu dapat buktikan rumusan itu betul?

R: Saya guna contoh, jika jumlah jarak Ali, *a* ialah 12 km , maka dengan rumusan, "3/2 × 12 = 18", jumlah jarak Ah Seng, *b* akan didapati,iaitu 18 km. "3/2 × *a* = *b*" boleh ditulis sebagai "3/2 = *b*/*a*", maka "3/2" adalah pecahan setara bagi "18/12" kerana (18 ÷ 6)/(12 ÷ 6) = 3/2. Ini bermaksud bilangan gandaan jarak Ah Seng berbanding dengan jarak Ali adalah sentiasa sama.

Cara penyelesaian masalah bagi Kong membabitkan pendaraban sesuatu nombor *A* dengan gandaan bagi nombor *b* kepada nombor *a*. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis 3 km/2 km, kemudian memotong kedua-dua km jadi 3/2. Selepas itu, beliau menulis 3/2 × 12 km = 18 km. Beliau menjelaskan bahawa 3 km mewakili jarak Ah Seng manakala 2 km mewakili jarak Ali dan 3/2 mewakili gandaan bagi jarak Ah Seng kepada jarak Ali. Simbol "×" mewakili darab, 12 km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, dan 18 km mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng. Didapati jarak Ah Seng adalah 3/2 kali jarak Ali, jika jumlah jarak Ali ialah 12 km, maka jumlah jarak Ah Seng adalah 3/2 kali 12 km, iaitu 18 km. Beliau menjustifikasikan cara itu sesuai digunakan untuk mencari jawapan dengan menyatakan jika gandaan bagi suatu nombor *b* kepada suatu nombor *a* diketahui, maka apabila nombor *a* berubah, nombor *b* yang turut berubah itu boleh dicari dengan berdasarkan gandaan dan nombor *a* telah berubah itu. Contohnya, jika jumlah jarak Ali berubah dari 2 km ke 14 km, maka dengan cara ini, "3/2 × 14 = 21", jumlah jarak Ah Seng ialah 21 km. 21/ 14 apabila dipermudahkan akan dapat 3/2.

Ini bermaksud gandaannya sentiasa sama. Dengan itu, cara itu adalah sesuai digunakan untuk mencari jawapan.

Kong menyatakan cara begitu digunakan kerana cara tersebut senang dan secara mekanikal boleh mendapat jawapan. Beliau menerangkan beliau hanya perlu mengetahui gandaan kuantiti bagi suatu nombor *b* kepada suatu nombor *a* diketahui, maka apabila nombor *a* berubah, nombor *b* yang turut berubah itu boleh dicari dengan berdasarkan gandaan dan nombor *a* telah berubah itu, iaitu beliau hanya perlu mendarabkan nombor *a* yang berubah itu dengan gandaannya untuk mendapat nombor *b* yang turut berubah itu. Beliau menyatakan dengan cara begitu akan mendapat jawapan ialah 18 km. Beliau menjustifikasikan jawapan itu adalah betul dengan menggunakan nisbah. Beliau menggunakan contoh jarak Ah Seng kepada jarak Ali, iaitu 3 : 2 boleh di tulis sebagi 3/2, manakala nisbah jumlah jarak Ah seng kepada jumlah jarak Ali, iaitu 18 km : 12 km boleh ditulis sebagai 18 km/12 km = 18/12 = 3/2. Kedua-dua pecahan itu adalah setara, maka jawapan 18 km itu adalah betul.

Kong mempermudah cara di atas dengan rumusan: $3/2 \times a = b$. Beliau menerangkan 3 mewakili jarak Ah Seng berlari, iaitu 3 km, manakala 2 mewakili jarak Ali, iaitu 2 km. 3/2 pula mewakili bilangan gandaan bagi jarak Ah Seng berbanding dengan jarak Ali, manakala *a* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali dan *b* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng. Beliau membuktikan rumusannya adalah betul dengan menggunakan contoh, jika jumlah jarak Ali, *a* ialah 12 km , maka dengan rumusan, "$3/2 \times 12 = 18$", jumlah jarak Ah Seng, *b* akan didapati, iaitu 18 km. "$3/2 \times a = b$" boleh ditulis sebagai "$3/2 = b/a$", maka "3/2" adalah pecahan setara bagi "18/12" kerana $(18 \div 6)/(12 \div 6) = 3/2$. Ini bermaksud bilangan gandaan jarak Ah Seng berbanding dengan jarak Ali adalah sentiasa sama.

Cara penaakulan induktif Tong dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak dengan konsep gandaan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 II (B) Konsep Gandaan.

Di samping itu, daripada hasil kajian ini didapati dua daripada enam orang responden menggunakan penaakulan induktif melibatkan pecahan setara untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat seperti soalan (1). Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 4.1(Chong) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural yang menggunakan pecahan setara, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1 (Chong): Masalah Melibatkan Jarak

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Saya guna pecahan setara.(Cikgu menulis 2/3 = 12/?, kemudian di sebelah kanan 2 tulis “× 6” dan di sebelah kanan 3 tulis “× 6”).

$$\frac{2^{\times 6}}{3_{\times 6}} = \frac{12}{?}$$

P: Tolong jelaskan.
R: 2 mewakili jarak asal Ali berlari, 3 mewakili jarak asal Ah Seng berlari, manakala 12 mewakili jumlah jarak Ali berlari, “?” mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari dan “× 6” mewakili 6 ganda.
P: Bagaimanakah cikgu selesaikan masalah ini?
R: Mula-mula, saya menulis pecahan setara, iaitu 2/3 = 12/?. Kemudian mencari gandaan bagi 2 untuk memperbesarkan 2 jadi 12. Selepas itu mendarabkan gandaan itu dengan 3 untuk mendapat jarak bagi “?”, agar memadani pecahan setara. Saya guna sifir 2 untuk mencari gandaan itu, iaitu “6 × 2 = 12”, kemudian menggunakan gandaan itu darab dengan 3 akan mendapat 18.
P: Bagaimanakah cikgu tahu cara ini sesuai digunakan untuk mencari jawapan?
R: Jarak Ali berlari adalah berkadar terus dengan jarak Ah Seng berlari, dengan itu saya menggunakan pecahan setara. Ini kerana jarak mereka adalah berkadar terus, maka nilai pecahan bagi jarak Ali berlari dengan jarak Ah Seng berlari adalah sentiasa sama. Dalam pecahan setara, pecahan pertama berkaitan dengan jarak asal mereka, manakala pecahan kedua adalah pembesaran bagi pecahan pertama agar nilai kedua-dua pecahan itu sama. Pengangka dan penyebut jika didarab dengan nombor yang sama akan mendapat pecahan setara yang lebih besar daripadanya tetapi nilai mereka masih sama. Dengan itu, cara ini adalah sesuai digunakan.
P: Dengan cara ini, apakah jawapannya?
R: 18 km.
P: Bagaimanakah cikgu tahu jawapan ini adalah betul?

R: Jarak Ali dari 2 km jadi 12 km iaitu telah diperbesarkan sebanyak 6 kali ganda, dengan itu jarak Ah Seng juga perlu diperbesarkan sebanyak 6 kali ganda. Ini kerana jarak Ali berlari adalah berkadar terus dengan jarak Ah Seng berlari. Dengan itu 3 km diperbesarkan sebanyak 6 kali ganda akan menjadi, “6 × 3 km = 18 km”. Dengan itu, terbuktilah jawapan itu adalah betul.

P: Bolehkah cikgu mempermudahkan cara ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis 2/ 3 = *x*/*y*).

$$\frac{2^{\times a}}{3 \times a} = \frac{x}{y}$$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 2 mewakili jarak asal Ali berlari, 3 mewakili jarak asal Ah Seng berlari, manakala *x* mewakili jumlah jarak Ali berlari, *y* mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari dan “× *a*” mewakili a kali ganda.

P: Bagaimanakah cikgu menjustifikasi rumusan itu adalah betul?

R: Saya guna contoh, iaitu apabila Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km, jika jumlah jarak Ali berlari ialah 12 km, cari jumlah jarak Ah Seng berlari. Dengan menggunakan rumusan: 2/3 = 12/18. 12/18 adalah pecahan setara bagi 2/3.

Cara penaakulan yang digunakan oleh Chong dalam menyelesaikan masalah (1) melibatkan konsep pecahan setara. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula menulis pecahan setara, “2/3 = 12/?”. Kemudian mencari gandaan bagi 2 untuk memperbesar 2 menjadi 12. Selepas itu mendarabkan gandaan itu dengan 3 untuk mendapat jarak bagi “?”, agar memadani pecahan setara. Beliau menyatakan sifir 2 digunakan untuk mencari gandaan itu, iaitu “6 × 2 = 12”, kemudian menggunakan gandaan itu darab dengan 3, iaitu “6 × 3 = 18” akan mendapat 18. Beliau menjustifikasikan cara ini sesuai digunakan untuk mencari jawapan dengan memberi penerangan logikal, iaitu jarak Ali berlari adalah berkadar terus dengan jarak Ah Seng berlari, dengan itu beliau menggunakan pecahan setara. Beliau menyatakan ini kerana jika jarak mereka adalah berkadar terus, maka nilai pecahan bagi jarak Ali berlari dengan jarak Ah Seng berlari adalah sentiasa sama. Dalam pecahan setara, pecahan pertama berkaitan dengan jarak asal mereka, manakala pecahan kedua adalah pembesaran bagi pecahan pertama agar nilai kedua-dua pecahan itu sama. Pengangka dan penyebut jika didarab dengan nombor yang sama akan mendapat pecahan setara yang lebih besar daripadanya tetapi nilai mereka masih sama. Dengan itu, cara ini adalah sesuai digunakan.

Chong menyatakan dengan cara penyelesaian tersebut akan mendapat jawapannya, 18 km. Beliau membuktikan jawapan itu adalah betul dengan penerangan logikal, iaitu jarak Ali dari 2 km jadi 12 km iaitu telah diperbesar sebanyak 6 kali ganda, dengan itu jarak Ah Seng juga perlu diperbesarkan sebanyak 6 kali ganda. Beliau menerangkan ini kerana jarak Ali berlari adalah berkadar terus dengan jarak Ah Seng berlari. Beliau menyatakan lagi, 3 km diperbesarkan sebanyak 6 kali ganda , iaitu “6 × 3 km = 18 km” akan mendapat jawapan 18 km. Dengan itu, terbuktilah jawapan itu adalah betul.

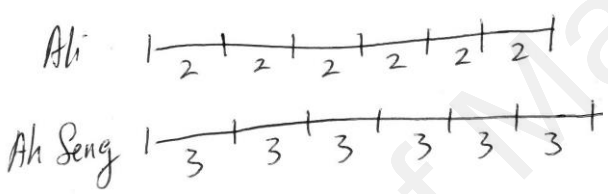
Chong mempermudahkan cara penyelesaian dengan rumusan: $(2 \times a) / (3 \times a) = x/y$). Beliau menerangkan 2 mewakili jarak asal Ali berlari, 3 mewakili jarak asal Ah Seng berlari, manakala x mewakili jumlah jarak Ali berlari, y mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari dan “$\times\ a$” mewakili a kali ganda. Beliau membuktikan rumusan itu betul dengan memberi contoh, iaitu apabila Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km, jika jumlah jarak Ali berlari ialah 12 km, cari jumlah jarak Ah Seng berlari. Dengan menggunakan rumusan: (2 × 6) / (3 × 6) = 12/18. Dengan itu, jawapannya 18 km. Jawapan ini sama dengan jawapan menggunakan cara di atas.

Cara penaakulan induktif Chong dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak dengan konsep pecahan setara dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 II (C) Konsep Pecahan Setara.

Di samping itu, dari hasil kajian ini didapati lima daripada enam orang responden menggunakan penaakulan induktif melibatkan kaedah pengukuran dengan menggunakan operasi tambah berulang untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 4.1(John) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural yang menggunakan kaedah pengukuran dengan operasi tambah berulang yang melibatkan garis nombor, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.1(John): Masalah Melibatkan Jarak

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis “Ali” dan di sebelah kanannya melukis satu garis nombor ada 6 selang dengan setiap selang 2, kemudian menulis “Ah Seng” dan di sebelah kanannya melukis satu garis nombor ada 6 selang dengan setiap selang 3).



P: Boleh cikgu terangkan apa yang ditulis itu?
R: Garis nombor sebelah Ali mewakili jarak dia berlari, iaitu selang 2 mewakili Ali berlari 2 km, enam selang 2 mewakili Ali telah berlari 6 kali 2 km, manakala garis nombor sebelah Ah Seng mewakili jarak dia berlari, iaitu selang 3 mewakili Ah Seng berlari 3 km, enam selang 3 mewakili dia telah berlari 6 kali 3 km.
P: Bagaimanakah cikgu tahu Ali berlari 6 kali 2 km?
R: Saya guna operasi bahagi, iaitu “12 ÷ 2”?
P: Mengapakah cikgu menggunakan 12 bahagi 2, tetapi bukan 12 bahagi 3?
R: 12 itu mewakili jarak 12 km yang dilalui oleh Ali, dan mengikut ketetapan Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Dengan itu, untuk mengetahui dalam 12 km ada berapa 2 km, maka 12 km perlu bahagi dengan 2 km, dan bukan bahagi 3 kerana kita tidak perlu tahu dalam 12 km ada berapa 3 km.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya mengenal pasti jumlah bilangan 2 km dalam 12 km yang telah dilalui oleh Ali dengan pembahagian, kemudian mewakilkannya dengan garis nombor, iaitu garis nombor dengan setiap selang ditandakan 2 yang sama bilangan selang dengan garis nombor dengan setiap selang ditandakan 3.Dengan menjumlahkan bilangan 3, maka saya dapat mengetahui jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng, iaitu “3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18”.
P: Dengan cara begini, apakah jawapan cikgu?
R: 18 km. Ah Seng berlari sejauh 18 km.
P: Bagaimanakah cikgu tahu jawapan ini adalah betul?
R: Saya guna pendaraban. 2 km ke 12 km, boleh jadi “6 × 2 km = 12 km”, maka “6 × 3 km = 18 km”. Ini kerana jumlah gandaan bagi 2 km sama dengan jumlah gandaan bagi 3 km. 6 adalah jumlah gandaan bagi 2 km, maka 6 juga adalah jumlah gandaan bagi 3 km. Dengan itu, jawapannya adalah betul.
P: Dengan itu, bolehkah cara ini dipermudahkan?
R: Em… (Cikgu menulis “$a \times 2 = b$, $a \times 3 = c$”).

$a \times 2 = b \quad , \quad a \times 3 = c$

P: Cuba terangkan.
R: *a* mewakili jumlah bilangan 2 km, 2 mewakili 2 km, iaitu jarak Ali berlari, *b* mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, manakala 3 mewakili 3 km, iaitu jarak Ah Seng berlari, dan *c* mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari. Jumlah bilangan 2 km, iaitu *a*, adalah sama dengan jumlah bilangan 3 km. *b* adalah berkadar terus dengan *c*. Jika *b* diberi, maka dengan sifir 2 akan mendapat *a*.
P: Bagaimanakah cikgu dapat buktikan rumusan ini adalah betul?
R: Saya guna contoh, jika *b* ialah 12, maka dengan rumusan: $a \times 2 = b$, $6 \times 2 = 12$, akan mendapat $a = 6$. Gantikan $a = 6$ ke dalam rumusan: $a \times 3 = c$, maka $6 \times 3 = 18$. Jawapan ini adalah sama dengan jawapan yang menggunakan cara melukis garis nombor. Dengan itu, terbuktilah rumusan ini adalah betul.

Cara penaakulan dalam penyelesaian masalah diberikan oleh John melibatkan dua garis nombor yang ada 6 selang, dengan setiap selang masing-masing ditandakan 2 dan 3. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis “Ali” dan di sebelah kanannya melukis satu garis nombor yang ada 6 selang dengan setiap selang 2, kemudian menulis “Ah Seng” dan di sebelah kanannya melukis satu garis nombor yang ada 6 selang dengan setiap selang 3. Beliau menerangkan bahawa garis nombor sebelah Ali mewakili jarak dia berlari, iaitu selang 2 mewakili Ali berlari 2 km, enam selang 2 mewakili Ali telah berlari 6 kali 2 km, manakala garis nombor sebelah Ah Seng pula mewakili jarak dia berlari, iaitu selang 3 mewakili Ah Seng berlari 3 km, dan enam selang 3 mewakili dia telah berlari 6 kali 3 km. John menjelaskan beliau mengetahui Ali berlari 6 kali 2 km kerana beliau menggunakan operasi bahagi, iaitu “12 ÷ 2”. Beliau menjelaskan lagi, 12 bahagi 2, tetapi bukan 12 bahagi 3 kerana 12 itu mewakili jarak 12 km yang dilalui oleh Ali, dan mengikut ketetapan Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Dengan itu, untuk mengetahui dalam 12 km ada berapa 2 km, maka 12 km perlu bahagi dengan 2 km dan bukan bahagi 3 kerana kita tidak perlu tahu dalam 12 km ada berapa 3 km. Seterusnya, beliau menjelaskan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula beliau mengenal pasti jumlah bilangan 2 km dalam 12 km yang telah dilalui oleh Ali dengan pembahagian, kemudian mewakilkannya dengan garis nombor, selepas itu, beliau menulis garis nombor dengan setiap selang ditandakan 3 yang sama bilangan selang dengan garis nombor dengan setiap selang ditandakan 2. Dengan menjumlahkan bilangan 3, maka jumlah jarak yang dilalui oleh Ah Seng akan diketahui, iaitu "3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18".

Dengan cara seperti di atas, John mendapat jawapan 18km, iaitu Ah Seng berlari sejauh 18 km. Beliau menjustifikasikan jawapannya adalah betul dengan menggunakan pendaraban. Ini kerana 2 km ke 12 km, boleh jadi "6 × 2 km = 12 km", maka "6 × 3 km = 18 km". Ini kerana jumlah gandaan bagi 2 km sama dengan jumlah gandaan bagi 3 km. 6 ialah jumlah gandaan bagi 2 km, maka 6 juga adalah jumlah gandaan bagi 3 km. Dengan itu, jawapannya adalah betul.

John mencadangkan satu cara untuk mempermudah cara tersebut di atas, iaitu dengan rumusan: $a \times 2 = b$, $a \times 3 = c$. Beliau menerangkan a mewakili jumlah bilangan 2 km, 2 mewakili 2 km, iaitu jarak Ali berlari, b mewakili jumlah jarak yang dilalui oleh Ali, manakala 3 mewakili 3 km, iaitu jarak Ah Seng berlari, dan c mewakili jumlah jarak Ah Seng berlari. Jumlah bilangan 2 km, iaitu a, adalah sama dengan jumlah bilangan 3 km. b adalah berkadar terus dengan c. Jika b diberi, maka dengan sifir 2 akan mendapat a. Beliau membuktikan rumusan itu adalah betul dengan menggunakan contoh, jika b ialah 12, maka dengan rumusan: $a \times 2 = b$, $6 \times 2 = 12$, akan mendapat $a = 6$. Gantikan $a = 6$ ke dalam rumusan: $a \times 3 = c$, maka $6 \times 3 = 18$. Jawapan itu adalah sama dengan jawapan yang menggunakan cara melukis garis nombor. Dengan itu, terbuktilah rumusan itu adalah betul.

Cara penaakulan induktif John dalam menyelesaikan masalah melibatkan jarak dengan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 II (D) Kaedah Pengukuran.

Daripada kajian ini, didapati empat daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan dengan gabungan operasi bahagi dan tolak untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 4.2(Chong) menunjukkan cara penaakulan induktif dalam kategori prosedural yang menggunakan gabungan operasi bahagi dan tolak, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.2 (Chong): Masalah Melibatkan Pengagihan Gula-gula

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis “43 ÷ 6= ” kemudian menggunakan pembahagian panjang untuk mendapat hasil bahagi, iaitu 7 baki 1. Selepas itu, menulis “6 – 1 = 5”).

43 ÷ 6 = 7 b 1
6 - 1 = 5

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6\overline{)\,43} \\ 42 \\ \hline 1 \end{array}$$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 43 mewakili 43 biji gula-gula, 6 mewakili enam orang kanak-kanak, simbol “÷” mewakili bahagi, manakala 7 mewakili tujuh biji gula-gula yang diperoleh oleh setiap kanak-kanak, dan 1 mewakili baki. 5 ialah beza bagi enam dan satu, yang mewakili lima biji gula-gula, iaitu bilangan gula-gula yang diperlukan lagi.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menentukan jenis operasi yang perlu digunakan untuk menyelesaikan masalah. Saya dapati masalah ini meminta kita mengagihkan 43 biji gula-gula kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, maka saya pun tahulah masalah itu berkaitan dengan operasi bahagi. Saya juga dapati 43 bukan gandaan 6, maka ia mesti ada baki, dengan itu saya membahagikan 43 dengan 6 untuk mendapat hasil bahagi dan bakinya. Kemudian saya menolakkan 1 daripada 6 untuk mendapat bilangan gula-gula yang diperlukan lagi agar keenam-enam orang kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak.

P: Bagaimanakah cikgu dapat menjustifikasikan cara ini sesuai digunakan untuk menyelesaikan masalah di atas?

R: Saya guna penerangan logikal, iaitu konsep bahagi adalah mengagihkan sejumlah objek kepada sejumlah orang dengan bilangan yang sama banyak. Dengan itu, 43 diagihkan kepada enam orang kanak-kanak perlu guna operasi bahagi. 43 dibahagi dengan 6 akan mendapat hasilnya, 7 baki 1, iaitu enam orang kanak-kanak dengan setiap orang mendapat tujuh biji gula-gula dan tinggal sebiji. Tinggal sebiji gula-gula bermakna bilangan ini tidak cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak. Dengan itu, kita perlu mencukupkannya enam biji gula-gula. Untuk mengetahui jumlah yang diperlukan lagi bagi sebiji gula-gula untuk mencukupkan enam biji kita perlu menolakkan baki daripada enam untuk mendapat beza. Ini kerana beza inilah bilangan yang diperlukan lagi agar setiap kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama.

P: Dengan cara begini, apakah jawapan cikgu?

R: 5 biji gula-gula yang diperlukan lagi.

P: Bagaimanakah cikgu menjustifikasikan jawapan ini adalah betul?

R: Saya guna kaedah semak jawapan dengan operasi tambah dan bahagi. “43 ÷ 6 = 7 baki 1”, iaitu 43 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan setiap orang akan mendapat tujuh biji dan tinggal sebiji. Ada gula-gula yang tinggal bermakna bilangan gula-gula itu tidak cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama. Untuk mengetahui bilangan yang kurang itu, saya cari beza di antara satu dengan enam,iaitu “6 – 1 = 5”, akan mendapat beza lima. Ini bermakna kita perlu lima biji gula-gula lagi. Dengan itu, untuk menjustifikasikan penambahan lima biji gula-gula kepada 43 biji gula-gula itu adalah cukup untuk mengagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, maka “5 + 43 = 48”, kemudian “48 ÷ 6 = 8”, ini bermakna 48 biji gula-gula cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan setiap orang mendapat lapan biji tanpa baki. Dengan ini, terbuktilah jawapan ini adalah betul, iaitu kita perlu menambahkan 5 biji gula-gula lagi kepada 43 biji gula-gula supaya cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak.

P: Bolehkah cara seperti di atas dipermudahkan untuk mendapat jawapan?

R: Em…(Cikgu menulis ($x \div 6 = a$ baki b, $6 – b = c$).

$x \div 6 = a$ baki b

$6 - b = c$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: x mewakili jumlah gula-gula, 6 mewakili 6 orang kanak-kanak, *a* mewakili kuantiti gula-gula yang diperoleh oleh setiap kanak-kanak, manakala *b* mewakili baki dan *c* mewakili beza, iaitu kuantiti yang diperlukan lagi.

P: Bagaimanakah cikgu tahu rumusan cikgu itu adalah betul?

R: Saya justifikasikan dengan contoh, iaitu jika 35 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak, berapakah kuantiti gula-gula yang diperlukan lagi supaya keenam-enam orang kanak-kanak mendapat kuantiti gula-gula yang sama banyak? Dengan rumusan, “35 ÷ 6 = 5 baki 5”, kemudian “6 – 5 = 1”. Seterusnya, “35 + 1 = 36” dan “36 ÷ 6 = 6”, ini bermakna 35 biji gula-gula tambah sebiji lagi akan menjadi 36 biji, iaitu cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama tanpa baki. Dengan itu, rumusan ini adalah betul.

Cara penaakulan dalam penyelesaian masalah yang digunakan oleh Chong untuk menyelesaikan masalah tentang mencari bilangan gula-gula yang diperlukan lagi agar sejumlah gula-gula cukup diagihkan sama banyak kepada sejumlah kanak-

kanak membabitkan pembahagian dan penolakan. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis ayat matematik “43 ÷ 6 =”, kemudian menggunakan pembahagian panjang untuk mendapat hasil bahagi, iaitu 7 baki 1. Selepas itu, menulis “6 – 1 = 5”. Beliau menerangkan 43 mewakili 43 biji gula-gula, 6 mewakili enam orang kanak-kanak, simbol “÷” mewakili bahagi, manakala 7 mewakili tujuh biji gula-gula yang diperoleh oleh setiap kanak-kanak, dan 1 mewakili baki, manakala 5 ialah beza bagi enam dan satu, yang mewakili lima biji gula-gula, iaitu bilangan gula-gula yang diperlukan lagi.

Chong menjelaskan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula beliau menentukan jenis operasi yang perlu digunakan untuk menyelesaikan masalah. Beliau menyatakan, beliau mendapati masalah itu meminta kita mengagihkan 43 biji gula-gula kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, maka beliau pun mengetahui masalah itu berkaitan dengan operasi bahagi. Seterusnya, beliau menyatakan 43 bukan gandaan 6, maka ia mesti ada baki, dengan itu beliau membahagikan 43 dengan 6 untuk mendapat hasil bahagi dan bakinya. Kemudian, beliau menolakkan 1 daripada 6 untuk mendapat bilangan gula-gula yang diperlukan lagi agar keenam-enam orang kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama banyak.

Chong menjustifikasikan cara menggunakan gabungan operasi bahagi dan tolak untuk menyelesaikan masalah mencari bilangan gula-gula yang diperlukan lagi agar sejumlah gula-gula cukup diagihkan sama banyak kepada sejumlah kanak-kanak sesuai digunakan dengan menggunakan penerangan logikal, iaitu konsep bahagi ialah mengagihkan sejumlah objek kepada sejumlah orang dengan bilangan yang sama banyak. Dengan itu, 43 diagihkan kepada enam orang kanak-kanak perlu mengguna operasi bahagi. 43 dibahagi dengan 6 akan mendapat hasil bahagi 7 baki

1, iaitu enam orang kanak-kanak dengan setiap orang mendapat tujuh biji gula-gula dan tinggal sebiji. Tinggal sebiji gula-gula bermakna bilangan ini tidak cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak. Dengan itu, kita perlu mencukupkannya enam biji gula-gula. Untuk mengetahui jumlah yang diperlukan lagi bagi sebiji gula-gula untuk mencukupi enam biji kita perlu menolakkan baki daripada enam untuk mendapat beza. Ini kerana beza inilah bilangan yang diperlukan lagi agar setiap orang kanak-kanak mendapat bilangan gula-gula yang sama.

Chong menyatakan dengan cara di atas, beliau akan mendapat jawapan, iaitu 5 biji gula-gula yang diperlukan lagi. Beliau menjustifikasikan jawapan itu adalah betul dengan kaedah semak jawapan menggunakan operasi tambah dan bahagi. Beliau menerangkan "43 ÷ 6 = 7 baki 1", bermakna 43 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan setiap orang mendapat tujuh biji dan tinggal sebiji.

Menurut Chong, ada gula-gula yang tinggal bermakna bilangan gula-gula itu tidak cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama. Untuk mengetahui bilangan yang kurang itu, beliau mencari beza di antara satu dengan enam, iaitu "6 – 1 = 5", akan mendapat bezanya lima. Ini bermakna masih perlu lima biji gula-gula lagi. Dengan itu, untuk menjustifikasi penambahan lima biji gula-gula kepada 43 biji gula-gula itu adalah cukup untuk mengagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak, maka "5 + 43 = 48", kemudian "48 ÷ 6 = 8", ini bermakna 48 biji gula-gula cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan setiap orang mendapat lapan biji tanpa baki. Dengan ini, terbuktilah jawapan ini adalah betul, iaitu kita perlu menambahkan 5 biji gula-gula lagi kepada 43 biji gula-gula supaya cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama banyak.

Chong mempermudahkan cara penyelesaian pertama dengan rumusan: $x \div 6 = a$ baki b, dan $6 - b = c$. Beliau menerangkan x mewakili jumlah gula-gula, 6 mewakili enam orang kanak-kanak, a mewakili kuantiti gula-gula yang diperolehi oleh setiap kanak-kanak, manakala b mewakili baki dan c mewakili beza, iaitu kuantiti yang diperlukan lagi. Beliau menjustifikasikan rumusan itu adalah betul dengan contoh, " Jika 35 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak, berapakah kuantiti gula-gula yang diperlukan lagi supaya keenam-enam orang kanak-kanak mendapat kuantiti gula-gula yang sama banyak. Dengan rumusan, "35 ÷ 6 = 5 baki 5", kemudian "6 – 5 = 1". Seterusnya, "35 + 1 = 36" dan "36 ÷ 6 = 6", ini bermakna 35 biji gula-gula tambah sebiji lagi akan menjadi 36 biji, iaitu cukup diagihkan kepada enam orang kanak-kanak dengan bilangan yang sama tanpa baki. Dengan itu, rumusan ini adalah betul.

Cara penaakulan Chong bagi menyelesaikan masalah pengagihan gula-gula melibatkan gabungan operasi bahagi dan tolak dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (E) Gabungan Operasi Bahagi Dan Tolak.

Di samping itu, kajian itu juga mendapati lima daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan induktif melibatkan gandaan yang lebih besar dan terdekat untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 4.2 (John) menunjukkan cara penaakulan induktif dalam kategori prosedural yang menggunakan gandaan yang lebih besar dan terdekat, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.2 (John): Masalah Melibatkan Pengagihan Gula-gula

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ada. Saya guna sifir 6. (Cikgu menulis sifir 6 : $1 \times 6 = 6$, $2 \times 6 = 12$, $3 \times 6 = 18$, $4 \times 6 = 24$, $5 \times 6 = 30$, $6 \times 6 = 36$, $7 \times 6 = 42$, $8 \times 6 = 48$, dan $9 \times 6 = 54$. Cikgu menuliskan satu anak panah di antara $7 \times 6 = 42$ dan $8 \times 6 = 48$, kemudian menulis nombor 43. Seterusnya menulis bentuk lazim $48 - 43 = 5$).

$1 \times 6 = 6$
$2 \times 6 = 12$
$3 \times 6 = 18$
$4 \times 6 = 24$

$5 \times 6 = 30$
$6 \times 6 = 36$
$7 \times 6 = 42 \longrightarrow$ 43
$8 \times 6 = 48$
$9 \times 6 = 54$
$43 + 5 = 48$

$$\begin{array}{r} 48 \\ -43 \\ \hline 5 \end{array}$$

Perlu 5 biji lagi

P: Boleh cikgu terangkan apa yang dilukis itu?
R: 6 mewakili enam orang kanak-kanak. $1 \times 6 = 6$ sehingga $9 \times 6 = 54$ ialah sifir 6. 43 mewakili kuantiti yang diberi. $48 - 43$ untuk mencari bezanya iaitu 5.
P: Mengapakah cikgu menggunakan sifir 6?
R: Ini kerana terdapat enam orang kanak-kanak. Setiap kali saya mengagihkan sebiji gula-gula kepada seorang kanak-kanak, maka saya perlu enam biji gula-gula. Dengan itu, setiap kali agihan gula-gula saya perlu ada enam biji gula-gula.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya menulis sifir 6 dari $1 \times 6 = 6$ sehingga $9 \times 6 = 54$ untuk mengenal pasti kuantiti yang diberi itu terletak di antara mana dua hasil darab. Selepas itu, saya menggunakan hasil darab yang besar, iaitu 48 tolak kuantiti yang diberi, iaitu 43 untuk mendapat kuantiti yang perlu ditambahkan, iaitu 5.
P: Mengapakah cikgu menggunakan 48 tolak 43 , bukan 43 tolak 42?
R: Jika saya mengagihkan 7 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka tinggal sebiji lagi, dan jika saya mengagihkan 8 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka saya perlu ada 48 biji gula-gula, tetapi sekarang ada 43 sahaja. Saya hendak tahu bilangan yang kurang, maka saya perlu menolakkan kuantiti yang diperlukan dengan kuantiti yang ada.
P: Mengapakah cikgu tidak meletakkan 43 di antara $6 \times 6 = 36$, dan $7 \times 6 = 42$?
R: Kalau saya agihkan 6 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, saya akan tinggal 7 biji gula-gula. Ini boleh diagihkan lagi kepada 6 orang kanak-kanak, kerana 7 lebih daripada 6.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara begini?
R: Cara ini secara visual dapat tahu kuantiti gula-gula yang diberi kepada setiap kanak-kanak dan kuantiti yang diperlukan lagi.
P: Dengan cara begini, apakah jawapannya?
R: Masih perlu 5 biji gula-gula.
P: Bagaimanakah cikgu tahu jawapan itu adalah betul?
R: Dari sifir 6, $7 \times 6 = 42$, bermaksud jika enam orang kanak-kanak diberikan tujuh biji gula-gula setiap orang, maka kita perlu 42 biji gula-gula, tetapi kita ada 43 biji, maka lebih sebiji. Ini tidak boleh diterima kerana ada baki. Jika $8 \times 6 = 48$, bermaksud enam orang kanak-kanak diberikan lapan biji gula-gula setiap orang, maka kita perlu 48 biji gula-gula, tetapi kita hanya ada 43 biji, maka kita perlu lagi 5 biji, iaitu beza 48 dengan 43 ialah 5. Dengan itu terbuktilah masih perlu 5 biji gula-gula lagi.
P: Bolehkah cara ini dipermudahkan untuk mendapat jawapan?
R: Em… (Cikgu fikir sebentar, kemudian menulis rumusan: $6y - x = a$).

$6y - x = a$

P: Boleh cikgu terangkan.
R: *y* mewakili bilangan gandaan 6, *x* mewakili kuantiti yang diberi, manakala *a* mewakili kuantiti yang perlu ditambahkan.
P: Bagaimanakah cikgu dapat membuktikan rumusan ini adalah betul?
R: Saya beri contoh, jika kuantiti yang diberi itu ialah 43, mula-mula saya perlu mencari gandaan 6 yang dekat tetapi lebih daripada 43 iaitu 8 × 6 =48, 9 × 6 =54 dan sebagainya untuk mendapat *y* , iaitu 8 atau 9 dan sebagainya. Kemudian saya menolakkan 43 daripada 48, 54 dan sebagainya akan mendapat beza 5, 11 dan sebagainya. Beza itu lah yang kita mahu, iaitu kuantiti yang diperlukan lagi untuk cukup mengagihkan kepada enam orang kanak-kanak. Dengan itu, terbuktilah cara ini adalah betul.

Cara penyelesaian masalah bagi John membabitkan sifir 6. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis sifir 6 : 1 × 6 = 6, 2 × 6 = 12, 3 × 6 = 18, 4 × 6 = 24, 5 × 6 = 30, 6 × 6 = 36, 7 × 6 = 42, 8 × 6 = 48, dan 9 × 6 = 54. Beliau menuliskan satu anak panah di antara 7 × 6 = 42 dan 8 × 6 = 48, kemudian menulis nombor 43. Seterusnya menulis bentuk lazim 48 – 43 = 5. Beliau menerangkan 6 mewakili enam orang kanak-kanak. 1 × 6 = 6 sehingga 9 × 6 = 54 ialah sifir 6. 43 mewakili kuantiti yang diberi. 48 – 43 untuk mencari bezanya iaitu 5. Seterusnya, beliau menjelaskan sifir 6 digunakan kerana terdapat enam orang kanak-kanak. Setiap kali mengagihkan sebiji gula-gula kepada seorang kanak-kanak, maka perlu enam biji gula-gula. Dengan itu, setiap kali agihan gula-gula perlu ada enam biji gula-gula. Ini sama dengan sifir 6. Setiap kali tambah 6.

John menerangkan cara menyelesaikan masalahnya, iaitu mula-mula beliau menulis sifir 6 dari 1 × 6 = 6 sehingga 9 × 6 = 54 untuk mengenal pasti kuantiti yang diberi itu terletak di antara mana dua hasil darab. Selepas itu, beliau menggunakan hasil darab yang besar, iaitu 48 tolak kuantiti yang diberi, iaitu 43 untuk mendapat kuantiti yang perlu ditambahkan, iaitu 5. Beliau menerangkan 48 tolak 43 , bukan 43 tolak 42 kerana jika mengagihkan 7 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka tinggal sebiji lagi, dan jika mengagihkan 8 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka perlu ada 48 biji gula-gula, tetapi sekarang ada 43 sahaja. Dengan itu, beliau hendak mengetahui bilangan yang kurang, maka perlu menolakkan kuantiti yang diperlukan dengan kuantiti yang ada.

John menerangkan 43 diletakkan di antara 6 × 6 = 36, dan 7 × 6 = 42 kerana kalau mengagihkan 6 biji gula-gula kepada setiap kanak-kanak, maka beliau akan tinggal 7 biji gula-gula. Ini boleh diagihkan lagi kepada 6 orang kanak-kanak, kerana 7 lebih daripada 6. Beliau menyatakan boleh juga kita menambah lebih daripada 5 biji gula-gula ke kuantiti yang diberi. Beliau menerangkan dengan memberi contohnya, tambah 11 biji gula-gula, maka 43 tambah 11 akan mendapat 54, 54 bahagi 6, setiap orang akan dapat 9 biji gula-gula. Beliau menyatakan lagi, jika tambah 17 biji, maka 43 tambah 17 akan mendapat 60, dan 60 bahagi 6, setiap orang akan mendapat 10 biji gula-gula. John menerangkan sifir 6 digunakan kerana cara itu secara visual dapat tahu kuantiti gula-gula yang diberi kepada setiap kanak-kanak dan kuantiti yang diperlukan lagi. Beliau menyatakan dengan cara begitu akan mendapat jawapan, iaitu masih perlu 5 biji gula-gula. Beliau memberi alasan memperoleh jawapan itu dari sifir 6, 7 × 6 = 42, bermaksud jika enam orang kanak-kanak diberikan tujuh biji gula-gula setiap orang, maka kita perlu 42 biji gula-gula, tetapi kita ada 43 biji, maka lebih sebiji. Ini tidak boleh diterima kerana ada baki. Jika 8 × 6 = 48, bermaksud enam orang kanak-kanak diberikan lapan biji gula-gula setiap orang, maka kita perlu 48 biji gula-gula, tetapi kita hanya ada 43 biji, maka kita perlu lagi 5 biji, iaitu beza 48 dengan 43 ialah 5. Dengan itu terbuktilah masih perlu 5 biji gula-gula lagi.

John mencadangkan satu cara untuk mempermudah cara tersebut, iaitu menggunakan rumusan: $6y - x = a$. Beliau menerangkan y mewakili bilangan gandaan 6, x mewakili kuantiti yang diberi, manakala a mewakili kuantiti yang perlu ditambahkan. Beliau membuktikan rumusan itu adalah betul dengan contoh, jika kuantiti yang diberi itu ialah 43, mula-mula perlu mencari gandaan 6 yang terdekat tetapi perlu lebih daripada 43 iaitu 8 × 6 =48, untuk mendapat *y*, iaitu 8 atau 9 dan sebagainya. Kemudian menolakkan 43 daripada 48, 54 dan sebagainya akan mendapat beza 5, 11 dan sebagainya. Beza itulah yang diperlukan, iaitu kuantiti yang diperlukan lagi untuk cukup mengagihkan kepada enam orang kanak-kanak. Dengan itu, terbuktilah cara ini adalah betul.

Cara penaakulan John bagi menyelesaikan masalah pengagihan gula-gula melibatkan gandaan lebih besar dan terdekat dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (B) Gandaan Lebih Besar Dan Terdekat.

Seterusnya, kajian ini juga mendapati seorang daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan induktif dengan gandaan yang lebih kecil dan terdekat untuk menyelesaikan melibatkan pembahagian nombor bulat.. Sebagai contoh, tingkah laku Shidah dalam Protokol 4.2(Shidah) menunjukkan cara penaakulan induktif dalam kategori prosedural yang menggunakan gandaan yang lebih kecil dan terdekat, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.2 (Shidah): Masalah Melibatkan Pengagihan Gula-gula

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: (Cikgu menulis "43 – 7(6) = 1", kemudian menulis "1 + 5 = 6). 43 biji gula-gula tolak 7(6) iaitu 42 biji tinggal sebiji. Sebiji tambah 5 biji akan dapat 6 biji. Dengan itu, setiap orang akan mendapat tujuh biji tanpa baki. Ini menunjukkan tambahan 5 biji gula-gula ke dalam 43 biji gula-gula itu adalah betul.

$43 - 7(6) = 1 \quad , \quad 1 + 5 = 6$

P: Bolehkah cara ini dipermudahkan untuk mendapat jawapan?
R: Boleh. (Cikgu menulis "x – n(6) = a", kemudian menulis "a + b = 6").

$x - n(6) = a \qquad a + b = 6$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: x mewakili nombor yang diberi, n mewakili jumlah kali 6 ditolak, a mewakili beza bagi nombor yang diberi dan jumlah kesemua enam yang telah ditolakkan, manakala b mewakili bilangan yang diperlukan lagi.
P: Bagaimanakah cikgu tahu rumusan cikgu itu adalah betul?
R: Saya buktikan dengan contoh, iaitu jika 35 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak. Dengan rumusan, "35 – 5(6) = 5, 5 + 1= 6".
P: Boleh cikgu terangkan?
R: Boleh. (Cikgu menulis tolak berturut-turut dalam bentuk lazim, iaitu "35 – 6 = 29, 29 – 6 = 23, 23 – 6 = 17, 17 – 6 = 11, 11 – 6 = 5", kemudian menulis ayat matematik "5 + 1 = 6"). "35 – 5(6)" bermaksud 35 ditolak 6 sebanyak 5 kali, iaitu 35 biji gula-gula diagihkan secara enam-enam, dengan itu setiap kali perlu tolakkan enam biji gula-gula. Akhirnya tinggal lima biji. Lima perlu tambah 1 baru cukup 6. Dengan itu, terbuktilah, rumusan di atas adalah betul.

Beliau membuktikan jawapan itu adalah betul dengan menulis "43 + 7(6) = 1", kemudian menulis 1 + 5 = 6. Beliau menerangkan 43 biji gula-gula tolak 7(6) iaitu 42 biji tinggal sebiji. Sebiji tambah 5 biji akan dapat 6 biji. Dengan itu, setiap orang akan mendapat tujuh biji tanpa baki. Ini menunjukkan tambahan 5 biji gula-gula ke dalam 43 biji gula-gula itu adalah betul. Beliau mempermudah cara tersebut dengan menulis rumusan: "$x - n(6) = a$", kemudian menulis "$a + b = 6$". Beliau menerangkan x mewakili nombor yang diberi, n mewakili bilangan 6 yang ditolak, a mewakili beza bagi nombor yang diberi dan jumlah kesemua enam yang telah ditolakkan, manakala b mewakili bilangan yang diperlukan lagi. Beliau membuktikan rumusan itu adalah betul dengan contoh, jika 35 biji gula-gula diagihkan kepada enam orang kanak-kanak. Dengan rumusan, "35 – 5(6) = 5, 5 + 1 =6". Beliau menerangkan "35 – 5(6)" bermaksud 35 ditolak 6 sebanyak 5 kali. Beliau menunjukkannya dengan tolak berturut-turut dalam bentuk lazim, iaitu "35 – 6 = 29, 29 – 6 = 23, 23 – 6 = 17, 17 – 6 = 11, 11 – 6 = 5". 35 biji gula-gula diagihkan secara enam-enam, dengan itu setiap kali perlu tolakkan enam biji gula-gula. Akhirnya tinggal lima biji. Lima perlu tambah 1 baru cukup 6. Dengan itu, terbuktilah, rumusan di atas adalah betul.

Cara penaakulan Shidah dalam menyelesaikan masalah pengagihan gula-gula melibatkan penaakulan induktif dengan menggunakan gandaan yang lebih kecil dan terdekat. gandaan lebih besar dan terdekat dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.15 I (G) Gandaan Lebih Kecil Dan Terdekat.

Kajian ini juga mendapati tiga daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan deduktif dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik bahagi dalam menyelesaikan masalah melinatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 4.3(Chong) menunjukkan cara penaakulan induktif dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik bahagi, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.3 (Chong): Masalah Melibatkan Pengagihan Durian

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis "27 – 3 = 24", kemudian menulis "b =24", "b ÷ 1 = 24÷ 1=24", "b ÷ 2 = 24 ÷ 2 =12", "b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8", "b ÷ 4 = 24 ÷ 4 =6", "b ÷ 5 = 24 ÷ 5 = X", "b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4", "b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X", "b ÷ 8 = 24 ÷ 8 =3", "b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X", "b ÷ 12 = 24 ÷12 =2", "b ÷ 24 = 24÷ 24 = 1").

b = 24
b ÷ 8 = 24 ÷ 8 = 3.
b ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X
b ÷ 8 = 24 ÷ 8 = 3
b ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X
b ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4
b ÷ 5 = 24 ÷ 5 = X
b ÷ 4 = 24 ÷ 4 = 6
b ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8
b ÷ 2 = 24 ÷ 2 = 12
b ÷ 1 = 24 ÷ 1 = 24
b ÷ 12 = 24 ÷ 12 = 2

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 27 mewakili 27 biji durian, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, manakala b mewakili 24 biji durian yang perlu diagihkan sama banyak kepada beberapa orang jiran. “24 ÷ 2 = 12” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua-dua, dengan itu 12 orang boleh mendapat durian itu; “24 ÷ 3 = 8” mewakili 24 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, dengan itu 8 orang boleh mendapat durian itu; “24 ÷ 4 = 6” mewakili 24 biji durian diagihkan secara empat-empat, dengan itu 6 orang boleh mendapat durian itu; “24 ÷ 8 = 3” mewakili 24 biji durian diagihkan secara lapan-lapan, dengan itu 3 orang boleh mendapat durian itu, “24 ÷ 12 = 2” mewakili 24 biji durian diagihkan secara duabelas-duabelas, dengan itu 2 orang boleh mendapat durian itu; dan “24 ÷ 24 = 1” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua puluh empat-dua puluh empat, dengan itu 1 orang boleh mendapat durian itu.

P: Mengapakah cikgu memangkah di “24 ÷ 5”, “24 ÷ 7” dan “24 ÷ 9”?

R: 24 dibahagikan dengan 5, 7 atau 9 akan meninggalkan baki, iaitu “24 ÷ 5 = 4 baki 5”, “24 ÷ 7 = 3 baki 3” dan “24 ÷ 9 = 2 baki 6”.

P: Mengapakah ada baki tidak boleh digunakan?

R: Ada baki bermakna objek itu tidak cukup diagihkan kepada sejumlah orang dengan bilangan yang sama.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menolakkan 3 daripada 27 untuk mendapat kuantiti durian yang perlu diagihkan kepada sejumlah jiran, iaitu 24 biji. Kemudian saya cuba membahagikan 24 dengan nombor 1 hingga 9 dan seterusnnya 12 dan 24 untuk memastikan bilangan orang dan kuantiti durian yang boleh diagihkan dengan 24 biji durian tanpa baki.

P: Mengapakah cikgu guna cara begini, iaitu menyenaraikan kesemua kemungkinan dengan ayat matematik, kemudian mengenal pasti ayat matematik, iaitu mencari faktor yang sesuai digunakan?

R: Cara ini lebih sistematik dan senang mendapat jawapan.

P: Mengapakah cikgu cakap begitu?

R: Saya takut ketinggalan satu kemungkinan, maka saya senaraikan kesemua ayat matematik yang mungkin dari nombor kecil ke nombor besar, iaitu dari nombor 1 hingga 24. Dengan ini, senanglah bagi saya memilih ayat matematik yang sesuai untuk mencari faktornya, iaitu nombor bahagi dan hasil bahagi yang sesuai digunakan.

P: Mengapakah cikgu perlu mencari nombor bahagi dan hasil bahagi bagi ayat matematik bahagi itu?

R: Ini kerana dalam masalah perlu kita mencari dua anu iaitu bilangan jiran dan kuantiti durian yang diagihkan kepada setiap orang jiran. Dalam ayat matematik bahagi, nombor bahagi mewakili bilangan jiran yang mendapat durian dan hasil bahagi mewakili kuantiti durian yang diagihkan kepada setiap jiran.

P: Dengan itu, apakah jawapan cikgu?

R: Jawapannya ada banyak. Ia boleh jadi 24 biji durian itu diberikan kepada 1 orang jiran, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, 24 biji durian diberikan kepada 3 orang jiran dengan setiap orang mendapat 8 biji, 24 biji durian diberikan kepada 4 orang jiran dengan setiap orang mendapat 6 biji, 24 biji durian diberikan kepada 6 orang jiran dengan setiap orang mendapat 4 biji, 24 biji durian diberikan kepada 8 orang jiran dengan setiap orang mendapat 3 biji, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, dan 24 biji durian diberikan kepada 24 orang jiran dengan setiap orang mendapat 1 biji.

P: Pada pendapat cikgu, daripada banyak jawapan di atas, jawapan manakah yang kemungkinan besar Pak Kassim akan pilih?

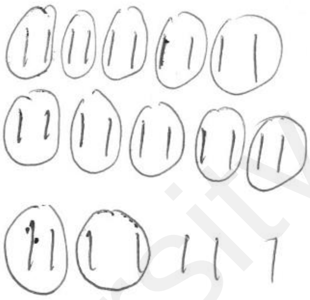
R: 12 orang jiran dengan setiap orang mendapat 2 biji durian.

P: Mengapakah cikgu cakap begitu?

R: Pada kebiasaannya, kita ingin lebih ramai kawan bersama dengan kita untuk menikmati sesuatu, begitu juga anggapan Pak Kassim, dia ingin menikmati duriannya bersama-sama dengan seberapa ramai jirannya yang boleh. Dengan itu, lebih ramai jiran lebih baik. Kalau Pak Kassim memberikan sebiji durian sahaja kepada setiap jirannya mungkin keluarga jirannya tidak cukup makan dan jika berikan tiga biji, maka hanya lapan orang jiran mendapat durian sahaja. Oleh demikian, 12 orang jiran mendapat durian itu dengan setiap orang memperolehi dua biji adalah paling sesuai.

P: Bagaimanakah cikgu menjustifikasikan jawapan itu adalah betul?

R: (Cikgu melukis 27 garis lurus dalam tiga barisan dengan dua barisan ada 10 garis lurus dan satu lagi hanya ada tujuh garis lurus. Kemudian membulatkan dua garis lurus dalam satu bulatan, akhirnya tinggal tiga garis lurus yang tidak dibulatkan.



P: Cuba cikgu terangkan.

R: 27 garis lurus mewakili 27 biji durian, manakala 12 bulatan yang terdapat dua garis lurus dalamnya mewakili 12 orang jiran dengan setiap orang mendapat dua biji durian. Akhirnya tinggal tiga biji durian ialah bakinya.

P: Bolehkah cara ini dipermudahkan untuk mendapat jawapan?

R: Er…(Cikgu berfikir sebentar, selepas itu cikgu menulis "*n*– 3 = *b*, dan *b* ÷ *a* = c).

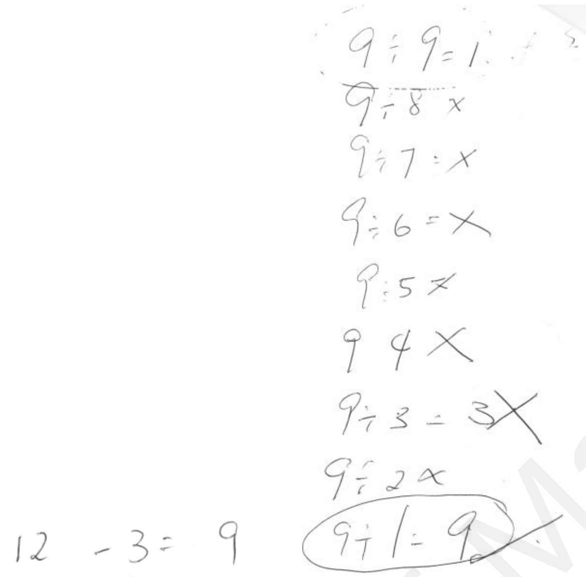
$$n - 3 = b$$
$$b \div a = c$$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: *n* mewakili kuantiti yang diberi, 3 mewakili bilangan yang tinggal, *b* mewakili kuantiti yang perlu diagihkan kepada beberapa kumpulan, manakala *a* mewakili bilangan kumpulan dan *c* mewakili kuantiti objek yang diagihkan.

P: Bagaimanakah cikgu tahu rumusan ini adalah betul?

R: Saya guna contoh untuk membuktikannya, iaitu jika ada 12 biji durian hendak agihkan kepada beberapa orang dengan meninggalkan 3 biji durian. Saya guna rumusan di atas. (Cikgu menulis “12 – 3 = 9”, kemudian “9 ÷ 1 = 9”, “9 ÷ 2 = X” dan “9 ÷3 = 3”, “9 ÷ 4 = X”, “9 ÷ 5 = X”, “9 ÷ 6 = X”, “9 ÷ 7= X”, “9 ÷ 8 = X”, dan “9 ÷ 9 = 1”).



P: Boleh cikgu jelaskan?
R: Baik. 12 biji durian ditolakkan 3 kerana perlu tinggal tiga biji. 9 mewakili 9 biji durian yang perlu diagihkan. X mewakili ayat matematik bahagi itu tidak sesuai digunakan kerana ia tidak boleh dibahagikan dengan sempurna, iaitu ia masih ada baki. Dengan itu, hanya “9 ÷ 1 = 9”, “9 ÷3 = 3” dan “9 ÷ 9 = 1” sahaja sesuai digunakan. Ini kerana ketiga-tiga ayat matematik bahagi ini tidak ada baki.

Cara penaakulan induktif Chong dalam penyelesaian masalah tentang pengagihan durian membabitkan faktor dalam ayat matematik bahagi.. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis “27 – 3 = 24”, kemudian menulis “*b* =24”, “*b* ÷ 1 = 24÷ 1=24”, “*b* ÷ 2 = 24 ÷ 2 =12”, “*b* ÷ 3 = 24 ÷ 3 = 8”, “*b* ÷ 4 = 24 ÷ 4 =6”, “*b* ÷ 5 = 24 ÷ 5 = X”, “*b* ÷ 6 = 24 ÷ 6 = 4”, “*b* ÷ 7 = 24 ÷ 7 = X”, “*b* ÷ 8 = 24 ÷ 8 =3”, “*b* ÷ 9 = 24 ÷ 9 = X”, “*b* ÷ 12 = 24 ÷12 =2”, “*b* ÷ 24 = 24÷ 24 = 1”. Beliau menerangkan 27 mewakili 27 biji durian, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, manakala *b* mewakili 24 biji durian yang perlu diagihkan sama banyak kepada beberapa orang jiran. “24 ÷ 2 = 12” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua-dua, dengan itu 12 orang boleh mendapat durian itu; “24 ÷ 3 =

8” mewakili 24 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, dengan itu 8 orang boleh mendapat durian itu; “24 ÷ 4 = 6” mewakili 24 biji durian diagihkan secara empat-empat, dengan itu 6 orang boleh mendapat durian itu; “24 ÷ 8 = 3” mewakili 24 biji durian diagihkan secara lapan-lapan, dengan itu 3 orang boleh mendapat durian itu, “24 ÷ 12 = 2” mewakili 24 biji durian diagihkan secara duabelas-duabelas, dengan itu 2 orang boleh mendapat durian itu; dan “24 ÷ 24 = 1” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua puluh empat-dua puluh empat, dengan itu 1 orang sahaja boleh mendapat durian itu. Beliau menerangkan “24 ÷ 5”, “24 ÷ 7” dan “24 ÷ 9” dipangkah “X” kerana 24 dibahagikan dengan 5, 7 atau 9 akan meninggalkan baki, iaitu “24 ÷ 5 = 4 baki 5”, “24 ÷ 7 = 3 baki 3” dan “24 ÷ 9 = 2 baki 6”. Beliau menerangkan lagi, ayat matematik yang ada baki tidak boleh digunakan kerana ada baki bermakna objek itu tidak cukup diagihkan kepada sejumlah orang dengan bilangan yang sama.

Chong menyatakan cara penaakulan dalam penyelesaian masalah tentang pengagihan durian, iaitu mula-mula menolakkan 3 daripada 27 untuk mendapat kuantiti durian yang perlu diagihkan kepada sejumlah jiran, iaitu 24 biji. Kemudian beliau cuba membahagikan 24 dengan nombor 1 hingga 9 dan seterusnnya 12 dan 24 untuk memastikan bilangan orang dan kuantiti durian yang boleh diagihkan dengan 24 biji durian tanpa baki. Beliau menerangkan 3 perlu ditolak daripada 27 untuk mencari jawapan kerana 3 itu adalah baki yang tidak boleh diagihkan. Dengan itu, ia perlu diasingkan agar hanya tinggal kuantiti yang boleh diagihkan kepada jiran.

Chong menerangkan cara penyelesaian dengan menyenaraikan kesemua kemungkinan dengan ayat matematik, kemudian mengenal pasti ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu mencari faktor yang sesuai digunakan kerana cara ini lebih sistematik dan senang mendapat jawapan. Beliau menerangkan ini kerana beliau takut ketinggalan satu kemungkinan, maka beliau menyenaraikan kesemua ayat matematik yang mungkin dari nombor kecil ke nombor besar, iaitu dari nombor 1 hingga 24. Beliau menyatakan dengan ini, senanglah bagi beliau memilih ayat matematik yang sesuai untuk mencari faktornya, iaitu nombor bahagi dan hasil bahagi yang sesuai digunakan. Beliau menerangkan beliau perlu mencari nombor bahagi dan hasil bahagi bagi ayat matematik bahagi itu kerana masalah itu perlu kita mencari dua anu iaitu bilangan jiran dan kuantiti durian yang diagihkan kepada setiap orang jiran. Menurut beliau, dalam ayat matematik bahagi, nombor bahagi mewakili bilangan jiran yang mendapat durian dan hasil bahagi mewakili kuantiti durian yang diagihkan kepada setiap orang jiran.

Chong menyatakan dengan cara tersebut di atas beliau akan mendapat banyak jawapan. Beliau menyenaraikan kesemua jawapan: jawapan boleh jadi 24 biji durian itu diberikan kepada 1 orang jiran, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, 24 biji durian diberikan kepada 3 orang jiran dengan setiap orang mendapat 8 biji, 24 biji durian diberikan kepada 4 orang jiran dengan setiap orang mendapat 6 biji, 24 biji durian diberikan kepada 6 orang jiran dengan setiap orang mendapat 4 biji, 24 biji durian diberikan kepada 8 orang jiran dengan setiap orang mendapat 3 biji, 24 biji durian diberikan kepada 2 orang jiran dengan setiap orang mendapat 12 biji, dan 24 biji durian diberikan kepada 24 orang jiran dengan setiap orang mendapat 1 biji. Menurut beliau, baki 3 biji durian itu tidak mempengaruhi jawapannya kerana pada awalnya beliau telah mengasingkannya dan kuantiti yang tinggal itu baru beliau mengagihkan kepada jiran dengan bilangan yang sama.

Pada pendapat Chong, daripada banyak jawapan di atas, kemungkinan besar Pak Kassim akan pilih ialah 12 orang jiran dengan setiap orang mendapat 2 biji durian. Beliau menerangkan mengikut kebiasaannya, kita ingin lebih ramai kawan bersama dengan kita untuk menikmati sesuatu, begitu juga Pak Kassim, dia ingin menikmati duriannya bersama-sama dengan seberapa ramai jirannya yang boleh. Dengan itu, lebih ramai jiran lebih baik. Kalau Pak Kassim memberikan sebiji durian sahaja kepada setiap jirannya mungkin keluarga jirannya tidak cukup makan dan jika berikan tiga biji, maka hanya lapan orang jiran mendapat durian sahaja. Oleh demikian, 12 orang jiran mendapat durian itu dengan setiap orang memperolehi dua biji adalah paling sesuai. Beliau membuktikan jawapan itu adalah betul dengan melukis 27 garis lurus dalam tiga barisan dengan dua barisan ada 10 garis lurus dan satu lagi hanya ada tujuh garis lurus. Kemudian membulatkan dua garis lurus dalam satu bulatan, akhirnya tinggal tiga garis lurus yang tidak dibulatkan. Beliau menerangkan 27 garis lurus mewakili 27 biji durian, manakala 12 bulatan yang terdapat dua garis lurus dalamnya mewakili 12 orang jiran dengan setiap orang mendapat dua biji durian. Akhirnya tinggal tiga biji durian ialah bakinya.

Cara penaakulan induktif Chong dalam menyelesaikan masalah pengagihan durian melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.15 II (I) Faktor Dalam Ayat Matematik Bahagi.

Akhirnya, dari hasil kajian ini juga didapati seorang daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan induktif dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik darab dalam menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat.. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 4.3(Tong) menunjukkan cara penaakulan induktif dalam kategori prosedural melibatkan faktor dalam ayat matematik darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.3 (Tong): Masalah Melibatkan Pengagihan Durian

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik “27 - 3 = 24”, kemudian menulis ayat matematik: 1 × 24 = 24, 2 × 12 = 24, 3 × 8 = 24, 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24, 8 × 3 = 24, 12× 2 = 24, 24 × 1 = 24, selepas itu menandai “ /” dan “X” di tepi ayat matematik itu, iaitu kesemua ayat matematik ditandakan “X” kecuali ayat matematik , 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24).

27-3=24 1 × 24 = 24 ×
2 × 12 = 24 ×
3 × 8 = 24 ×
4 × 6 = 24 /
6 × 4 = 24 /
8 × 3 = 24 ×
12 × 2 = 24 ×
24 × 1 = 24 ×

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 27 mewakili 27 biji durian, simbol “– ” mewakili tolak, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, manakala 24 mewakili 24 biji durian yang boleh diagihkan kepada jiran. Ayat matematik “1 × 24 = 24, 2 × 12 = 24, 3 × 8 = 24, 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24, 8 × 3 = 24, 12× 2 = 24, 24 × 1 = 24,” mewakili lapan situasi yang mungkin berlaku, iaitu “1 × 24 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara satu-satu, maka 24 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang sebiji; “2 × 12 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua-dua, maka 12 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang dua biji; “3 × 8 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, maka 24 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang sebiji; “4 × 6 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara empat-empat, maka 6 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang empat biji; “6 × 4 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara enam-enam, maka 4 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang enam biji; “8 × 3 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara lapan-lapan, maka 3 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 8 biji; “12 × 2 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua belas-dua belas, maka 2 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang dua belas biji; dan “24 × 1 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua puluh empat-dua puluh empat, maka seorang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 24 biji.

P: Apakah maksud tanda “/” dan “X”?

R: Tanda “/” bermaksud ayat matematik itu sesuai diguna, manakala tanda “X” bermaksud ayat matematik itu tidak sesuai digunakan. Dengan itu, didapat hanya ada dua ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu “4 × 6 = 24” dan “6 × 4 = 24”.

P: Mengapakah cikgu cakap begitu?

R: Ini kerana baki adalah 3 biji durian, maka nombor dibahagi, iaitu bilangan durian yang diagihkan dengan nombor bahagi, iaitu bilangan jiran yang mendapat durian tidak boleh sama atau kurang daripada 3. Ini kerana jika bilangan durian yang diagih itu sama atau kurang daripada 3, maka baki 3 biji durian itu boleh diagihkan kepada seorang lagi jiran. Ini sama juga dengan jumlah bilangan jiran yang mendapat durian, jika bilangannya sama atau kurang daripada 3, maka baki 3 biji durian itu boleh diagihkan kepada jiran itu dengan setiap orang tambah sebiji. Contohnya, jika durian itu diagihkan secara tiga-tiga, maka lapan orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang mendapat tiga biji, tetapi baki ada 3 biji, maka ia boleh diagihkan kepada seorang jiran yang lain. Jika durian itu diagihkan secara dua belas-dua belas, maka dua orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang mendapat dua belas biji, tetapi bakinya ada 3 biji, maka durian itu boleh diagihkan kepada duabelas orang jiran itu dengan seorang ditambah sebiji, menjadi seorang mendapat 13 biji dan bakinya sebiji sahaja.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menolak 3 daripada 27, untuk mengetahui bilangan yang boleh diagihkan sama banyak kepada jiran. Selepas itu, saya menulis kesemua ayat matematik yang mungkin untuk membuat analisis yang mana sesuai digunakan, iaitu saya perlu memastikan nombor dibahagi dan nombor bahagi lebih daripada 3. Dengan itu, saya mendapat hanya ada dua ayat matematik yang menepati kehendak, iaitu "4 × 6 = 24" dan "6 × 4 = 24". Oleh itu, jawapannya ada dua kemungkinan, iaitu 4 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 6 biji dan 6 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 4 biji.

P: Mengapakah cikgu menggunakan cara begini?

R: Saya guna cara ini dengan mudah dan untuk sistematik mendapat tahu kemungkinan bagi jawapan.

P: Mengapakah cikgu cakap cara ini dengan mudah dan sistematik untuk mendapat tahu kemungkinan bagi jawapan?

R: Mula-mula saya menyenaraikan kesemua kemungkinan, iaitu kesemua ayat matematik yang boleh dibentuk oleh 24 bermula dari nombor kecil ke nombor besar, ini dikatakan sistematik. Kemudian, saya menganalisiskan kesemua ayat matematik untuk mengenal pasti yang mana menepati kehendak masalah, yang menepati kehendak masalah saya tandakan "/" dan yang tidak menepati kehendak masalah, saya tandakan "X". Saya hanya melihat pasangan nombor yang membentukkan ayat matematik itu yang mana tidak kurang daripada 3, maka ayat matematik itulah dikehendaki.

P: Bolehkah cara ini dipermudahkan untuk mendapat jawapan?

R: Ya. (Cikgu bercakap sambil menulis "$(x - 3) \div y = z$, di mana $y > 3$ dan $z > 3$ ".

$(x-3) \div y = z$, di mana $y > 3$, $z > 3$

P: Boleh cikgu terangkan?

R: x mewakili bilangan durian yang dipunyai oleh Pak Kassim, 3 mewakili baki yang tinggal, y mewakili bilangan durian yang diagihkan kepada setiap orang jiran, dan z mewakili jumlah bilangan jiran yang mendapat durian. y dan z adalah faktor kepada beza, $(x - 3)$.

P: Mengapakah x dan y perlu lebih besar daripada 3?

R: Ini kerana jika bilangan durian yang diagihkan kurang atau sama dengan bilangan baki, maka baki itu boleh digunakan untuk mengagihkan kepada seorang jiran lagi. Sama juga, jika jumlah bilangan jiran sama atau kurang daripada jumlah baki, maka baki itu boleh digunakan untuk mengagihkan kepada jiran itu lagi dengan seorang ditambah sebiji.

P: Mengapakah y dan z adalah faktor kepada beza, $(x - 3)$?

R: y dan z adalah saling mengait, iaitu hasil darab $y \times z = (x - 3)$ atau $z \times y = (x - 3)$. Ini bermakna jika beza bagi $(x - 3)$ diasingkan secara y dalam satu kumpulan, maka akan mendapat z kumpulan, dan jika beza bagi $(x - 3)$ diasingkan secara z dalam satu kumpulan, maka akan mendapat y kumpulan.
P: Mengapakah cikgu menggunakan rumusan begini?
R: Cara begini senang untuk mendapat jawapan.
P: Mengapakah cikgu cakap cara begini senang untuk mendapat jawapan.
R: Saya hanya perlu cari kombinasi-kombinasi y dan z untuk mendapat hasil darab 24, dan menentukan nilai bagi y dan z dalam kombinasi itu adalah lebih besar daripada 3, dengan itu, beliau akan mendapat jawapan.
P: Bagaimanakah cikgu mengetahui rumusan ini adalah betul?
R: Saya guna contoh, jika bilangan durian ialah 27 biji dan diagihkan secara empat-empat, iaitu, $y = 4$ maka "(27 – 3)/4 = 6", akan didapati enam orang memperoleh durian dengan setiap orang mendapat empat biji. Jika durian itu diagihkan secara tiga-tiga, iaitu $y = 3$ maka "(27 – 3)/3 = 8", akan didapati lapan orang jiran mendapat durian dengan setiap orang mendapat tiga biji. Ini adalah tidak betul kerana baki 3 biji masih boleh diagihkan kepada seorang jiran lagi, maka akan jadi 9 orang jiran mendapat durian dengan setiap orang mendapat tiga biji.

Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis ayat matematik "27 - 3 = 24", kemudian menulis ayat matematik: 1 × 24 = 24, 2 × 12 = 24, 3 × 8 = 24, 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24, 8 × 3 = 24, 12× 2 = 24, 24 × 1 = 24. Selepas itu, beliau menanda " /" dan "X" ditepi ayat matematik itu, iaitu kesemua ayat matematik ditandakan "X" kecuali ayat matematik, 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24. Beliau menerangkan bahawa 27 mewakili 27 biji durian, simbol "– " mewakili tolak, 3 mewakili 3 biji durian yang tinggal, manakala 24 mewakili 24 biji durian yang boleh diagihkan kepada jiran. Ayat matemaik "1 × 24 = 24, 2 × 12 = 24, 3 × 8 = 24, 4 × 6 = 24, 6 × 4 = 24, 8 × 3 = 24, 12× 2 = 24, 24 × 1 = 24," mewakili lapan situasi yang mungkin berlaku, iaitu "1 × 24 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara satu-satu, maka 24 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang sebiji; "2 × 12 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua-dua, maka 12 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang dua biji; "3 × 8 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, maka 8 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang tiga biji; "4 × 6 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara empat-empat, maka 6 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang empat biji; "6 × 4 = 24" mewakili 24 biji durian diagihkan secara enam-enam, maka 4 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang enam biji; “8 × 3 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara lapan-lapan, maka 3 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 8 biji; “12 × 2 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua belas-dua belas, maka 2 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang dua belas biji; dan “24 × 1 = 24” mewakili 24 biji durian diagihkan secara dua puluh empat-dua puluh empat, maka seorang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 24 biji.

Tong menerangkan tanda “/” bermaksud ayat matematik itu sesuai diguna, manakala tanda “X” bermaksud ayat matematik itu tidak sesuai digunakan. Dengan itu, didapat hanya ada dua ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu “4 × 6 = 24” dan “6 × 4 = 24”. Beliau menerangkan lagi, kedua-dua ayat matematik dikatakan sesuai kerana baki diberi adalah 3 biji durian, maka nombor dibahagi, iaitu bilangan durian yang diagihkan dengan nombor bahagi, iaitu bilangan jiran yang mendapat durian tidak boleh sama atau kurang daripada 3. Ini kerana jika bilangan durian yang diagih itu sama atau kurang daripada 3, maka baki 3 biji durian itu boleh diagihkan kepada seorang lagi jiran. Ini sama juga dengan jumlah bilangan jiran yang mendapat durian, jika bilangannya sama atau kurang daripada 3, maka baki 3 biji durian itu boleh diagihkan kepada jiran itu dengan setiap orang tambah sebiji. Contohnya, jika durian itu diagihkan secara tiga-tiga, maka lapan orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang mendapat tiga biji, tetapi baki ada 3 biji, maka ia boleh diagihkan kepada seorang jiran yang lain. Jika durian itu diagihkan secara dua belas-dua belas, maka dua orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang mendapat dua belas biji, tetapi bakinya ada 3 biji, maka durian itu boleh diagihkan kepada duabelas orang jiran itu dengan seorang ditambah sebiji, menjadi seorang mendapat 13 biji dan bakinya sebiji sahaja.

Tong hanya memberikan satu cara menyelesaikan masalah tersebut yang melibatkan penolakan dan penganalisisan ayat matematik, iaitu mula-mula beliau menolak 3 daripada 27, untuk mengetahui bilangan yang boleh diagihkan sama banyak kepada jiran. Selepas itu, beliau menulis kesemua ayat matematik yang mungkin untuk membuat analisis yang mana sesuai digunakan, iaitu beliau perlu memastikan nombor dibahagi dan nombor bahagi lebih daripada 3. Dengan itu, beliau mendapat hanya ada dua ayat matematik yang menepati kehendak, iaitu "$4 \times 6 = 24$" dan "$6 \times 4 = 24$". Oleh itu, jawapannya ada dua kemungkinan, iaitu 4 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 6 biji dan 6 orang jiran akan mendapat durian dengan setiap orang 4 biji.

Tong menerangkan cara begitu digunakan kerana cara itu dengan mudah dan sistematik untuk mendapat tahu kemungkinan bagi jawapan. Beliau menerangkan lagi, cara itu dikatakan sistematik kerana beliau menyenaraikan kesemua kemungkinan, iaitu kesemua ayat matematik yang boleh dibentuk oleh 24 bermula dari nombor kecil ke nombor besar. Kemudian, beliau menganalisiskan kesemua ayat matematik untuk mengenal pasti yang mana menepati kehendak masalah, ayat matematik yang menepati, beliau menandakan "/", manakala tidak menepati, beliau menandakan "X". Beliau hanya melihat pasangan nombor membentukkan ayat matematik itu, yang mana tidak lebih daripada 3, maka ayat matematik itulah dikehendaki.

Tong mempermudahkan cara tersebut untuk mendapat jawapan dengan menggunakan anu, dengan menulis rumusan: $(x - 3) \div y = z,$ di mana $y > 3$ dan $z > 3$ ". Beliau menerangkan x mewakili bilangan durian yang dipunyai oleh Pak Kassim, 3 mewakili baki yang tinggal, y mewakili bilangan durian yang diagihkan kepada setiap orang jiran, dan z mewakili jumlah bilangan jiran yang mendapat durian. y dan

z perlu adalah faktor kepada beza, (x - 3). Beliau menerangkan lagi, y dan z perlu lebih besar daripada 3, ini kerana jika bilangan durian yang diagihkan kurang atau sama dengan bilangan baki, maka baki itu boleh digunakan untuk mengagihkan kepada seorang jiran lagi. Sama juga, jika jumlah bilangan jiran sama atau kurang daripada jumlah baki, maka baki itu boleh digunakan untuk mengagihkan kepada jiran itu lagi dengan seorang ditambah sebiji. Beliau juga menerangkan y dan z perlu adalah faktor kepada beza, (x - 3), ini kerana y dan z adalah saling mengait, iaitu hasil darab $x \times y = (x - 3)$ atau $y \times x = (x - 3)$. Ini bermakna jika beza bagi (x - 3) diasingkan secara y dalam satu kumpulan, maka akan mendapat z kumpulan, dan jika beza bagi (x - 3) diasingkan secara z dalam satu kumpulan, maka akan mendapat y kumpulan.

Tong menerangkan rumusan begitu kerana cara tersebut senang untuk mendapat jawapan. Beliau menerangkan beliau hanya perlu mencari kombinasi-kombinasi y dan z untuk mendapat hasil darab 24, dan menentukan nilai bagi y dan z dalam kombinasi itu adalah lebih besar daripada 3, dengan itu, beliau akan mendapat jawapan. Beliau menggunakan contoh untuk membuktikan rumusan itu adalah betul, iaitu jika bilangan durian ialah 27 biji dan diagihkan secara empat-empat, yang mana y = 4 maka "(27 – 3)/4 = 6", akan didapati enam orang memperolehi durian dengan setiap orang mendapat empat biji. Jika durian itu diagihkan secara tiga-tiga, yang mana y = 3 maka "(27 – 3)/3 = 8", akan dapati lapan orang jiran mendapat durian dengan setiap orang mendapat tiga biji. Beliau mengatakan ini adalah tidak betul kerana baki 3 biji masih boleh diagihkan kepada seorang jiran lagi, maka akan jadi 9 orang jiran mendapat durian dengan setiap orang mendapat tiga biji. Beliau mengatakan rumusan itu tidak sesuai digunakan jika y itu suatu nombor yang bukan faktor bagi nombor 24, contohnya 7. Tambahan beliau, tiada nombor bulat didarab dengan 7 akan mendapat hasil darab 24. Dengan itu, nombor bulat yang bukan faktor 24 tidak boleh digunakan bagi rumusan ini.

Cara penaakulan induktif Tong dalam menyelesaikan masalah pengagihan durian melibatkan faktor dalam ayat matematik darab dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.15 II (I) Faktor Dalam Ayat Matematik Darab.

Akhirnya, dari hasil kajian ini juga didapati seorang daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan dalam kategori prosedural menggunakan penaakulan induktif melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 4.3(John) menunjukkan cara penaakulan dalam kategori prosedural melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 4.3 (John): Masalah Melibatkan Pengagihan Durian

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik “27 ÷ x = y baki 3”, kemudian menulis ayat matematik: 27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5 baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3. Kemudian cikgu menandakan “/” pada ayat matematik “27 ÷ 4 = 6 baki 3”, “27 ÷ 6 = 4 baki 3”, “27 ÷ 8 = 3 baki 3” dan “27 ÷ 12 = 2 baki 3”.

27 ÷ 2 = 13 b 1
27 ÷ 3 = 9
27 ÷ 4 = 6 b 3 ✓
27 ÷ 5 = 5 b 2
27 ÷ 6 = 4 b 3 ✓
27 ÷ 7 = 3 b 6
27 ÷ 8 = 3 b 3 ✓
27 ÷ 9 = 3
27 ÷ 10 = 2 b 7
27 ÷ 11 = 2 b 5
27 ÷ 12 = 2 b 3 ✓

P: Boleh cikgu terangkan?

R: 27 mewakili 27 biji durian, simbol "÷ " mewakili bahagi, x mewakili bilangan durian yang diagihkan, manakala y mewakili bilangan jiran yang terima durian dan 3 ialah baki. Ayat matematik "27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5 baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3, ditulis untuk mencari x dan y yang sesuai. Tanda "/" bermaksud ayat matematik itu sesuai digunakan. Dengan itu, hanya terdapat empat ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu "27 ÷ 4 = 6 baki 3", "27 ÷ 6 = 4 baki 3" dan "27 ÷ 8 = 3 baki 3" dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3".

P: Mengapakah cikgu cakap hanya ayat matematik "27 ÷ 4 = 6 baki 3", "27 ÷ 6 = 4 baki 3" dan "27 ÷ 8 = 3 baki 3", dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3" sahaja sesuai digunakan?

R: Ayat matematik pembahagian yang lain tidak sesuai digunakan kerana bakinya bukan 3 atau tiada baki. Ini kerana masalah telah menetapkan baki perlu ada 3 biji durian. Keempat-empat ayat matematik di atas bakinya 3, dengan itu ia sesuai digunakan.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?

R: Mula-mula saya menulis ayat matematik pembahagian dengan menggunakan anu yang menunjukkan situasi masalah, iaitu 27 biji durian diagihkan kepada beberapa orang jiran, yang diwakili oleh y, dengan setiap orang mendapat beberapa biji durian, yang diwakili oleh x dan tinggal 3 biji. Selepas itu, saya cuba membahagikan 27 dengan 2 hingga 12 satu persatu untuk mencari bakinya ialah 3. Kemudian, memilih ayat matematik yang sesuai dengan menandakan "/" pada ayat matematik itu.

P: Mengapakah cikgu menggunakan cara begini?

R: Cara ini lebih bersistematik dan mudah memilih jawapan yang diperlukan.

P: Mengapakah cikgu cakap begitu?

R: Saya menulis ayat matematik pembahagian bagi 27 dibahagikan oleh nombor 2 hingga 12, iaitu dari nombor kecil ke nombor besar yang mengikut urutan. Dengan itu, ia lebih bersistematik untuk melihat hasil bahaginya yang mana ada baki 3, agar tidak tertinggal mana-mana satu nombor tidak diperiksa.

P: Mengapakah cikgu hanya menulis ayat matematik pembahagian bagi 27 dibahagikan oleh nombor 2 hingga 12?

R: Ini kerana apa nombor dibahagi dengan nombor 1 akan dapat balik nombor asal kerana kuantiti objek itu hanya diberikan kepada seorang sahaja, maka orang itu akan mendapat keseluruhan kuantiti objek itu. Dengan itu, 27 dibahagi dengan 1 tentu hasil bahaginya 27, ini tentu bukan jawapan kerana hasil bahaginya tiada baki 3. Oleh demikian, saya terus mula dari nombor 2.

P: Mengapakah pula ayat matematik pembahagian itu hanya ditulis hingga nombor 12 tetapi tidak selebihnya?

R: Kita biasa menghafal sifir hingga 12. Nampaknya itu sudah cukup untuk mencari jawapannya. Jika lebih daripada 12, setiap orang akan mendapat sebiji durian sahaja kecuali 13, yang mana 27 ÷ 13 = 2 baki 1, tetapi 14 dan ke atas setiap orang akan dapat sebiji sahaja kerana untuk memberi kepada 14 orang dan ke atas, bilangan durian sekurang-kurangnya ada 28 biji, iaitu dua ganda 14. Jika durian itu diberikan kepada 14 orang dan ke atas dengan seorang sebiji, maka tiada baki akan tinggal. Ini kerana 27 biji durian cukup diagih kepada 27 orang tanpa baki jika seorang diberikan sebiji.

P: Adakah keempat-empat ayat matematik pembahagian yang ada baki 3 sesuai digunakan?

R: Em…(Cikgu memerhatikan keempat-empat ayat matematik pembahagian yang ada baki 3 itu). Nampaknya semua sesuai digunakan.

P: Mengapakah cikgu cakap keempat-empat ayat matematik pembahagian yang ada baki 3 itu sesuai digunakan?

R: "27 ÷ 4 = 6 baki 3" bermaksud 27 biji durian diagihkan kepada 4 orang, dengan setiap orang mendapat 6 biji dan bakinya 3 biji; "27 ÷ 6 = 4 baki 3" pula bermaksud 27 biji durian diagihkan kepada 6 orang, dengan setiap orang mendapat 4 biji dan bakinya 3 biji; "27 ÷ 8 = 3 baki 3", 27 biji durian diagihkan kepada 8 orang, dengan setiap orang mendapat 3 biji dan bakinya 3 biji; dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3" bermaksud 27 biji durian diagihkan kepada 12 orang, dengan setiap orang mendapat 2 biji dan bakinya 3 biji.

P: Bolehkah kuantiti yang diagih sama dengan kuantiti baki? Contohnya 27 biji durian diagihkan kepada 8 orang, dengan setiap orang mendapat 3 biji dan bakinya 3 biji?

R: Masalah itu ditetapkan bakinya 3, maka kena ada baki 3, yang lebih itu diagihkan kepada 8 orang dengan kuantiti yang sama.

P: Bagi cikgu boleh berlakulah hasil bahagi, iaitu kuantiti yang diagihkan sama dengan baki?

R: Ya. Ini kerana saya telah tetapkan 8 orang, maka 8 orang dengan setiap orang mendapat 3 biji durian, jumlahnya 24 biji dan bakinya 3 biji durian.

P: Jika setiap orang mendapat 3 biji durian, bolehkah baki 3 biji durian itu diagihkan kepada seorang jiran lagi?

R: Tapi… masalah telah ditetapkan ada baki 3 biji. Dengan itu, tidak boleh diagihkan lagi.

P: Kalau masalah tidak menetapkan baki 3 biji, 3 biji durian itu boleh diagih kepada seorang lagi?

R: Boleh. Dengan itu, 27 biji durian agih kepada 8 orang, setiap orang akan mendapat 3 biji dan baki 3 biji, tetapi 27 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, 9 orang akan mendapat durian itu.

P: Mengapakah boleh berlaku begitu?

R: Cara pembahagian yang berlainan, iaitu satu menggunakan kaedah pengasingan dan satu menggunakan kaedah pengumpulan.

P: Boleh jelaskan lagi?

R: Contohnya 27 biji durian agih kepada 8 orang, setiap orang akan mendapat 3 biji menggunakan kaedah pengasingan dan baki 3 biji, manakala 27 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, 9 orang akan mendapat durian itu menggunakan kaedah pengumpulan.

P: Kalau Pak Kassim memberikan durian kepada 8 orang dengan setiap orang 3 biji, dan tinggal 3 biji, bolehkah ini berlaku dari segi matematik?

R: Boleh jika ia telah menetapkan hanya mengagih kepada 8 orang.

P: Jika tidak menetapkan bilangan orang?

R: Tidak boleh. Ia perlu menimbangkan kedua-dua keadaan pula, iaitu bilangan orang dan kuantiti yang diedarkan. Masalah ini tidak menetapkan bilangan orang dan kuantiti yang perlu diagihkan tetapi hanya menetapkan baki. Dengan itu, penentuan bilangan orang dan kuantiti yang perlu diagihkan hendaklah mempertimbangkan bakinya, yang mana selepas memilih bilangan orang, kuantiti durian yang diagihkan tidak boleh sama dengan baki. Ini kerana baki itu boleh diagihkan lagi kepada orang lain, dengan itu bilangan orang yang menerima agihan itu akan bertambah.

P: Bolehkah kuantiti yang diagih kurang dengan kuantiti baki pula? Contohnya 27 biji durian diagihkan kepada 12 orang, dengan setiap orang mendapat 2 biji dan bakinya 3 biji.

R: Er… keadaan ini sama seperti tadi, jumlah agihan itu sama atau kurang daripada baki. Ini tidak boleh berlaku, kerana baki itu boleh diagihkan kepada seorang jiran lagi.

P: Dengan itu, apakah kemungkinan besar bilangan jiran dan kuantiti durian yang diberikan kepada setiap jiran?

R: Saya rasa Pak Kassim akan memberikan 6 orang jiran dengan setiap orang mendapat 4 biji durian dan tinggal 3 biji durian untuk keluarganya.

P: Mengapakah cikgu fikir begitu?
R: Pak Kassim ingin tinggal tiga biji durian untuk keluarganya, maka terdapat 24 biji durian perlu diagihkan kepada jiran dengan bilangan yang sama. Pada pendapat saya dia ingin memberikan seberapa banyak jiran yang boleh, agar jirannya turut serta menikmati duriannya, tetapi perlu adil, setiap orang perlu diagihkan dengan bilangan yang sama.
P: Mengapakah perlu mengagihkan durian itu dengan bilangan yang sama kepada jiran?
R: Ini untuk mengelakkan pergaduhan atau salah faham pilih kasih di antara jiran kerana pengagihan itu tidak adil, iaitu tidak sama .
P: Bagaimanakah cikgu menjustifikasikan jawapan itu adalah betul?
R: Saya guna sifir 4 dan operasi tambah. (Cikgu menulis $6 \times 4 = 24$, $24 + 3 = 27$).

$$6 \times 4 = 24$$
$$24 + 3 = 27$$

P: Cuba cikgu terangkan.
R: Enam orang jiran dengan setiap orang mendapat empat biji durian, maka jumlahnya adalah 24 biji kerana $6 \times 4 = 24$, kemudian 24 tambah 3, iaitu kuantiti yang tinggal akan mendapat 27 biji durian.
P: Mengapakah pula cikgu perlu menulis hingga nombor 24?
R: Ini kerana $48 \div 24 = 2$. Nombor 24 adalah separuh 48, bermakna bilangan jiran yang maksimum untuk mendapat dua biji durian. Kuantiti yang lebih 24 akan hanya mendapat sebiji sahaja kerana kuantiti durian tidak cukup, contohnya jika 25 orang jiran dengan setiap orang mendapat dua biji perlu ada 50 biji durian. Saya menggunakan separuh kuantiti durian untuk menentukan had bilangan jiran dan kuantiti durian yang diagihkan itu.
P: Bolehkah cara ini dipermudahkan untuk mendapat jawapan?
R: Er…(Cikgu berfikir sebentar, kemudian menulis $27 \div x = y$ baki 3, $y > 3$).

$27 \div x = y$ baki 3

$y > 3$

P: Boleh cikgu terangkan?
R: 27 mewakili bilangan objek yang diberi, simbol "÷" mewakili bahagi, dan x mewakili bilangan kumpulan dan y mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan, dan 3 mewakili baki.
P: Mengapakah cikgu guna rumusan ini?
R: Ini kerana masalah ini ada dua anu, iaitu bilangan jiran dan kuantiti yang diagihkan kepada setiap orang. Kuantiti yang diagihkan perlu lebih daripada baki.
P: Mengapakah kuantiti yang diagihkan perlu lebih daripada baki?
R: Ini kerana jika kuantiti yang diagihkan kepada setiap jiran itu sama atau kurang daripada baki, maka baki itu cukup diagihkan kepada jiran yang lain.
P: Bolehkah baki itu tidak diagihkan walaupun kuantiti yang diagihkan kepada setiap jiran itu sama atau kurang daripada baki?
R: Tidak boleh. Ini tidak mengikut konsep pembahagian, yang mana mengagihkan sejumlah objek kepada seberapa banyak kumpulan yang boleh dengan kuantiti yang sama sehingga habis diagih atau tinggal baki yang kurang daripada kuantiti objek dalam setiap kumpulan itu.

Cara penyelesaian masalah melibatkan pengagihan durian bagi John membabitkan ayat matematik pembahagian dengan menggunakan anu. Beliau menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis ayat matematik "27 ÷ x = y baki 3", kemudian menulis ayat matematik: 27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5 baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3. Kemudian beliau menandakan "/' pada ayat matematik "27 ÷ 4 = 6 baki 3", "27 ÷ 6 = 4 baki 3", "27 ÷ 8 = 3 baki 3" dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3". Beliau menerangkan 27 mewakili 27 biji durian, simbol "÷ " mewakili bahagi, x mewakili bilangan durian yang diagihkan, manakala y mewakili bilangan jiran yang terima durian dan 3 ialah baki. Ayat matematik "27 ÷ 2 = 13 baki 1, 27 ÷ 3 = 9, 27 ÷ 4 = 6 baki 3, 27 ÷ 5 = 5 baki 2, 27 ÷ 6 = 4 baki 3, 27 ÷ 7 = 3 baki 6, 27 ÷ 8 = 3 baki 3, 27 ÷ 9 = 3, 27 ÷ 10 = 2 baki 7, 27 ÷ 11 = 2 baki 5, 27 ÷ 12 = 2 baki 3, ditulis untuk mencari x dan y yang sesuai. Tanda "/" bermaksud ayat matematik itu sesuai digunakan. Dengan itu, hanya terdapat empat ayat matematik yang sesuai digunakan, iaitu "27 ÷ 4 = 6 baki 3", "27 ÷ 6 = 4 baki 3" dan "27 ÷ 8 = 3 baki 3" dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3". Beliau menerangkan hanya ayat matematik "27 ÷ 4 = 6 baki 3", "27 ÷ 6 = 4 baki 3" dan "27 ÷ 8 = 3 baki 3", dan "27 ÷ 12 = 2 baki 3" sahaja sesuai digunakan, ini kerana ayat matematik pembahagian yang lain bakinya bukan 3 atau tiada baki, yang mana masalah telah menetapkan baki perlu ada 3 biji durian. Keempat-empat ayat matematik di atas bakinya 3, dengan itu ia sesuai digunakan.

John menerangkan cara penyelesaian masalahnya, iaitu mula-mula menulis ayat matematik pembahagian dengan menggunakan anu yang menunjukkan situasi masalah, iaitu 27 biji durian diagihkan kepada beberapa orang jiran, yang diwakili oleh y, dengan setiap orang mendapat beberapa biji durian, yang diwakili oleh x dan tinggal 3 biji. Selepas itu, cuba membahagikan 27 dengan 2 hingga 12 satu persatu untuk mencari bakinya ialah 3. Seterusnya, memilih ayat matematik yang sesuai dengan menandakan “/” pada ayat matematik itu. Beliau menerangkan cara begitu digunakan kerana ia lebih bersistematik dan mudah memilih jawapan yang diperlukan.

John menulis ayat matematik pembahagian bagi 27 dibahagikan oleh nombor 2 hingga 12, iaitu daripada nombor kecil ke nombor besar yang mengikut urutan, ini lebih bersistematik untuk melihat hasil bahaginya yang mana ada baki 3, agar tidak tertinggal mana-mana satu nombor tidak diperiksa. Beliau menjelaskan hanya menulis ayat matematik pembahagian bagi 27 dibahagikan oleh nombor 2 hingga 12, kerana apa nombor dibahagi dengan nombor 1 akan mendapat balik nombor asal kerana kuantiti objek itu hanya diberikan kepada seorang sahaja, maka orang itu akan mendapat keseluruhan kuantiti objek itu. Dengan itu, 27 dibahagi dengan 1 tentu hasil bahaginya 27, ini tentu bukan jawapan kerana hasil bahaginya tiada baki 3. Oleh demikian, beliau terus bermula daripada nombor 2.

John menerangkan lagi, ayat matematik pembahagian itu hanya ditulis hingga nombor 12 tetapi tidak selebihnya kerana kita telah biasa menghafal sifir hingga 12. Pada pendapat beliau, nampaknya itu sudah cukup untuk mencari jawapannya. Beliau menyatakan jika lebih daripada 12, setiap orang akan mendapat sebiji durian sahaja kecuali 13, yang mana 27 ÷ 13 = 2 baki 1, tetapi 14 dan ke atas setiap orang akan dapat sebiji sahaja kerana untuk memberi kepada 14 orang dan ke atas, bilangan durian sekurang-kurangnya ada 28 biji, iaitu dua ganda 14. Jika durian itu diberikan kepada 14 orang dan ke atas dengan seorang sebiji, maka tiada baki akan tinggal. Ini kerana 27 biji durian cukup diagih kepada 27 orang tanpa baki jika seorang diberikan sebiji.

Selepas memerhati keempat-empat ayat matematik pembahagian yang ada baki 3 itu seketika, John menyatakan kesemua ayat matematik sesuai digunakan kerana “27 ÷ 4 = 6 baki 3” bermaksud 27 biji durian diagihkan kepada 4 orang, dengan setiap orang mendapat 6 biji dan bakinya 3 biji; “27 ÷ 6 = 4 baki 3” pula bermaksud 27 biji durian diagihkan kepada 6 orang, dengan setiap orang mendapat 4 biji dan bakinya 3 biji; “27 ÷ 8 = 3 baki 3”, 27 biji durian diagihkan kepada 8 orang, dengan setiap orang mendapat 3 biji dan bakinya 3 biji; dan “27 ÷ 12 = 2 baki 3” bermaksud 27 biji durian diagihkan kepada 12 orang, dengan setiap orang mendapat 2 biji dan bakinya 3 biji. Menurut beliau kuantiti yang diagih sama dengan kuantiti baki boleh berlaku, contohnya 27 biji durian diagihkan kepada 8 orang, dengan setiap orang mendapat 3 biji dan bakinya 3 biji, kerana masalah itu ditetapkan bakinya 3, maka kena ada baki 3, yang lebih itu diagihkan kepada 8 orang dengan kuantiti yang sama.

John menyatakan sekali lagi hasil bahagi, iaitu kuantiti yang diagihkan sama dengan baki boleh berlaku, kerana beliau telah menetapkan 8 orang, maka 8 orang setiap orang mendapat 3 biji durian, jumlahnya 24 biji dan bakinya 3 biji durian. Beliau agak ragu-ragu apabila ditanya jika setiap orang mendapat 3 biji durian, sama ada baki 3 biji durian itu boleh diagihkan kepada seorang jiran lagi. Beliau cuba menerangkan bahawa masalah telah ditetapkan ada baki 3 biji, dengan itu, tidak boleh diagihkan lagi. Beliau menyatakan kalau masalah tidak menetapkan baki 3 biji, 3 biji durian itu boleh diagih kepada seorang lagi. Dengan itu, 27 biji durian diagih kepada 8 orang, setiap orang akan mendapat 3 biji dan baki 3 biji, tetapi 27 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, 9 orang akan mendapat durian itu. Beliau menerangkan keadaan tersebut berlaku disebabkan oleh cara pembahagian yang berlainan, iaitu satu menggunakan kaedah pengasingan dan satu menggunakan kaedah pengumpulan. Beliau menjelaskan dengan contoh, 27 biji durian agih kepada 8 orang, setiap orang akan mendapat 3 biji menggunakan kaedah pengasingan dan baki 3 biji, manakala 27 biji durian diagihkan secara tiga-tiga, 9 orang akan mendapat durian itu menggunakan kaedah pengumpulan.

John menyatakan kalau Pak Kassim memberikan durian kepada 8 orang dengan setiap orang 3 biji, dan tinggal 3 biji, ini boleh berlaku daripada segi matematik, kerana telah menetapkan hanya mengagih kepada 8 orang. Jika tidak menetapkan bilangan orang maka tidak boleh, kerana ia perlu menimbangkan kedua-dua keadaan, iaitu bilangan orang dan kuantiti yang diedarkan. Beliau menyatakan masalah ini tidak menetapkan bilangan orang dan kuantiti yang perlu diagihkan tetapi hanya menetapkan baki. Dengan itu, penentuan bilangan orang dan kuantiti yang perlu diagihkan hendaklah mempertimbangkan bakinya, yang mana selepas memilih bilangan orang, kuantiti durian yang diagihkan tidak boleh sama dengan baki. Ini kerana baki itu boleh diagihkan lagi kepada orang lain, dengan itu bilangan orang yang menerima agihan itu akan bertambah. Beliau menyatakan kuantiti yang diagih kurang dengan kuantiti baki,contohnya 27 biji durian diagihkan kepada 12 orang, dengan setiap orang mendapat 2 biji dan bakinya 3 biji, keadaan itu sama seperti tadi, jumlah agihan itu sama atau kurang daripada baki, tidak boleh berlaku, kerana baki itu boleh diagihkan kepada seorang jiran lagi.

John membuktikan bahawa jawapan itu adalah betul dengan menggunakan sifir 4 dan operasi tambah dengan menulis $6 \times 4 = 24$, $24 + 3 = 27$. Beliau menjelaskan bahawa enam orang jiran dengan setiap orang mendapat empat biji durian, maka jumlahnya ialah 24 biji kerana $6 \times 4 = 24$, kemudian 24 tambah 3, iaitu kuantiti yang tinggal akan mendapat 27 biji durian.

John menyatakan cara yang digunakan di atas tidak sesuai jika kuantiti durian itu sangat besar, kerana jika kuantiti besar, beliau perlu menggunakan banyak masa untuk menulis ayat matematik pembahagian. Beliau memberi contoh, jika bilangan durian itu sebanyak 48 biji dan bakinya 3, maka beliau perlu menulis ayat matematik pembahagian dari nombor 2 hingga ke nombor 24. Beliau menjelaskan ayat matematik itu ditulis hingga ke 24 kerana 48 ÷ 24 = 2. Nombor 24 adalah separuh 48, ini merupakan bilangan maksimum jiran untuk mendapat dua biji durian. Kuantiti yang lebih 24 hanya mendapat sebiji sahaja kerana kuantiti durian tidak cukup, contohnya jika 25 orang jiran dengan setiap orang mendapat dua biji perlu ada 50 biji durian. Beliau menggunakan separuh kuantiti untuk menentukan had bilangan jiran dan kuantiti durian yang diagihkan itu.

John mencadangkan satu cara untuk mempermudah cara tadi untuk mendapat jawapan, iaitu dengan rumusan: $27 \div x = y$ baki 3, $y > 3$. Beliau menjelaskan 27 mewakili 27 biji durian, simbol "÷" mewakili bahagi,dan x mewakili bilangan jiran dan y bilangan durian yang didapati oleh setiap orang, 3 mewakili baki. Beliau menjelaskan rumusan tersebut digunakan kerana masalah itu ada dua anu, iaitu bilangan jiran dan kuantiti yang diagihkan kepada setiap orang. Beliau menyatakan kuantiti yang diagihkan perlu lebih daripada baki, kerana jika kuantiti yang diagihkan kepada setiap jiran itu sama atau kurang daripada baki, maka baki itu cukup diagihkan kepada jiran yang lain. Beliau menyatakan lagi, baki itu tidak diagihkan walaupun kuantiti yang diagihkan kepada setiap jiran itu sama atau kurang daripada baki, kerana ini tidak mengikut konsep pembahagian, yang mana mengagihkan sejumlah objek kepada seberapa banyak kumpulan yang boleh dengan kuantiti yang sama sehingga habis diagih atau tinggal baki yang kurang daripada kuantiti objek dalam setiap kumpulan itu.

Cara penaakulan induktif John dalam menyelesaikan masalah pengagihan durian melibatkan baki dalam ayat matematik bahagi dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti yang ditunjukkan dalam Jadual 4.15 II (J) Baki Dalam Ayat Matematik Bahagi.

Pada keseluruhannya, cara penaakulan yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat dikelaskan kepada dua jenis, iaitu penaakulan deduktif dan penaakulan induktif seperti ditunjukkan dalam jadual 4.14. Kesemua guru juga cenderung menggunakan kedua-dua cara penaakulan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat. Penaakulan deduktif tersebut dibahagikan kepada 11 perkara, iaitu konsep kadaran, konsep gandaan, pecahan setara, kaedah pengukuran, gandaan yang lebih besar dan terdekat, gabungan operasi bahagi dan tolak, gandaan yang lebih kecil dan terdekat, kaedah pemetakan, faktor dengan operasi bahagi, faktor dengan operasi darab, dan baki dengan operasi bahagi. Dalam kaedah pengukuran dibahagikan kepada lima bahagian, iaitu garis nombor, operasi tambah berulang, senarai kes demi kes, gambar rajah, ayat matematik tambah berulang. Penaakulan induktif juga dibahagikan kepada 10 perkara, iaitu konsep kadaran, konsep gandaan, pecahan setara, kaedah pengukuran, gandaan yang lebih besar dan terdekat, gabungan operasi bahagi dan tolak, gandaan yang lebih kecil dan tersekat, faktor dengan operasi bahagi, faktor dengan operasi darab, dan baki dengan operasi bahagi. Kaedah pengukuran pula dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu gambar rajah dan baki yang ditetapkan.

Penyelesaian Masalah

Pemahaman guru matematik tentang pembahagian nombor bulat melibatkan penyelesaian masalah membabitkan empat soalan:

(1) 20 orang murid beratur dalam 4 baris dengan bilangan yang sama. Berapa orangkah murid dalam setiap baris?;

(2) Sekumpulan pengakap berkongsi seutas tali yang panjangnya 23 m, dengan setiap orang memperoleh 5 m. Berapa orangkah pengakap memperoleh tali panjang 5 m? Berapa panjang tali yang tinggal?;

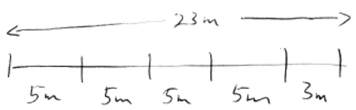
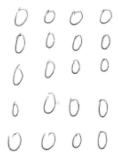
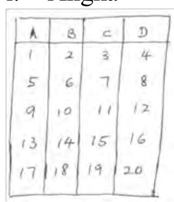
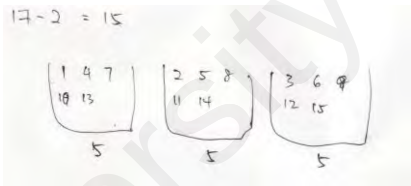
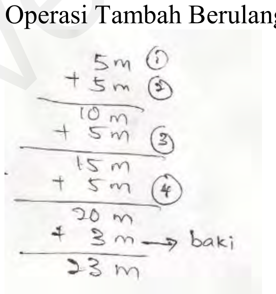
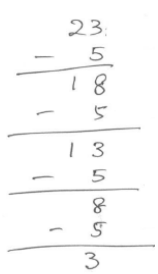
(3) Bapa memberi sejumlah wang kepada Siti dan 5 orang adiknya, dengan setiap orang memperoleh RM7. Berapakah jumlah wang yang diperoleh oleh Siti dan 5 orang adiknya?; dan

(4) Selepas pekedai mengagihkan 17 batang lolipop ke dalam 3 buah beg plastik secara sama rata, bakinya 2 batang. Berapakah jumlah lolipop dalam setiap beg plastik?.

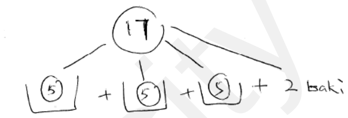
Penyelesaian Masalah Melibatkan Pembahagian Nombor Bulat. Bulat Cara penyelesaian soalan (1) hingga soalan (4) yangg digunakan oleh guru matematik Tahun Enam dikelaskan kepada satu kategori sahaja, iaitu kategori prosedural. Kategori ini dibahagikan kepada 11 perkara, iaitu (1) kaedah pengukuran, (2) kaedah pemetakan, (3) pembahagian panjang, (4) kaedah unitari, (5) songsangan darab, (6) operasi tambah berulang, (7) operasi tolak berulang, (8) gabungan operas tambah dan darab, (9) operasi darab, (10) gabungan operasi tambah dan bahagi, (11) gabungan operasi darab dan tolak, (12) gabungan operasi darab dan tambah, dan (13) cerakin nombor. Analisis cara penyelesaian bagi guru matematik Tahun Enam ditunjukkan dalam Jadual 4.16. Jadual ini menunjukkan kategori cara penyelesaian masalah, perkara dalam setiap kategori, huraian tentang perkara, dan responden yang menggunakan cara penyelesaian tersebut. Seterusnya, cara penyelesaian masalah yang dimiliki guru dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden yang ditunjukkan dalam Jadual 4.17.

Jadual 4.16

Cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh responden

<table>
<tr><th>Kategori</th><th>Perkara</th><th>Huraian</th><th>Responden</th></tr>
<tr><td>Prosedural</td><td>A. Kaedah Pengukuran

</td><td>• Sejumlah objek diskret atau objek selanjar diasingkan secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti yang sama.</td><td>Tong, Chong, Lim, John, Shidah.</td></tr>
<tr><td></td><td>B. Kaedah Pemetakan
i. Gambar rajah

i. Angka

<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr><tr><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr></table>

</td><td>• Sejumlah objek atau angka disusun/diagih dalam bilangan kumpulan yang ditetapkan dengan satu demi satu sehingga habis</td><td>Tong, Chong, Lim, John, Shidah, Kong</td></tr>
<tr><td></td><td>C. Operasi Tambah Berulang

</td><td>• Menambah kuantiti yang sama berulang kali termasuk baki sehingga jumlah yang diberi.</td><td>John, Chong, Shidah, Kong</td></tr>
<tr><td></td><td>D. Operasi Tolak Berulang

</td><td>• Menolak kuantiti dalam satu kumpulan berulang kali daripada jumlah kuantiti yang diberi sehingga habis atau berbaki.</td><td>John, Tong, Kong, Shidah</td></tr>
</table>

E. Pembahagian Panjang $5\overline{)23}$ = 4 20 3 baki	• Sejumlah objek diagihkan kepada bilangan kumpulan tertentu dengan menggunakan operasi bahagi dalam bentuk pembahagian panjang.	Lim, John, Shidah, Tong, Kong, Chong
F. Songsangan Darab 23 m ÷ 5 = 4 orang baki 3 m .	• Menghafal sifir bagi bilangan kumpulan untuk mendapat hasil darab yang sama dengan jumlah objek yang diberi .	Lim, John, Kong, Tong, Shidah
G. Kaedah Unitari 4 barisan = 20 orang 1 barisan = ? orang = 20 orang ÷ 4 = 5 orang	• Sejumlah objek diagihkan mengikut nisbah. Kuantiti dalam 1 bahagian didapati daripada nisbah tersebut.	Tong
H. Gabungan Operasi Tambah Dan Darab 1+5 = 6 6 x RM7 = RM42	• Mula-mula menggunakan operasi tambah untuk mendapatkan hasil tambah bilangan kumpulan yang terlibat, kemudian mendarabkan hasil tambah dengan kuantiti objek dalam satu kumpulan untuk mendapat jumlah keseluruhan objek.	John, Shidah, Tong, Kong, Chong
I. Operasi Darab RM 7 x 6 RM 42	• Kuantiti dalam satu kumpulan diwakili dengan nombor yang didarab, bilangan kumpulan diwakili dengan nombor darab, dan hasil darabnya mewakili jumlah keseluruhan objek.	John, Lim, Tong
J. Gabungan Operasi Tolak Dan Bahagi 17 - 2 = 15 15 ÷ 3 = 5	• Mula-mula menolak baki daripada jumlah objek yang diberi untuk mendapat beza, kemudian membahagikan beza tersebut dengan bilangan kumpulan untuk mendapat hasil bahagi yang mewakili kuantiti dalam satu kumpulan.	John, Tong, Shidah, Lim

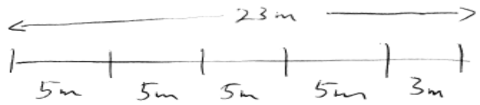
K. Gabungan Operasi Darab Dan Tolak $5 \times 3 = 15$ $17 - 15 = 2$	• Mula-mula menghafal sifir bagi bilangan kumpulan untuk mendapat hasil darab yang kecil dan terdekat dengan nombor yang diberi. Kemudian, menolakkan hasil darab tersebut daripada jumlah yang diberi untuk memastikan beza yang didapati adalah sama dengan baki.	Lim
L. Gabungan Operasi Darab Dan Tambah $3 \times 5 + 2 = 17$	• Mula-mula menghafal sifir bagi bilangan kumpulan untuk mendapat hasil darab yang kecil dan terdekat dengan nombor yang diberi. Kemudian, menambahkan hasil darab tersebut untuk memastikan hasil tambah yang didapati adalah sama dengan jumlah yang diberi.	Chong
M. Cerakin Nombor 	• Mencerakinkan nombor yang diberi kepada baki dan bilangan kumpulan yang ditetapkan dengan kuantiti yang sama.	Lim, John

Jadual 4.17

Tiga bahagian dalam penyelesaian masalah melibatkan pembahagian nombor bulat.

Situasi yang diasimilasikan	Aktiviti yang dijalankan	Hasil yang diharapkan
Jumlah objek/ukuran/ selang diasimilasikan jumlah objek/ukuran/ selang dalam garis nombor, dan kuantiti objek/ukuran bagi setiap kumpulan diasimilasikan sebagai saiz	A. **Kaedah pengukuran** (1) Menentukan jumlah panjang tali. (2) Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan. (3) Mengasingkan objek secara kumpulan dengan kuantiti yang sama, iaitu mengikut kuantiti yang ditentukan dalam setiap kumpulan sehingga kuantiti yang tidak cukup membentuk satu kumpulan. (4) Membilang jumlah bilangan kumpulan yang sama kuantiti dan bakinya yang tidak cukup membentuk satu kumpulan. Contohnya:	Bilangan kumpulan bersaiz *c*, yang didapati dengan mengagihkan/ mengasingkan sejumlah objek/ selang/ukuran, *a* secara kumpulan bersaiz, *b* dan objek/selang/ ukuran yang tidak cukup kuantiti diagihkan tinggal

kumpulan.



sebagai baki, *d*.
Contohnya,
$a \div b = c$ baki d
atau
$a \div b = c$

Jumlah kuantiti objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai hasil tambah, kuantiti objek/ukuran/ selang diagihkan kepada setiap kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tambah yang boleh ditambahkan berulang kali, serta kuantiti objek/ukuran/ selang yang lebih diasimilasikan sebagai baki dan boleh ditambahkan supaya hasil tambah sama dengan jumlah objek/ukuran/ selang yang diberi.

B. **Operasi tambah berulang**

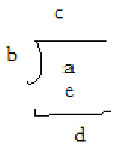
(1) Menentukan jumlah objek.
(2) Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan.
(3) Mewakilkan kuantiti objek dalam satu kumpulan dengan nombor tambah.
(4) Menulis ayat matematik tambah dalam bentuk lazim dengan menambahkan penambah yang sama berulang kali sehingga hasil tambahnya terdekat tetapi kurang daripada jumlah objek, seterusnya menambahkan baki untuk mendapat hasil tambah yang sama dengan jumlah objek.
(5) Mengira bilangan penambah yang sama untuk mengetahui bilangan gandaan kuantiti objek dalam jumlah objek tersebut dan bakinya.
Contohnya:

Rm7 + Rm7 + Rm7 + Rm7 + Rm7 + Rm7 = Rm42

$$\begin{array}{rl} 5\text{m} & 1 \\ +\ 5\text{m} & 2 \\ \hline 10\text{m} & \\ +\ 5\text{m} & 3 \\ \hline 15\text{m} & \\ +\ 5\text{m} & 4 \\ \hline 20\text{m} & \\ +\ 3\text{m} & \rightarrow \text{baki} \\ \hline 23\text{m} & \end{array}$$

Bilangan kali kuantiti objek ukuran/ selang yang sama, *b,* didapati dengan menambahkan *b* sehingga hasil tambahnya sama dengan jumlah objek yang diberi, *a* atau tambahkan baki, *c* akan mendapat jumlah objek, *a.*
Contohnya,
$b + b + b = a$
atau
$b + b + b + c = a$

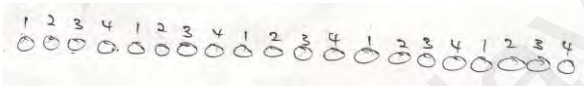
Jumlah objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ukuran/ selang bagi setiap kumpulan diasimilasikan sebagai kuantiti objek/ukuran/ selang yang diambil keluar /diasingkan setiap kali sehingga bezanya sifar atau lebih kecil daripada kuantiti objek/ukuran/ selang dalam satu kumpulan.	C. **Operasi tolak berulang** (1) Menentukan jumlah objek. (2) Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan. (3) Mewakilkan jumlah objek dengan nombor yang ditolak. (4) Mewakilkan kuantiti objek dalam satu kumpulan dengan nombor tolak.. (5) Menulis ayat matematik tolak dalam bentuk lazim dengan menolakkan nombor tolak yang sama berulang kali daripada nombor yang ditolak sehingga bezanya kurang daripada nombor tolak. (6) Mengira bilangan nombor tolak yang sama untuk mengetahui bilangan kali kuantiti objek dalam jumlah objek tersebut. (7) Menentukan bezanya, iaitu nombor yang kurang daripada nombor tolak. Contohnya: $\begin{array}{r} 23 \\ -\ \ 5 \\ \hline 18 \\ -\ \ 5 \\ \hline 13 \\ -\ \ 5 \\ \hline 8 \\ -\ \ 5 \\ \hline 3 \end{array}$	Bilangan kali kuantiti objek/ukuran/ selang yang sama, *b* dikeluarkan/ diasingkan daripada jumlah objek/ukuran/ selang yang diberi, *a* sehingga bezanya sifar atau berbaki, *c* yang lebih kecil daripada kuantiti objek/ukuran/ selang dalam satu kumpulan. Contohnya, $a - b - b - b = 0$ atau $a - b - b - b = c$
Jumlah objek/ ukuran/selang diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, dan kuantiti objek/ ukuran/selang dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai nombor bahagi.	D. **Pembahagian panjang** (1) Menentukan jumlah objek. (2) Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan. (3) Menulis ayat matematik bahagi dengan nombor yang dibahagi mewakili jumlah objek dan pembahagi mewakili kuantiti objek dalam satu kumpulan. (4) Menghafal sifir bagi pembahagi untuk mendapat hasil bahagi dan hasil darab yang hampir dengan nombor yang dibahagi, kemudian menolakkan hasil darab daripada nombor yang dibahagi untuk mendapat bakinya. Contohnya: $\begin{array}{r} 4 \\ 5\overline{)23} \\ 20 \\ \hline 3 \end{array}$ baki	Hasil bahagi, *c* yang mewakili saiz kumpulan/ bilangan kumpulan dan baki, *d* yang mewakili kuantiti objek yang tidak cukup membentuk satu kumpulan, didapati dengan membahagikan nombor yang dibahagi yang mewakili sejumlah objek, *a* dengan nombor bahagi yang mewakili bilangan kumpulan /saiz kumpulan dalam bentuk pengiraan

		pembahagian panjang. Contohnya, 
Jumlah objek/ ukuran/selang diasimilasikan sebagai hasil darab, dan kuantiti objek/ ukuran/selang bagi setiap kumpulan dan bilangan kumpulan objek/ ukuran/selang diasimilasikan sebagai dua faktor pendaraban, serta kuantiti objek/ ukuran/selang yang lebih diasimilasikan sebagai baki.	E. **Songsangan Darab** (1) Menentukan kuantiti panjang tali yang diberi. (2) Menentukan panjang tali dalam setiap kumpulan. (3) Menulis ayat matematik bahagi dengan nombor yang dibahagi mewakili jumlah panjang tali, manakala nombor bahagi mewakili kuantiti panjang tali dalam setiap kumpulan. (4) Menghafal sifir bagi nombor bahagi sehingga hasil darab adalah sama dengan nombor yang dibahagi. Contongnya: 23 m ÷ 5 = 4 orang baki 3 m . X ÷ 6 = Rm 7	Faktor pendaraban yang mewakili bilangan kumpulan, *b* atau saiz kumpulan, *c* , didapati dengan mendarabkan bilangan kumpulan/ saiz kumpulan dengan suatu nombor, kemudian tambah baki, *d* yang mewakili kuantiti objek yang tidak cukup membentuk satu kumpulan akan mendapat jumlah objek yang diberi, *a*. Contohnya, $a \div b = c$ $b \times c = a$ atau $a \div b = c$ baki d $b \times c + d = a$
Jumlah objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai jumlah objek/angka yang perlu diagih dan bilangan kumpulan objek/ ukuran/ selang	F. **Kaedah Pemetakan** (1) Menentukan kuantiti "a", iaitu jumlah murid yang perlu diagihkan. (2) Mewakilkan jumlah murid dengan gambar rajah atau angka. (3) Mengagihkan murid ke dalam "b" bilangan kumpulan dengan satu demi satu secara bergilir-gilir dan mengulangi proses sehingga habis. (4) Membilang kuantiti objek/angka dalam setiap kumpulan. Contohnya: (i) Melabelkan sebilangan objek yang dilukis dengan bilangan angka yang sama dengan bilangan kumpulan secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga habis.	Kuantiti objek/angka dalam setiap kumpulan.*c*, didapati dengan mengagihkan sejumlah objek/angka/selang , *a* kepada bilangan kumpulan yang ditetapkan, *b* dengan kuantiti yang sama, kuantiti yang tidak cukup diagihkan tinggal sebagai baki, *d*.

diasimilasikan sebagai bilangan kumpulan.

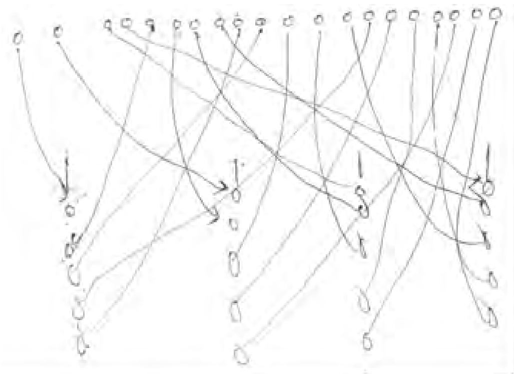
A	B	C	D
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

(ii) Memasukkan sebilangan angka ke dalam bilangan lajur yang mewakili bilangan kumpulan tertentu secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga habis.

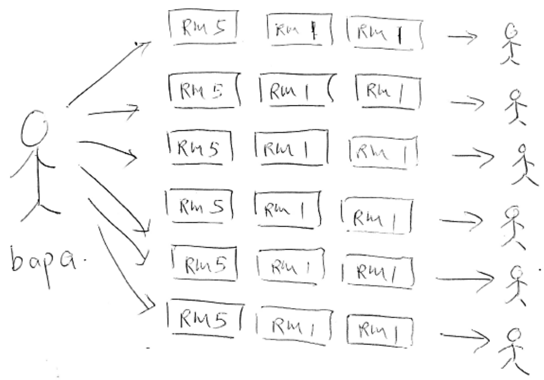
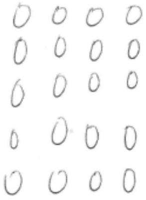
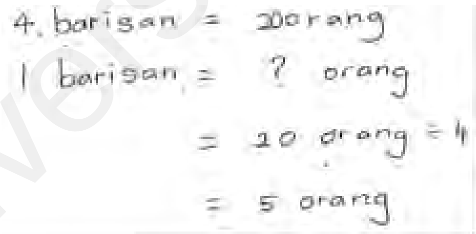


(iii) Mengagihkan sebilangan objek ke dalam kolum dalam jadual secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga habis.

(iv) Melukis garisan dari sebilangan objek ke bilangan kumpulan yang ditentukan secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga habis.

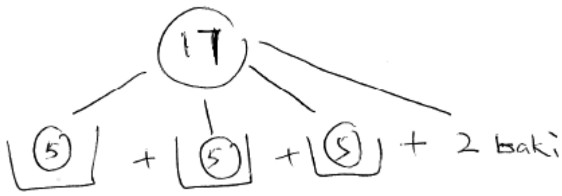


Contohnya,
$a \div b = c$
atau
$a \div b = c$ baki d

	 (v) Menyusun objek/angka yang dilukis ke dalam bilangan lajur yang mewakili bilangan kumpulan tertentu secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga habis. 	
Jumlah objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi dan bilangan kumpulan objek/ ukurna/selang diasimilasikan sebagai nombor bahagi.	**G. Kaedah Unitari** (1) Menentukan jumlah objek. (2) Menentukan bilangan kumpulan dengan kuantiti objek yang sama. (3) Mencari kuantiti murid dalam satu kumpulan dengan membahagikan jumlah murid dengan bilangan kumpulan yang. ditentukan. Contohnya: 	Kuantiti objek dalam satu kumpulan, *c*, yang didapati dengan membahagikan sejumlah objek/ukuran/ selang, *a* kepada bilangan kumpulan yang ditetapkan, *b*. Contohnya, $b \longrightarrow a$ cari 1 kumpulan daridapa *b* $a \div b = c$
Bilangan kumpulan objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai nombor tambah, dan jumlah objek/ukuran/ selang dan kuantiti objek/ukuran/ selang dalam setiap	**H. Gabungan Operasi Tambah Dan Tolak** (1) Menentukan jumlah kumpulan yang mempunyai kuantiti objek yang sama dengan operasi tambah. (2) Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan. (3) Mewakilkan jumlah kumpulan dengan nombor yang didarab. (4) Menggunakan operasi darab untuk mendapat jumlah objek, iaitu mendarabkan jumlah kumpulan dengan kuantiti dalam satu kumpulan. (5) Menulis ayat matematik operasi bergabung, iaitu jumlah kumpulan ditulis dengan ayat matematik tambah dalam kurungan mendarab nombor darab yang mewakili kuantiti objek dalam satu kumpulan. Contohnya:	Hasil darab, *e* yang mewakili jumlah objek/ukuran/ selang yang didapati dengan menambahkan kumpulan *a* dan kumpulan *b* untuk mendapat jumlah bilangan kumpulan, *c,* kemudian jumlah bilanga kumpulan, *c* didarab dengan

kumpulan diasimilasikan sebagai dua faktor pendaraban.	$(1+5) \times RM7$	kuantiti objek/ukuran/ selang dalam setiap kumpulan, *d*. Contohnya $a + b = c$, $c \times d = e$
Bilangan kumpulan objek/ukuran/ selang dan kuantiti objek/ukuran/ selang dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai dua faktor pendaraban.	**I. Operasi Darab** (1) Menentukan bilangan kumpulan yang mempunyai kuantiti objek yang sama. (2) Menentukan kuantiti objek dalam setiap kumpulan. (3) Menulis ayat matematik darab dalam bentuk lazim dengan nombor yang didarab mewakili bilangan kumpulan dan pendarab mewakili kuantiti objek dalam satu kumpulan. (4) Mencari jumlah objek dengan mendarabkan bilangan kumpulan dengan kuantiti objek dalam setiap kumpulan. Contohnya: $\begin{array}{r} RM\ 7 \\ \times\quad 6 \\ \hline RM\ 42 \\ \hline \end{array}$	Hasil darab, *c* yang mewakili jumlah objek/ukuran/ selang, didapati dengan mendarabkan bilangan kumpulan objek/ukuran/ selang, *a* dengan kuantiti objek/ukuran/ selang dalam setiap kumpulan, *b*. Contohnya, $a \times b = c$
Beza antara jumlah objek/ukuran/ selang dengan baki diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, dan bilangan kumpulan objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai nombor bahagi.	**J. Gabungan Operasi Tolak Dan Bahagi** (1) Menentukan jumlah objek. (2) Menentukan bakinya. (3) Menentukan bilangan kumpulan. (4) Mendapat beza untuk diagih sama banyak dengan menolakkan baki daripada jumlah objek. (5) Membahagikan beza dengan bilangan kumpulan untuk mendapat kuantiti objek dalam setiap kumpulan. Contohnya: $17 - 2 = 15$ $15 \div 3 = 5$	Hasil bahagi, *e* yang didapati dengan membahagikan beza, *c* antara jumlah objek/ukuran/ selang, *a* dengan baki, *b*, dengan bilangan kumpulan, *d*. Contohnya $a - b = c$, $c \div d = e$
Bilangan objek/ukuran/ selang dan kuantiti objek/ukuran/ selang dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai faktor pendaraban untuk mendapat hasil darab yang	**K. Gabungan Operasi Darab Dan Tolak** (1) Menentukan jumlah objek. (2) Menentukan bilangan kumpulan. (3) Menentukan baki. (4) Menghafal sifir bagi bilangan kumpulan untuk mendapat nombor yang terdekat tetapi kecil daripada jumlah objek. (5) Menolak hasil darab yang didapati daripada jumlah objek untuk mendapat beza yang sama dengan baki yang diberi. Contohnya: $5 \times 3 = 15 \quad 17 - 15 = 2$	Bilangan kumpulan/saiz kumpulan, *b* yang didapati dengan mendarabkan bilangan kumpulan, *a* untuk mendapat hasil darab, *c* yang lebih kecil dan terdekat dengan jumlah objek, *d*, kemudian *c* ditolak dari jumlah objek, *d*

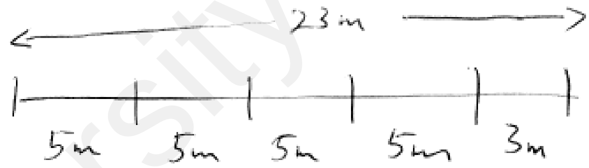
lebih kecil dan terdekat dengan jumlah objek/ukuran/ selang, dan jumlah objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai nombor yang ditolakkan.		akan mendapat baki, *e* yang ditentukan. Contohnya, $a \times b = c$, $d - c = e$
Bilangan kumpulan objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai nombor yang didarab, kuantiti objek/ukuran/ selang dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai nombor darab dan baki diasimilasikan sebagai nombor tambah, manakala jumlah objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai hasil tambah.	**L. Gabungan Operasi Darab Dan Tambah** (1) Menentukan jumlah objek. (2) Menentukan bilangan kumpulan. (3) Menentukan baki. (4) Menghafal sifir bagi bilangan kumpulan untuk mendapat nombor yang terdekat tetapi kecil daripada jumlah objek. (5) Menambah hasil darab yang didapati dengan menghafal sifir bagi bilangan kumpulan dengan baki untuk mendapat hasil tambah yang sama dengan julah objek yang diberi. Contohnya: $3 \times 5 + 2 = 17$	Faktor pendaraban, b yang didapati dengan mendarabkan suatu nombor, *b* dengan bilangan kumpulan, *a* dan hasil darabnya ditambah dengan baki, *c* akan mendapat jumlah objek yang diberikan, *d*. Contohnya $a \times b + c = d$
Jumlah objek/ukuran/ selang diasimilasikan sebagai suatu nombor yang boleh dicerakinkan kepada baki yang ditetapkan dan tiga nombor kecil yang	**M. Cerakin Nombor** (1) Menentukan jumlah objek. (2) Menentukan bilangan kumpulan. (3) Menolakkan baki daripada jumlah objek untuk mendapat beza, iaitu kuantiti yang perlu diagihkan. (4) Dengan kiraan mental mencerakinkan beza kepada sebilangan nombor yang sama dengan mengikut bilangan kumpulan yang ditetapkan. (5) Melukis situasi dengan gambar rajah. Contohnya:	Nombor yang sama, *b* mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan, didapati dengan mencerakinkan suatu nombor, *a* yang mewakili jumlah objek/ ukuran/selang kepada beberapa kumpulan

sama nilainya.		objek/nombor kecil yang sama dan dengan atau tanpa baki, *c*. Contohnya, $a = b + b + b$ atau $a = b + b + b + c$

Terdapat lima daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggunakan kaedah pengukuran untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 5.2(Chong) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.2 (Chong): Masalah Melibatkan Pengagihan Panjang Tali

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ada. (Cikgu melukis satu garis nombor dan menandakan 23 m panjangnya. Kemudian, cikgu memotongnya kepada empat bahagian lima meter dan tinggal satu bahagian tiga meter). Saya memotong tali itu secara lima meter setiap kali , sehingga akhirnya tinggal tiga meter.



P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
R: 23 mewakili tali panjangnya 23 m, potong kepada empat bahagian, setiap bahagian ada lima meter, jadi tali itu dipotong sebanyak empat kali yang masing-masing mempunyai lima meter dan 3 mewakili baki tali tiga meter.
P: Apakah maksud baki tali tiga meter?
R: Bahagian yang tidak cukup diagihkan.
P: Mengapakah tidak cukup diagihkan?
R: Setiap orang pengakap perlu ada lima meter tali. Tetapi hanya ada tiga meter sahaja, maka ia tidak cukup diagihkan kepada seorang pengakap lagi.
P: Tali itu adalah bahagian yang tidak cukup atau lebih?
R: Tidak cukup.
P: Mengapakah bukan bahagian yang lebih?
R: Bahagian yang lebih bermaksud sudah cukup agihan itu tetapi masih ada tinggal lagi, manakala tidak cukup bermaksud hendak agih lagi tetapi bahagian yang diagih itu tidak cukup dengan panjang yang diperlukan.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah di atas?
R: Saya melukis satu garis nombor dan menandakan 23 m mewakili tali panjangnya 23 m. Kemudian, memotongkannya secara lima meter setiap kali sehingga akhirnya tinggal tiga meter.

Cara penyelesaian masalah Chong ditunjukkan dengan melukis satu garis melintang dan menandakan 23 m panjangnya, kemudian, memotongnya kepada empat bahagian lima meter masing-masing dan tinggal satu bahagian tiga meter. Beliau melukis sambil berkata tali tersebut dipotong secara lima-lima meter, akhirnya tinggal tiga meter. Beliau menerangkan 23 mewakili tali panjangnya 23 m, potong kepada empat bahagian lima meter mewakili tali itu dipotongkan empat kali lima meter dan 3 mewakili baki tali panjangnya tiga meter. Beliau menyatakan maksud baki tali tiga meter ialah bahagian yang tidak cukup diagihkan kerana setiap orang pengakap memerlukan lima meter tali, tetapi hanya tinggal tiga meter sahaja, maka ia tidak cukup diagihkan kepada seorang pengakap lagi. Menurut beliau, baki tali itu adalah bahagian yang tidak cukup bukan bahagian yang lebih kerana bahagian yang lebih bermaksud sudah cukup agihan itu tetapi masih ada tinggal lagi, manakala tidak cukup bermaksud hendak diagihkan lagi tetapi bahagian yang diagih itu tidak cukup dengan panjang yang diperlukan.

Chong menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu melukis satu garis melintang dan menandakan 23 m mewakili tali panjangnya 23 m. Kemudian, memotongkannya secara lima-lima meter, akhirnya tinggal tiga meter. Seterusnya, Chong menerangkan tali itu perlu dipotong kepada empat bahagian lima meter masing-masing dan tinggal tiga meter kerana beliau menghafal sifir 5, iaitu “4 × 5 = 20”, kemudian, menggunakan operasi tambah, iaitu “20 + 3 = 23”, untuk mengetahui bahagian yang tidak cukup itu. Chong menjelaskan operasi tolak tidak digunakan untuk mendapat baki iaitu “23 – 20 = 3”, kerana beliau sudah mencapai 20 m, dengan empat darab lima, Oleh itu beliau terus memikirkan tambah berapa akan dapat 23. Beliau menyatakan hasil penyelesaian masalah tersebut ialah empat orang pengakap masing-masing memperoleh tali lima meter dan bakinya tiga meter. Beliau menerangkan jawapan tersebut diperoleh dengan menghafal sifir lima, iaitu "4 × 5 = 20", kemudian menggunakan operasi tambah, iaitu "20 + 3 = 23", dengan itu beliau mendapat empat bahagian lima meter dan satu bahagian tiga meter yang mewakili empat orang pengakap masing-masing mendapat tali panjangnya lima meter dan tinggal tiga meter tali. Seterusnya, beliau menerangkan cara penyelesaian tersebut digunakan kerana cara itu dapat menggambarkan situasi masalah dan secara visual dapat melihat dengan jelas pemotongan tali itu dan bakinya.

Cara penyelesaian masalah Chong tentang pengagihan panjang tali melibatkan kaedah pengukuran, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (A) Kaedah Pengukuran.

Hanya terdapat empat daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggunakan operasi tambah berulang untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 5.2(John) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan operasi tambah berulang, dan urutan tiga bahagian dalam penggunaan operasi tambah berulang untuk menyelesaikan soalan (2).

Protokol 5.2 (John): Masalah Melibatkan Pengagihan Panjang Tali

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?

R: Boleh. (Cikgu menulis penambahan dalam bentuk lazim, iaitu 5 m + 5 m = 10 m, kemudian 10 m + 5 m = 15 m, seterusnya 15 m + 5 m = 20, akhirnya 20 m + 3 m = 23 m. Selepas itu melabelkan angka 1 hingga 4 di tepi 5 m).

$$\begin{array}{rl}
5\text{ m} & 1 \\
+\ 5\text{ m} & 2 \\
\hline
10\text{ m} & \\
+\ 5\text{ m} & 3 \\
\hline
15\text{ m} & \\
+\ 5\text{ m} & 4 \\
\hline
20\text{ m} & \\
+\ 3\text{ m} & \rightarrow \text{baki} \\
\hline
23\text{ m} &
\end{array}$$

P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?

R: Ok. Saya tambahkan 5 m demi 5 m sehingga 20m , kemudian tambah 3m untuk mendapat 23 m.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Saya menambah 5 m demi 5 m sehingga jumlahnya 20 m, kemudian menambah 3m untuk mencukupkan 23 m. Kemudian, saya melabelkan 5 m dengan angka 1 hingga 4 untuk mengetahui bilangan 5 m yang ada.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian begini?
R: Saya hanya perlu menggunakan operasi tambah sahaja untuk mendapat jawapan. Operasi tambah lebih senang digunakan bagi saya.
P: Dengan itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?
R: Empat orang pengakap memperoleh tali yang panjangnya 5 m dan tinggal sebahagian tali yang panjangnya 3m.

Cara penyelesaian masalah John ditunjukkan dengan menulis penambahan berulang dalam bentuk lazim, iaitu 5 m + 5 m = 10 m, kemudian 10 m + 5 m = 15 m, seterusnya 15 m + 5 m = 20, akhirnya 20 m + 3 m = 23 m. Beliau menerangkan bahawa beliau menambahkan 5 m demi 5 m sehingga 20 m , kemudian tambah 3 m untuk mendapat 23 m. Beliau menyatakan cara penyelesaiannya, iaitu menambah 5 m demi 5 m sehingga jumlahnya 20 m, kemudian menambah 3 m untuk mencukupkan 23 m. Kemudian, beliau melabelkan 5 m dengan angka 1 hingga 4 untuk mengetahui bilangan 5 m yang ada. Beliau menerangkan lagi, cara penyelesaian begitu digunakan kerana beliau mengetahui bahawa ada 23 m tali dan tali itu dipotong dengan 5 m dalam satu bahagian. Maka, beliau pun menambahkan 5 m demi 5 m sehingga 20 m, yang akhir tambahkan 3 m, kerana 3 m tidak cukup 5 m. Beliau menyatakan dengan cara ini, jumlah bilangan 5 m yang ada dalam 23 m akan diketahui.

John menyatakan jumlah bilangan tali 5 m sama dengan jumlah bilangan pengakap dalam kumpulan itu, maka hasil penyelesaiannya ialah empat orang pengakap memperoleh tali yang panjangnya 5 m dan tinggal sebahagian tali yang panjangnya 3 m. Beliau mengatakan jawapan itu diperoleh dengan mengira bilangan 5 m yang ditambahkan, maka beliau akan mengetahui bilangan 5 m dalam 23 m.

Dengan mengira jumlah bilangan tali 5 m, akan mendapat jumlah bilangan pengakap dalam kumpulan itu.

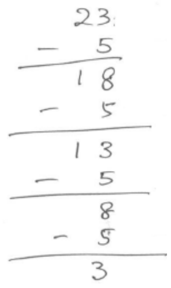
Menurut John, operasi tambah digunakan dan bukan mengguna operasi tolak berulang kerana beliau telah mengetahui setiap bahagian tali ada 5 m, maka beliau pun menambahkannya satu demi satu. Beliau mengatakan operasi tambah lebih senang daripada menggunakan operasi tolak, kerana beliau telah biasa dengan operasi tambah dan mengguna sifir 5. Tambahan beliau, semasa beliau membuat penambahan, beliau juga mengira dalam hati dengan operasi darab. Beliau menjelaskan ini kerana beliau telah mengetahui setiap bahagian ada 5 m, maka ia adalah gandaan 5, dengan itu beliau pun menggunakan sifir 5 untuk mengira sehingga hampir dengan 23. John menjelaskan beliau hanya menghafal hingga hampir dengan 23 kerana beliau telah tahu sifir 5 tiada 23, dan ia hampir dengan 20 tetapi tidak cukup 25, maka beliau akan mengambil gandaan di depan 23 iaitu 20. Di mana cara penyelesaian masalah yang pertama ialah penambahan, beliau menggunakan sifir "$4 \times 5 = 20$" untuk mengetahui dalam 20 ada empat 5.

Cara penyelesaian masalah John tentang pengagihan panjang tali melibatkan pembahagian panjang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (B) Operasi Tambah Berulang.

Terdapat empat daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggunakan operasi tolak berulang untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 5.2(Tong) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan operasi tolak berulang, dan urutan tiga bahagian dalam penggunaan operasi tolak berulang untuk menyelesaikan soalan (2).

Protokol 5.2 (Tong): Masalah Melibatkan Pengagihan Panjang Tali

P: Ada lagi cara untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ya, saya guna tolak berulang. (Cikgu menulis 23 tolak 5 dalam bentuk lazim, iaitu "23 – 5 = 18, 18 – 5 = 13, 13 – 5 = 8, 8 – 5 = 3").



P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
R: 23 mewakili panjang tali 23 m, " – 5" mewakili tali kurang 5 m setiap kali, manakala 18, 13, 8 dan 3 mewakili panjang tali yang tinggal selepas ditolakkan 5 m.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
S: Saya menggunakan operasi tolak berulang. Ini kerana tali panjangnya 23 m perlu diasingkan lima-lima meter, oleh itu setiap kali mengasingkan akan kurang 5 m dan diwakili dengan penolakan 5 m. Dengan itu, saya hanya perlu menolakkan tali itu 5 m setiap kali sehingga ia tidak cukup ditolakkan 5 m lagi. Panjang tali tidak cukup 5 m adalah tinggal sebagai baki.
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?
R: Empat orang pengakap memperoleh tali yang panjangnya 5 m dan bakinya 3m.
P: Bagaimanakah cikgu memperoleh jawapan ini?
R: Saya mengira bilangan " – 5" dalam bentuk lazim itu dan didapati 23 m boleh ditolakkan empat kali 5 m, oleh itu empat orang pengakap akan memperoleh tali panjangnya 5 m masing-masing dan tinggal baki 3m.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian begini?
R: Cara ini ditunjukkan dengan jelas tali itu dipotong kepada beberapa bahagian 5 m dan baki yang tinggal.

Cara penyelesaian masalah bagi Tong ditunjukkan dengan menulis 23 tolak lima sebanyak empat kali dengan bentuk lazim, iaitu "23 – 5 = 18, 18 – 5 = 13, 13 – 5 = 8, 8 – 5 = 3". Beliau menerangkan 23 mewakili panjang tali 23 m, " – 5" mewakili tali kurang 5 m setiap kali, manakala 18, 13, 8 dan 3 mewakili panjang tali yang tinggal selepas ditolakkan 5 m. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu menggunakan operasi tolak berulang. Ini kerana tali panjangnya 23 m perlu diasingkan lima-lima meter, dengan itu setiap kali pengasingan akan kurang 5 m yang diwakii dengan penolakan 5 m. Tong menyatakan dengan itu, beliau hanya perlu menolakkan tali itu 5 m setiap kali sehingga ia tidak cukup ditolakkan dengan 5 m lagi. Panjang tali tinggal dan tidak cukup 5 m itu adalah baki pengasingan. Beliau menyatakan dengan cara tersebut hasil penyelesaiannya adalah empat orang pengakap memperoleh tali panjangnya 5 m dan bakinya 3 m. Beliau menerangkan jawapan tersebut didapati dengan mengira bilangan " – 5" dalam bentuk lazim itu. Beliau menyatakan lagi, dalam bentuk lazim itu didapati 23 boleh ditolak empat kali lima, dengan itu empat orang pengakap masing-masing akan memperoleh tali panjangnya 5 m dan beza terakhir, iaitu 3 m adalah bakinya. Beliau menyatakan cara penyelesaian begitu digunakan kerana cara itu ditunjukkan dengan jelas tali itu dipotong kepada beberapa bahagian 5 m dan baki yang tinggal.

Penyelesaian masalah pengagihan panjang tali menggunakan operasi tolak berulang bagi Tong dijelaskan dalam satu urutan mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (C) Operasi Tolak Berulang.

Seterusnya, terdapat lima daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggunakan pembahagian panjang untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 5.2(Tong) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan pembahagian panjang, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.2 (Tong): Masalah Melibatkan Pengagihan Panjang Tali

P: Boleh cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis "23 ÷ 5" dalam bentuk pembahagian panjang, kemudian menyelesaikannya dan mendapat hasil penyelesaiannya 4 baki 3).

$$\begin{array}{rl} 4 & \\ 5\overline{)23} & \\ 20 & \\ \hline 3 & \text{baki} \end{array}$$

P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
R: Ok. "23" mewakili tali panjangnya 23 m dan "5" mewakili setiap orang memperoleh tali panjangnya lima meter, 4 mewakili empat orang pengakap mendapat tali panjangnya 5 meter masing-masing , dan baki 3 mewakili panjang tali yang tinggal tiga meter.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah di atas?
R: Mula-mula, saya menentukan jenis masalah dan kata kuncinya. Kemudian, menentukan nombor yang dibahagi, iaitu 23 dan nombor bahagi, iaitu 5. Akhirnya, menulisnya dalam bentuk pembahagian panjang dan menggunakan Sifir 5 untuk mendapat jawapannya.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian begini?
R: Cara ini senang dan cepat mendapat jawapan.
P: Mengapakah cikgu cakap begitu?
R: Saya telah biasa menggunakan pengiraan mekanikal. Saya hanya perlu menghafal sifir sahaja akan mendapat jawapan.
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?
R: Empat orang pengakap mendapat tali panjangnya lima meter masing-masing dan bakinya tiga meter.
P: Mengapakah ada baki tiga meter?
R: Ini kerana setiap orang pengakap akan mendapat lima meter panjang tali, oleh kerana akhirnya hanya tinggal tiga meter panjang tali, ia tidak cukup untuk diagihkan kepada seorang pengakap lagi. Oleh itu, ia tinggal sebagai baki.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan ini?
R: Saya menggunakan pembahagian panjang dan menghafal sifir 5, iaitu "4 × 5 = 20", kemudian " 23 – 20 = 3".

Cara penyelesaian Tong ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, "23 ÷ 5 = 4 baki 3" dalam bentuk pembahagian panjang. Beliau menerangkan "23" mewakili tali panjangnya 23 m, "÷ 5" mewakili diagihkan secara lima-lima meter, "4" mewakili empat orang pengakap masing-masing mendapat tali lima meter dan "3" mewakili baki tiga meter. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu selepas mengenal pasti masalah itu adalah masalah pembahagian, beliau terus mewakilkannya dalam bentuk pembahagian panjang. Kemudian, beliau menghafal sifir 5, iaitu "4 × 5 = 20" untuk mendapat hasil darabnya 20. Selepas itu, beliau menolakkan 20 daripada 23 untuk mendapat hasilnya 3. Beliau menyatakan dengan cara tersebut, hasil penyelesaiannya ialah 4 baki 3. Beliau menerangkan jawapan tersebut didapati dengan melihat 4 di atas simbol bahagi dan 3 di bawahnya. Beliau menyatakan 4 didapati dengan sifir 5 iaitu "4 × 5 = 20" dan 3 adalah beza bagi "23 – 20". Beliau menyatakan hanya menghafal sifir 5 hingga 4 sahaja kerana "5 × 5 = 25" telah lebih 23. Seterusnnya, Lim menerangkan cara penyelesaian sebegitu digunakan kerana cara tersebut telah biasa digunakan dan ia senang dan cepat mendapat jawapan. Beliau menerangkan hanya perlu menghafal sifir dan membuat penolakan akan mendapat jawapan.

Penyelesaian masalah pengagihan panjang tali menggunakan pembahagian panjang bagi Tong dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (D) Pembahagian Panjang.

Selain itu, terdapat lima daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggunakan songsangan darab untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 5.2(Lim) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan songsangan darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.2 (Lim)*:* Masalah Melibatkan Pengagihan Panjang Tali

P: Boleh cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik“23 ÷ 5” = 4 orang baki 3 meter).

23 m ÷ 5 = 4 orang baki 3 m.

P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
R: Ok. “23” mewakili tali panjangnya 23 m dan “÷ 5” mewakili setiap orang memperoleh tali panjangnya lima meter, “4” mewakili empat orang pengakap mendapat tali panjangnya 5 meter masing-masing dan baki 3 meter mewakili panjang tali yang tidak dapat diagihkan.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah di atas?
R: Selepas mengenal pasti jenis masalah, iaitu masalah pembahagian, saya pun menulis ayat matematik pembahagian, kemudian, saya menggunakan mental aritmetik untuk mendapat jawapan. Mula-mula saya menghafal sifir 5, iaitu “4 × 5 = 20 ”, selepas itu menolakkan 20 daripada 23, dan mendapat hasilnya 3.
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?
R: 4 orang baki 3 meter, iaitu empat orang pengakap mendapat tali panjangnya lima meter masing-masing dan bakinya tiga meter.
P: Mengapakah ada baki tiga meter?
R: Baki tiga meter bermaksud bahagian tali tidak cukup lima meter untuk diagihkan kepada seorang pengakap lagi.
P: Apa yang cikgu faham dengan baki?
R: Kuantiti yang tidak cukup untuk diagihkan kepada satu kumpulan lagi.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan ini?
R: Saya menggunakan mental aritmetik dengan menghafal sifir 5, iaitu “4 × 5 = 20”, kemudian menggunakan operasi tolak, iaitu“ 23 – 20 = 3”.

Cara penyelesaian Lim ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, “23 ÷ 5” = 4 orang baki 3 meter”. Beliau menerangkan “23” mewakili tali panjangnya 23 m dan “÷ 5” mewakili setiap orang memperoleh tali panjangnya lima meter, “4” mewakili empat orang pengakap masing-masing mendapat tali panjangnya 5 meter dan baki 3 meter mewakili panjang tali yang tidak dapat diagihkan. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu selepas mengenal pasti jenis masalah, iaitu masalah pembahagian, beliau pun menulis ayat matematik pembahagian, kemudian, menggunakan mental aritmetik untuk mendapat jawapan. Lim menyatakan, mula-mula beliau menghafal sifir 5, iaitu “4 × 5 = 20 ”, selepas itu menolakkan 20 daripada 23 untuk mendapat hasilnya 3. Beliau menyatakan dengan cara tersebut, hasil penyelesaiannya ialah 4 orang baki 3 meter, iaitu empat orang pengakap masing-masing mendapat tali panjangnya lima meter dan bakinya tiga meter.

Menurut Lim, baki tiga meter yang tinggal bermaksud bahagian tali tidak cukup lima meter untuk diagihkan kepada seorang pengakap lagi. Menurut pandangan beliau, baki ialah kuantiti yang tidak cukup untuk diagihkan kepada satu kumpulan lagi. Beliau menyatakan jawapan tersebut didapati dengan menggunakan mental aritmetik dengan menghafal sifir 5, iaitu “4 × 5 = 20”, kemudian menggunakan operasi tolak, iaitu“ 23 – 20 = 3”. Lim menerangkan cara penyelesaian sebegitu digunakan kerana cara tersebut senang dan cepat mendapat jawapan.

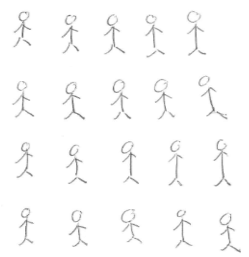
Penyelesaian masalah pengagihan panjang tali menggunakan songsangan darab bagi Lim dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (E) Songsangan Darab.

Semua guru matematik Tahun Enam cenderung menggunakan kaedah pemetakan untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat.

Kaedah ini melibatkan dua bahagian, iaitu gambar rajah dan angka. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 5.1(Lim) menunjukkan cara penyelesaian masalah bagi soalan (1) yang melibatkan penggunaan kaedah pemetakan dengan menggunakan gambar rajah, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.1 (Lim): Masalah Melibatkan Penyusunan Objek

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ada. (Cikgu melukis 20 orang dalam empat baris secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga orang ke-20).



P: Tolong jelaskan.
R: "20" orang mewakili 20 orang murid dan murid itu dilukis dalam empat baris mewakili murid beratur dalam empat baris.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah di atas?
R: Saya melukis 20 orang dalam empat baris secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga orang ke-20. Selepas itu, saya membilang orang dalam setiap baris.
P: Mengapakah cikgu melukis orang tersebut secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga orang ke-20.
R: Ini untuk memastikan pengagihan murid itu adalah sama rata.
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaiannya?
R: 5 orang dalam setiap baris.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan itu?
R: Saya membilang jumlah orang dalam setiap baris.

Cara penyelesaian Lim tentang soalan (1) ditunjukkan dengan melukis 20 orang dalam empat baris secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga orang ke-20. Beliau menerangkan "20" orang mewakili 20 orang murid dan murid itu dilukis dalam empat baris mewakili murid beratur dalam empat baris. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu melukis 20 orang dalam empat baris satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga orang ke-20. Selepas itu, beliau membilang orang dalam setiap baris. Menurut beliau, orang tersebut dilukis secara satu demi satu mengikut urutan dan mengulangi proses sehingga orang ke-20 kerana untuk memastikan pengagihan murid itu adalah sama rata. Beliau menyatakan dengan cara tersebut, hasil penyelesaiannya ialah 5 orang dalam setiap baris. Beliau menerangkan jawapan tersebut didapati dengan membilang jumlah orang dalam setiap baris.

Seterusnya, Lim menerangkan cara penyelesaian sebegitu digunakan kerana cara tersebut senang dan secara visual jelas melihat murid itu diagihkan. Beliau menerangkan cara tersebut tidak perlu menggunakan operasi, hanya membilang sahaja bilangan dalam setiap baris untuk mendapat jawapan dan cara tersebut juga secara visual dapat melihat pengagihan murid dalam empat baris.

Cara penyelesaian masalah penyusunan murid bagi Lim menggunakan kaedah pemetakan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (F) Kaedah Pemetakan.

Selain itu, hanya terdapat seorang daripada enam orang guru menggunakan kaedah unitari untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Tong dalam Protokol 5.1(Tong) menunjukkan penggunaan kaedah unitari untuk menyelesaikan soalan (1), dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.1 (Tong): Masalah Melibatkan Penyusunan Murid

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis “4 barisan = 20 orang”, “1 barisan = ? = 20 orang ÷ 4 = 5 orang”).

4 barisan = 20orang
1 barisan = ? orang
= 20 orang ÷ 4
= 5 orang

P: Tolong jelaskan.
R: “4 baris = 20 orang” bermaksud dalam empat baris ada 20 orang, manakala “1

baris = ? orang" bermaksud satu baris ada berapa orang. Dalam ayat matematik "20 orang ÷ 4 = 5 orang", 20 orang mewakili 20 orang murid, "÷ 4" mewakili 20 orang diagihkan ke dalam empat baris dengan bilangan yang sama, dan 5 orang mewakili lima orang dalam setiap baris.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah di atas?

R: Saya telah mengetahui 20 orang beratur dalam empat baris dengan bilangan yang sama. Mencari bilangan orang dalam setiap baris berkaitan dengan konsep bahagi, dengan itu saya pun menggunakan operasi bahagi, iaitu "20 ÷ 4".

P: Mengapakah cikgu menyatakan "mencari bilangan orang dalam setiap baris berkaitan dengan konsep bahagi"?

R: Konsep bahagi adalah mengagihkan sejumlah objek ke dalam beberapa kumpulan dengan bilangan yang sama. Ini sama dengan mengatur 20 orang ke dalam empat baris dengan bilangan yang sama. Maka untuk mencari bilangan orang dalam setiap baris, saya menggunakan operasi bahagi.

P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?

R: Setiap baris ada lima orang.

P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan itu?

R: Saya membahagikan 20 orang dengan empat baris, iaitu "20 ÷ 4" , oleh itu saya mendapat lima orang dalam satu baris. Saya guna sifir 4 untuk mendapat jawapan, iaitu, "5 × 4 = 20".

P: Mengapakah cikgu menggunakan cara ini?

R: Ini kerana jumlah bilangan murid dan bilangan baris telah diketahui, dengan itu mencari bilangan orang dalam satu baris akan diketahui dengan membahagikan jumlah bilangan murid dengan bilangan barisan.

Cara penyelesaian masalah Tong ditunjukkan dengan menulis "20 orang ÷ ( ) orang = 4 baris", "4 baris = 20 orang", "1 baris = ? orang", "20 orang ÷ 4 = 5 orang". Beliau menjelaskan "4 baris = 20 orang" bermaksud dalam empat baris ada 20 orang, manakala "1 baris = ? orang" bermaksud satu baris ada berapa orang. Dalam ayat matematik "20 orang ÷ 4 = 5 orang", 20 orang mewakili 20 orang murid, "÷ 4" mewakili 20 orang diagihkan ke dalam empat baris dengan sama banyak, dan 5 orang mewakili lima orang dalam setiap baris.

Tong menjelaskan beliau telah mengetahui 20 orang beratur dalam empat baris dengan bilangan yang sama. Menururt beliau mencari bilangan orang dalam setiap baris berkaitan dengan konsep bahagi, dengan itu beliau pun menggunakan operasi bahagi, iaitu "20 ÷ 4" untuk menyelesaikan masalah tersebut. Beliau menjelaskan "mencari bilangan orang dalam setiap baris berkaitan dengan konsep bahagi" kerana konsep bahagi adalah mengagihkan sejumlah objek ke dalam beberapa kumpulan dengan bilangan yang sama dan ini sama dengan mengatur 20 orang ke dalam empat baris dengan bilangan yang sama. Seterusnya, beliau menyatakan hasil penyelesaian masalah tersebut adalah setiap baris ada lima orang. kerana beliau membahagikan 20 orang dengan empat baris, iaitu "20 ÷ 4", dan menggunakan sifir 4, iaitu "5 × 4 =20". dengan itu beliau mendapat lima orang dalam satu baris. Menurut beliau, ayat matematik "20 orang ÷ (   ) orang = 4 baris" tidak menggambarkan situasi masalah tersebut kerana ayat matematik itu menggambarkan 20 orang diagihkan secara kumpulan dengan setiap kumpulan ada (   ) orang, dengan itu terbentuk empat baris yang masing-masing mempunyai (   ) orang, sedangkan masalah tersebut meminta kita mencari bilangan murid dalam setiap baris.

Cara penyelesaian masalah penyusunan murid bagi Tong menggunakan kaedah unitari dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (G) Kaedah Unitari.

Terdapat lima daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggunakan gabungan operasi tambah dan darab untuk menyelesaikan soalan (3). Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 5.3(John) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan gabungan operasi tambah dan darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.3 (John): Masalah Melibatkan Pengagihan Wang

P: Boleh cikgu selesaikan masalah ini?
R: Boleh. (Cikgu menulis ayat matematik, "(1 + 5) × RM7").

(1+5) × RM7

P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
R: "1" mewakili Siti dan 5 mewakili 5 orang adik Siti, manakala "RM7" mewakili jumlah wang yang diberikan kepada setiap orang. Simbol "+" mewakili operasi tambah, manakala simbol "×" digunakan untuk mewakili gandaan RM7.

P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya mendapat jumlah bilangan orang dengan menggunakan operasi tambah, iaitu "1 + 5 = 6", yang mana siti dan lima orang adiknya, jumlahnya adalah enam orang. Kemudian, saya menggunakan operasi darab untuk mendapat jumlah wang yang telah bapa berikan kepada keenam-enam adik-beradik, iaitu "(1 + 5) × RM7".
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian begini?
R: Cara ini lebih jelas menunjukkan situasi masalah dan cepat mendapat jawapan.
P: Cuba terangkan.
R: Siti dan 5 orang adiknya diwakili dengan "1 + 5" dan RM7 diulangi beberapa kali diwakili "× RM7". Dengan menggunakan sifir 7, iaitu "6 × 7 =42", saya akan cepat mendapat jawapan .
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?
R: Hasil penyelesaiannya ialah RM 42.
P: Apa yang cikgu faham dengan RM 42?
R: Itu adalah jumlah bilangan wang yang dimiliki oleh Siti dan 5 orang adiknya.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan ini?
R: Mula-mula saya ingin tahu jumlah bilangan anak yang mendapat wang, maka saya menambahkan Siti dan 5 orang adiknya untuk mendapat jumlah bilangan budak, kemudian untuk mendapat jumlah wang yang mereka perolehi, saya pun menggunakan darab. Ini kerana setiap anak memperoleh RM7, dengan itu RM7 berulang beberapa kali. Oleh demikian, saya pun mendarabkan 6 dengan RM 7 untuk mendapat RM 42.
P: Apakah maksud ulang beberapa kali?
R: Ini bermaksud RM 7 digandakan. Gandaan RM 7 bermaksud RM 7 didarabkan dengan bilangan gandaan.
P: Bagaimanakah cikgu mendarab?
R: Saya guna sifir 7, iaitu 6 × 7 = 42.

Cara penyelesaian masalah John ditunjukkan dengan menulis ayat matematik, "(1 + 5) × RM7 = RM42". Beliau menerangkan bahawa 1 mewakili Siti dan 5 mewakili 5 orang adik Siti, manakala RM7 ialah jumlah wang yang diberikan kepada setiap orang, dan simbol "+" digunakan untuk mendapat jumlah bilangan adik beradik itu, manakala simbol "×" digunakan untuk mewakili gandaan RM7. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula beliau mendapat jumlah bilangan orang dengan menggunakan operasi tambah, iaitu "1 + 5 = 6", yang mana siti dan lima orang adiknya, jumlahnya adalah enam orang. Kemudian, beliau menggunakan operasi darab untuk mendapat jumlah wang yang telah bapa berikan kepada keenam-enam orang adik-beradik, iaitu "(1 + 5) × RM7". Beliau menerangkan cara penyelesaian masalah begitu digunakan kerana cara itu lebih jelas menunjukkan situasi masalah dan cepat mendapat jawapan. Beliau menerangkan bahawa berpandukan masalah, Siti dan 5 orang adiknya boleh diwakili dengan “1 + 5” dan RM7 diulang beberapa kali boleh diwakili dengan “× RM7”. Dengan menggunakan sifir 7, iaitu “6 × 7 =42”, beliau akan cepat mendapat hasil penyelesaiannya iaitu RM 42.

Pada kefahaman John, RM42 ialah jumlah bilangan wang yang dimiliki oleh Siti dan 5 orang adiknya. Beliau menerangkan lagi, jawapan ini didapati dengan mendapat jumlah bilangan budak itu terlebih dahulu, kemudian untuk mendapat jumlah wang yang mereka perolehi, beliau menggunakan darab. Ini kerana setiap orang budak memperolehi RM7, dengan itu RM7 berulang beberapa kali. Oleh demikian, beliau pun mendarabkan 6 dengan RM 7 untuk mendapat RM 42. Beliau mengatakan RM7 ulang beberapa kali bermaksud RM7 digandakan, iaitu RM7 didarabkan dengan bilangan gandaan. Beliau mengatakan beliau mendarab dengan menggunakan sifir 7, iaitu 6 × 7 = 42.

Cara penyelesaian masalah John tentang pengagihan wang melibatkan gabungan operasi tambah dan darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (H) Gabungan Operasi Tambah Dan Darab.

Terdapat dua daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggunakan operasi darab untuk menyelesaikan melibatkan pembahgaian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku John dalam Protokol 5.3(John) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan operasi darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.3 (John): Masalah Melibatkan Pengagihan Wang

P: Ada cara lain untuk menyelesaikan masalah ini?
R: Ada. (Cikgu menulis ayat matematik, “6 × RM 7= RM 42” dalam bentuk lazim).

$$\begin{array}{r} \text{RM } 7 \\ \times \quad 6 \\ \hline \text{RM } 42 \\ \hline \end{array}$$

P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu tulis ini?
R: “6” mewakili enam orang budak, iaitu Siti dan lima orang adiknya, “× RM 7” mewakili gandaan RM 7 dan “RM42” mewakili jumlah wang yang diperolehi oleh Siti dan lima orang adiknya.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Saya telah mengetahui masalah itu adalah masalah pendaraban, maka saya terus menulis ayat matematik darab, iaitu “6 × RM 7”, kemudian, dengan menghafal sifir 7, iaitu “6 × 7 = 42” untuk mendapat jawapan RM 42.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian begini?
R: Cara ini senang dan cepat mendapat jawapannya.
P: Mengapakah cikgu cakap begitu?
R: Ini kerana cara ini hanya perlu langkah pengiraan, iaitu menghafal sifir sahaja akan mendapat jawapan.
P: Apakah jawapannya?
R: RM42.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan ini?
R: Saya menghafal sifir 7, iaitu “6 × 7 = 42”.

Lim menunjukkan cara penyelesaian masalahnya dengan menulis ayat matematik, “6 × RM7= RM 42” dalam bentuk lazim. Beliau menerangkan “6” mewakili enam orang budak, iaitu Siti dan lima orang adiknya, “× RM7” mewakili gandaan RM7 dan “RM42” mewakili jumlah wang yang diperolehi oleh Siti dan lima orang adiknya. Lim menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu beliau telah mengetahui masalah itu adalah masalah pendaraban, maka beliau terus menulis ayat matematik darab, iaitu “6 × RM7”, kemudian, dengan menghafal sifir 7, iaitu “6 × 7 = 42” untuk mendapat jawapan RM42. Seterusnya, beliau menyatakan cara penyelesaian sebegitu digunakan kerana cara tersebut senang dan cepat mendapat jawapannya. Beliau menerangkan cara tersebut hanya perlu satu langkah pengiraan, iaitu menghafal sifir sahaja akan mendapat jawapan. Beliau menyatakan dengan cara tersebut, hasil penyelesaiannya ialah RM42. Beliau menerangkan jawapan tersebut didapati dengan menghafal sifir 7, iaitu “6 × 7 = 42”.

Penyelesaian masalah pengagihan wang seperti di atas bagi Lim menggunakan operasi darab, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (I) Operasi Darab.

Seterusnya, terdapat empat daripada enam orang responden menggunakan gabungan operasi tolak dan bahagi untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 5.4(Lim) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan gabungan operasi tolak dan bahagi, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.4 (Lim): Masalah Melibatkan Pengagihan Lolipop

P: Ada cara lain?
R: Ada. (Cikgu menulis ayat matematik, "17 – 2 = 15" dan "15 ÷ 3 = 5").

$17 - 2 = 15$

$15 \div 3 = 5$

P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu lukis ini?
R: "17" mewakili 17 batang lolipop, "2" mewakili bakinya dua batang lolipop, simbol " – " mewakili operasi tolak, "15" mewakili baki 15 batang lolipop , "÷ 3" mewakili lolipop itu diagihkan ke dalam tiga beg plastik dengan bilangan yang sama dan "5" mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula, saya menolakkan 2 daripada 17 terlebih dahulu kerana 2 itu adalah baki, iaitu kuantiti yang tidak cukup diagihkan kepada tiga beg plastik. Ini untuk mendapatkan bilangan lolipop yang diagihkan ke dalam ketiga-tiga beg plastik. Selepas itu, kuantiti itu dibahagikan dengan 3 untuk mendapat jumlah bilangan lolipop dalam setiap beg plastik.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian masalah begini?
R: Cara ini telah biasa digunakan kerana ia cepat untuk mendapat jawapan
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?
R: Setiap beg plastik ada lima batang lolipop.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan ini?
R: Saya menolakkan 17 dengan 2 mendapat bakinya 15, kemudian membahagikan 15 dengan 3 untuk mendapat hasil bahaginya 5. 5 itu mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop.

Lim menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis ayat matematik, "17 – 2 = 15" dan "15 ÷ 3 = 5". Beliau menerangkan "17" mewakili 17 batang lolipop, "2" mewakili bakinya dua batang lolipop, simbol " – " mewakili operasi tolak, “15” mewakili baki 15 batang lolipop , “÷ 3” mewakili lolipop itu diagihkan ke dalam tiga beg plastik dengan bilangan yang sama dan “5” mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula, beliau menolakkan 2 daripada 17 terlebih dahulu kerana 2 itu adalah baki, iaitu kuantiti yang tidak cukup diagihkan kepada tiga beg plastik. Ini untuk mendapatkan bilangan lolipop yang diagihkan ke dalam ketiga-tiga beg plastik. Selepas itu, beliau membahagikan kuantiti tersebut dengan 3 untuk mendapat jumlah bilangan lolipop dalam setiap beg plastik.

Seterusnya, Lim menyatakan cara penyelesaian sebegitu digunakan kerana cara tersebut telah biasa digunakan. Beliau menerangkan cara tersebut cepat untuk mendapat jawapan kerana hanya menggunakan operasi tolak dan operasi bahagi sahaja akan mendapat jawapan. Beliau menyatakan dengan cara tersebut, hasil penyelesaiannya ialah setiap beg plastik ada lima batang lolipop. Beliau menerangkan jawapan tersebut didapati dengan menolakkan 17 dengan 2 mendapat bakinya 15, kemudian membahagikan 15 dengan 3 untuk mendapat hasil bahaginya 5. Beliau menyatakan “5” itu mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop.

Cara penyelesaian masalah pengagihan lolipop bagi Lim menggunakan gabungan operasi tolak dan bahagi, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (J) Operasi Tolak Dan Bahagi.

Dari kajian, didapati hanya ada seorang daripada enam orang responden menggunakan gabungan operasi darab dan tolak untuk menyelesaikan soalan (4). Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 5.4(Lim) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan gabungan operasi darab dan tolak, dan urutan tiga bahagian dalam penggunaan gabungan operasi darab dan tolak untuk menyelesaikan soalan (4).

Protokol 5.4 (Lim)*:* Masalah Melibatkan Pengagihan Lolipop

R: Ada. (Cikgu menulis ayat matematik, “17 ÷ 3 = 5 baki 2”).

17 ÷ 3 = 5 baki 2

P: Boleh cikgu terangkan?
R: Boleh. 17 mewakili 17 batang lolipop, “÷ 3” mewakili lolipop itu diagihkan ke dalam tiga buah beg plastik dengan sama banyak, “5” mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop dan “2” mewakili bakinya.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya menentukan masalah itu adalah masalah pembahagian. Kemudian, mencari maklumat yang diperlukan, iaitu nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. Jumlah lolipop mewakili nombor yang dibahagi dan tiga beg plastik mewakili nombor bahagi. Selepas itu, saya menulis ayat matematik, “17 ÷ 3”, kemudian menghafal sifir 3, iaitu “5 × 3 = 15”, selepas itu. Menolak 15 daripada 17 dapat baki 2.

5 × 3 = 15
17 − 15 = 2

P: Mengapakah 17 dibahagikan 3?
R: Ini kerana 17 batang lolipop diagihkan ke dalam tiga beg plastik dengan bilangan yang sama. Kita ingin cari bilangan lolipop dalam setiap beg plastik, maka perlulah 17 bahagi dengan 3.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian masalah begini?
R: Cara ini lebih cepat untuk mendapat jawapan.
P: Mengapakah cikgu cakap begitu?
R: Saya hanya menghafal sifir 3 dan membuat penolakan untuk mendapat jawapan.
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaiannya?
R: Setiap beg plastik ada lima batang lolipop
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan ini?
R: Saya membahagikan 17 dengan 3, selepas itu saya menghafal sifir 3, kemudian menolak 15 daripada 17 mendapat bakinya 2.
P: Bagaimanakah cikgu tahu jawapan ini adalah betul?
R: Ini kerana saya mendapati bakinya adalah 2. Ini sama dengan situasi yang diberi oleh masalah, iaitu bakinya dua batang lolipop .

Cara penyelesaian Lim melibatkan ayat matematik, “17 ÷ 3 = 5 baki 2”. Beliau menyatakan cara penyelesaiannya dengan menulis ayat matematik, “17 ÷ 3 = 5 baki 2”. Beliau menerangkan 17 mewakili 17 batang lolipop, “÷ 3” mewakili lolipop itu diagihkan ke dalam tiga buah beg plastik dengan sama banyak, “5” mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop dan “2” mewakili bakinya.

Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula beliau menentukan masalah itu adalah masalah pembahagian. Kemudian, beliau mencari maklumat yang diperlukan, iaitu nombor yang dibahagi dan nombor bahagi. Beliau menyatakan jumlah lolipop mewakili nombor yang dibahagi dan tiga beg plastik mewakili nombor bahagi. Selepas itu, beliau menulis ayat matematik, "$17 \div 3$", kemudian menghafal sifir 3, iaitu "$5 \times 3 = 15$". Selepas itu. Beliau menolak 15 daripada 17 dapat baki 2. Beliau menerangkan 17 dibahagikan 3 kerana 17 batang lolipop diagihkan ke dalam tiga beg plastik dengan bilangan yang sama. Beliau menyatakan kita ingin mencari bilangan lolipop dalam setiap beg plastik, maka perlulah 17 bahagi dengan 3.

Seterusnya, Lim menyatakan cara penyelesaian sebegitu digunakan kerana cara ini lebih cepat untuk mendapat jawapan. Beliau menerangkan hanya menghafal sifir 3 dan membuat penolakan akan mendapat jawapan. Beliau menyatakan dengan cara tersebut, hasil penyelesaiannya ialah setiap beg plastik ada lima batang lolipop. Beliau menerangkan jawapan tersebut didapati dengan membahagikan 17 dengan 3 dan menghafal sifir 3, kemudian menolak 15 daripada 17 mendapat bakinya 2. Beliau menjustifikasikan jawapan tersebut dengan menyatakan baki pembahagian itu adalah 2, yang mana sama dengan situasi yang diberi oleh masalah, iaitu bakinya dua batang lolipop.

Penyelesaian masalah pengagihan lolipop menggunakan cara operasi darab dan tolak bagi Lim dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (K) Operasi Darab Dan Tolak.

Selain itu, daripada kajian didapati hanya seorang daripada enam orang responden menggunakan gabungan operasi darab dan tambah untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Chong dalam Protokol 5.4(Chong) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan gabungan operasi darab dan tambah, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.4 (Chong): Masalah Melibatkan Pengagihan Lolipop

P: Mengapakah cikgu terus membahagi 17 dengan 3, tetapi tidak mempertimbangkan baki 2?

R: Saya terus membahagi 17 dengan 3 untuk memastikan bakinya adalah 2. Jika bakinya 2, bermakna jawapan itu adalah betul.(Cikgu menulis ayat matematik, "3 × 5 + 2 =17"). Saya semak semula dengan mendarabkan tiga dengan lima, kemudian, tambah dua untuk menentukan jawapannya 17. Jika jawapannya bukan 17 maka cara penyelesaian atau cara pengiraan saya mungkin salah. Saya perlu buat semula atau guna cara lain.

$$3 \times 5 + 2 = 17.$$

P: Bagaimana cikgu menggunakan ayat matematik, "3 × 5 + 2 =17" untuk menyemak jawapan?

R: 3 mewakili tiga beg plastik, 5 mewakili lima batang lolipop dalam setiap beg plastik, simbol "×" mewakili gandaan, 2 mewakili baki dan 17 mewakili jumlah lolipop yang ada. Dengan mendarabkan lima dengan tiga akan mendapat jumlah lolipop dalam ketiga-tiga beg plastik, kemudian menambah dua batang lolipop untuk mendapat jumlah keseluruhan lolipop yang diberi.

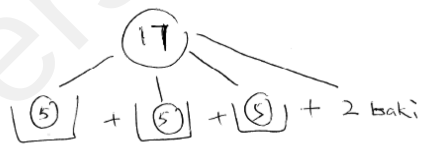
Chong menggunakan gabungan operasi darab dan tambah untuk menyemak jawapan. Beliau terus membahagi 17 dengan 3, tetapi tidak mempertimbangkan baki 2 kerana beliau ingin memastikan bakinya adalah 2. Beliau menerangkan lagi, jika bakinya 2, bermakna jawapan itu adalah betul. Beliau menulis ayat matematik, "3 × 5 + 2 =17" dan menerangkan beliau menyemak jawapan dengan mendarabkan tiga dengan lima kemudian tambah dua, untuk menentukan jawapannya 17. Beliau menyatakan jika jawapannya bukan 17 maka cara penyelesaian atau cara pengiraannya mungkin salah, maka beliau perlu buat semula atau guna cara lain. Beliau menjelaskan ayat matematik, "3 × 5 + 2 =17" digunakan untuk menyemak jawapan, yang mana 3 mewakili tiga beg plastik, 5 mewakili lima batang lolipop dalam setiap beg plastik, simbol "×" mewakili gandaan, 2 mewakili baki dan 17 mewakili jumlah lolipop yang ada. Dengan mendarabkan lima dengan tiga akan mendapat jumlah lolipop dalam ketiga-tiga beg plastik, kemudian menambah dua batang lolipop untuk mendapat jumlah keseluruhan lolipop yang diberi.

Penyelesaian masalah Chong tentang pengagihan lolipop melibatkan gabungan operasi darab dan tambah, dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (L) Gabungan Operasi Darab Dan Tambah.

Akhirnya, daripada kajian ini didapati hanya seorang daripada enam orang responden menggunakan cerakin nombor untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat. Sebagai contoh, tingkah laku Lim dalam Protokol 5.4(Lim) menunjukkan cara penyelesaian masalah melibatkan cerakin nombor, dan dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian.

Protokol 5.4 (Lim): Masalah Melibatkan Pengagihan Lolipop

P: Ada cara lain?
R: Ada. (Cikgu menulis “17”, kemudian melukis empat garis lurus. Dengan tiga garis lurus menuju ke tiga buah bekas dan di dalam setiap bekas dituliskan “5” dan garis lurus keempat menuju ke “2” dan di antara bekas-bekas dan “2” ada simbol “+”).



P: Boleh cikgu terangkan apa yang cikgu lukis ini?
R: “17” mewakili 17 batang lolipop, “2” mewakili bakinya dua batang lolipop, simbol “ +” mewakili operasi tambah, “5” mewakili setiap bekas ada 5 batang lolipop , tiga buah bekas mewakili tiga buah beg plastik dan “5” mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop.
P: Bagaimanakah cikgu menyelesaikan masalah ini?
R: Mula-mula saya menulis “17” mewakili 17 batang. Kemudian, saya mengira secara mental aritmetik, iaitu “17 = 5 + 5 + 5 + 2”.
P: Mengapakah cikgu menggunakan cara penyelesaian masalah begini?
R: Cara ini juga cepat untuk mendapat jawapan kerana ia hanya melibatkan operasi tambah.
P: Oleh itu, apakah hasil penyelesaian cikgu?
R: Setiap beg plastik ada lima batang lolipop.
P: Bagaimanakah cikgu mendapat jawapan ini?
R: Saya mengasingkan17 kepada tiga 5 dan satu 2.
P: Mengapakah cikgu buat begitu?

R: Saya telah tahu bakinya 2, maka 17 perlu keluarkan 2 dan tinggal 15 dan 15 perlu diagihkan kepada tiga kumpulan dengan sama banyak. Saya telah tahu15 ada tiga 5, maka setiap bekas ada 5.
P: Bagaimanakah cikgu tahu15 ada tiga 5?
R: Saya telah tahu "5 + 5 + 5 = 15". Ini telah biasa saya lihat dan ajar murid. Oleh itu, ia secara automatik keluar dari otak saya.

Lim menunjukkan cara penyelesaiannya dengan menulis "17", kemudian melukis empat garis lurus, dengan tiga garis lurus menuju ke tiga buah bekas dan di dalam setiap bekas dituliskan "5" dan garis lurus keempat menuju ke "2" dan di antara bekas-bekas ada simbol "+". Beliau menerangkan "17" mewakili 17 batang lolipop, "2" mewakili bakinya dua batang lolipop, simbol "+" mewakili operasi tambah, "5" mewakili setiap bekas ada 5 batang lolipop , tiga buah bekas mewakili tiga buah beg plastik dan "5" mewakili setiap beg plastik ada lima batang lolipop. Beliau menerangkan cara penyelesaiannya, iaitu mula-mula beliau menulis "17" mewakili 17 batang lolipop. Kemudian, beliau mengira secara mental aritmetik, iaitu "17 = 5 + 5 + 5 + 2".

Seterusnya, Lim menyatakan cara penyelesaian sebegitu digunakan kerana cara tersebut juga cepat untuk mendapat jawapan, yang mana ia hanya melibatkan operasi tambah. Beliau menyatakan dengan cara tersebut, hasil penyelesaiannya ialah setiap beg plastik ada lima batang lolipop. Beliau menerangkan jawapan tersebut didapati dengan mengasingkan 17 kepada tiga 5 dan satu 2. Lim menerangkan lagi, beliau telah mengetahui bakinya 2, maka 17 perlu keluarkan 2 dan tinggal 15 dan 15 perlu diagihkan kepada tiga kumpulan dengan bilangan yang sama. Lim menyatakan lagi, beliau telah mengetahui 15 ada tiga 5, maka setiap bekas ada 5 kerana beliau mengetahui "5 + 5 + 5 = 15". Persamaan itu telah biasa beliau melihat dan mengajar murid. Oleh itu, secara automatik ia akan keluar dari otaknya.

Cara penyelesaian masalah pengagihan lolipop menggunakan cerakin nombor bagi Lim dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan dan hasil yang diharapkan, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.17 (M) Cerakin Nombor.

Pada kesimpulannya, guru Matematik Tahun Enam mempunyai 13 cara dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.30, iaitu kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, pembahagian panjang, kaedah unitari, operasi tambah berulang, gabungan operasi tambah dan darab, songsangan darab, operasi darab, gabungan operasi darab dan tolak, gabungan operasi darab dan tambah,cerakin nombor, dan gabungan operasi tolak dan bahagi. Kaedah pengukuran tersebut dibahagikan kepada tiga bahagian, iaitu garis nombor, bahan konkrit dan jadual; manakala kaedah pemetakan tersebut dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu gambar rajah dan angka. Didapati kaedah pemetakan adalah dominan kerana kesemua guru menggunakan cara penyelesaian ini. Selain itu kaedah pengukuran, pembahagian panjang, dan gabungan operasi tambah dan darab, adalah cara penyelesaian masalah yang kedua banyak responden menggunakannya, iaitu sebanyak lima daripada enam orang. Seterusnya, cara penyelesaiannya yang ketiga banyak melibatkan empat daripada enam orang responden adalah operasi tambah berulang, operasi tolak berulang, dan gabungan operasi tolak dan bahagi. Akhirnya, cara penyelesaian yang paling kurang responden gunakan hanya melibatkan seorang responden sahaja ialah kaedah unitari, songsangan darab, gabungan operasi darab dan tolak, dan cerakin nombor.

Rumusan

Bab ini menjelaskan hasil kajian dianalisis merentasi kes bagi enam orang guru Matematik tahun Enam tentang gambaran mental, perwakilan, makna, cara penaakulan dan cara penyelesaian masalah yang mereka dimiliki tentang pembahagian nombor bulat. Hasil kajian tersebut menunjukkan responden tersebut mempunyai gambaran mental, perwakilan, makna, cara penaakulan dan cara penyelesaian masalah berbeza tentang pembahagian nombor bulat. Bab ini juga menjelaskan tema-tema yang dikenal pasti bagi analisis merentas kes. Setiap tema telah disusun dalam jadual analisis dan dikelaskan mengikut kategori, perkara dalam kategori dan huraian bagi setiap perkara, serta responden yang mempunyai perkara dan kategori tersebut. Bab berikutnya akan mentafsir hasil kajian dalam hubungannya dengan himpunan pengetahuan teori dan praktikal yang dibentangkan dalam Bab Dua, mensintesiskan hasil kajian tersebut kepada pernyataan yang lebih umum, dan mengenal pasti aliran dan isu dalam pendidikan Matematik yang ditimbulkan oleh kajian yang dijalankan.

BAB 5: PERBINCANGAN, KESIMPULAN DAN IMPLIKASI

Pengenalan

Bab ini mengandungi empat perkara utama, iaitu ringkasan kajian, perbincangan hasil kajian, kesimpulan, dan implikasi kajian. Ringkasan kajian memberikan gambaran secara menyeluruh tentang perkara yang terkandung dalam Bab Satu, Dua, dan Tiga dengan ringkas, padu, dan padat. Seterusnya, perbincangan hasil kajian adalah interpretasi ringkasan hasil kajian bagi pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat yang dibincangkan dengan merujuk soalan kajian dan tinjauan literatur yang relevan. Selain itu, kesimpulan terdapat cadangan refleksi sebelum, semasa, dan selepas kajian yang membawa mesej yang bermakna. Akhirnya, implikasi kajian melibatkan tiga bahagian, iaitu implikasi kepada amalan pendidikan, implikasi kepada teori dan implikasi kepada kajian lanjutan berdasarkan hasil kajian dan tinjauan literatur yang relevan.

Ringkasan Kajian

Tujuan kajian ini adalah untuk mengenal pasti pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Secara lebih khusus, kajian ini dijalankan untuk mengkaji: (a) gambaran mental yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat; (b) cara guru matematik Tahun Enam mewakili pembahagian nombor bulat melibatkan ayat matematik bahagi dan gambar rajah selanjar dan diskret; (c) makna yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat; (d) cara penaakulan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam untuk menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat; dan (e) cara guru matematik Tahun Enam menyelesaikan masalah melibatkan pembahagian nombor bulat.

Lima jenis tugasan mengenai pemahaman tentang pembahagian nombor bulat diberikan kepada enam orang guru secara seorang demi seorang melalui lima sesi temu duga klinikal bagi tempoh enam bulan. Bagi mendapat respons terhadap tugasan yang diberikan, lima situasi bermasalah yang berbeza masing-masing disediakan dalam konteks gambaran mental, konteks perwakilan, konteks makna, konteks penaakulan, dan konteks penyelesaian masalah. Analisis dan interpretasi tingkah laku guru berdasarkan temu duga klinikal yang dirakam melalui perakam video, dokumen seperti hasil tugasan guru, dan catatan pengkaji melalui pemerhatian langsung tingkah laku guru. Rakaman video dianalisis selepas semua temu duga klinikal selesai dijalankan. Analisis data bagi pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat kes demi kes dibentangkan dengan satu rumusan menyeluruh dibentangkan sebagai Lampiran B dalam bentuk elektronik. Seterusnya, analisis merentas kajian kes dijalankan dan dibentangkan sebagai Bab Empat. Analisis merentas kajian kes merupakan analisis konseptual yang dijalankan dan ia berguna untuk perbincangan dan rumusan akhir dalam bab ini.

Reka bentuk kajian ini menggunakan kajian kes dan membabitkan kes interpretasi, dalam mana pemahaman guru dalam konteks tertentu diperoleh dari perspektif guru sendiri. Tinjauan literatur yang digunakan sebahagian besar kajian lepas melibatkan pemahaman tentang pembahagian tertumpu pada pemahaman tentang sifar, pecahan, dan nombor bulat murid, guru pelatih dan guru terlatih.

Dalam kajian ini, pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat memberi tumpuan terhadap aspek kognitif, iaitu pembinaan secara aktif berasaskan pengalaman yang merujuk kepada deria, pengabstrakan empiris, dan pengabstrakan reflektif. Oleh itu, teori mengetahui, iaitu konstruktivisme radikal yang mampu menjelaskan persoalan "bagaimanakah seseorang individu membina pengetahuan dan menggunakan pengetahuan dalam konteks tertentu?” boleh dijadikan sebagai rangka teori dalam kajian ini.

Perbincangan Hasil Kajian

Dalam bahagian ini, perbincangan tentang hasil kajian dibuat dalam konteks soalan kajian. Sehubungan itu, ringkasan hasil kajian yang diberikan sebelum ini dibuat interpretasi dengan mengambil kira beberapa kajian lepas yang telah ditinjau dalam Bab 2 agar ia membawa makna bagi hasil kajian.

Soalan 1: Apakah gambaran mental yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat?

Dalam kajian pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental, kajiannya melibatkan gambaran mental bagi nombor bulat, nombor lapan, nombor dua belas, sifar, tiada apa-apa dan kosong, bahagi, dan ayat matematik bahagi melibatkan “lapan bahagi empat”, “dua belas bahagi tiga”, dan “lima bahagi dua”.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental bagi perkataan “nombor bulat” dirumuskan kepada tiga kategori, iaitu penjelasan secara simbolik, penjelasan secara konseptual, dan penjelasan secara prosedural. Penjelasan secara simbolik dan konseptual merupakan tingkah laku yang dominan dalam kalangan guru matematik Tahun Enam apabila memberi gambaran secara spontan tentang nombor bulat. Berdasarkan kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam melibatkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Penjelasan secara simbolik*. Semua guru matematik Tahun Enam cenderung menulis angka dan mewakili dengan angka apabila menggambarkan nombor bulat. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam aktif mewakilkan semula pengalaman sedia ada atau empiris dengan serta-merta.

b. *Penjelasan secara konseptual*. Semua guru matematik Tahun Enam menyatakan nombor bulat dengan menggunakan pengetahuan konseptual seperti nombor bulat ialah sejenis nombor, perwakilan bagi kuantiti objek, alat untuk membilang, nombor bermula dari 0, ciri nombor, nilai tempat, dan sistem perpuluhan dengan serta merta. Ciri nombor tersebut melibatkan nombor bulat bukan perpuluhan, pecahan dan ayat matematik; nombor bulat adalah sebahagian daripada nombor bercampur; dan nombor bulat mewakili objek yang lengkap. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan konseptual dan empiris untuk menggambarkan semula nombor bulat.

c. *Penjelasan secara prosedural.* Terdapat seorang daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggambarkan nombor bulat sebagai satu cara belajar matematik, iaitu nombor bulat adalah asas untuk belajar matematik sebelum mempelajari pecahan, perpuluhan dan sebagainya. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam boleh berfikir berperingkat dan bersistematik yang berkaitan dengan pembelajaran nombor bulat.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental bagi nombor lapan dan dua belas dirumuskan kepada lima kategori, iaitu penjelasan secara simbolik, penjelasan secara figuratif, penjelasan secara konseptual, penjelasan secara praktikal dan penjelasan secara prosedural. Penjelasan secara simbolik dan konseptual merupakan tingkah laku yang dominan dalam kalangan guru matematik Tahun Enam apabila memberi gambaran secara spontan tentang nombor bulat. Berdasarkan kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam melibatkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Penjelasan secara simbolik*. Semua guru matematik Tahun Enam cenderung menulis angka dan perkataan apabila menggambarkan nombor lapan dan dua belas. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam mewakilkan semula pengalaman sedia ada atau empiris tentang nombor lapan dan dua belas dengan serta-merta.

b. *Penjelasan secara figuratif*. Terdapat dua daripada enam orang guru matematik Tahun Enam terus menggambarkan nombor lapan dan dua belas dalam bentuk tertentu. Bentuk tersebut seperti gabungan dua sifar, dua bulatan atau laluan jalan berbentuk 8 untuk menggambarkan nombor lapan. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam secara terus menggambarkan nombor berdasarkan pengetahuan mereka tentang ciri bentuk nombor tersebut.

c. *Penjelasan secara konseptual*. Semua guru matematik Tahun Enam menyatakan nombor bulat dengan menggunakan pengetahuan konseptual seperti nombor bulat adalah kuantiti objek yang sama jenis, tertib nombor, nombor genap, nombor boleh dibundarkan kepada nilai terdekat, sesuatu nombor menjadi faktor bagi nombor yang lain, gandaan bagi nombor digunakan untuk membina sifir, nombor mewakili nilai wang, dan nombor mempunyai nilai tempat dengan serta merta. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan konseptual dan empiris untuk menggambarkan semula nombor bulat.

d. *Penjelasan secara praktikal*. Terdapat empat daripada enam orang guru matematik Tahun Enam semua guru menggambarkan nombor bulat dengan berdasarkan pengalaman yang melibatkan peristiwa, kepercayaan. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengalaman sedia ada dan praktikal kehidupan harian untuk menggambarkan semula nombor bulat.

e. *Penjelasan secara prosedural.* Terdapat dua daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggambarkan nombor bulat berdasarkan pengetahuan prosedural, seperti nombor boleh diagihkan secara kumpulan dengan kuantiti yang sama, dan nombor boleh dicerakinkan. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam boleh berfikir secara berperingkat dan bersistematik yang berkaitan dengan nombor bulat.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental bagi sifar dirumuskan kepada tiga kategori, iaitu penjelasan secara simbolik, penjelasan secara figuratif, dan penjelasan secara konseptual. Berdasarkan kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam melibatkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Penjelasan secara simbolik*. Semua guru matematik Tahun Enam cenderung menulis angka, perkataan dan simbol apabila menggambarkan sifar. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam mewakilkan semula pengalaman sedia ada tentang sifar dengan serta-merta.

b. *Penjelasan secara figuratif*. Terdapat empat daripada enam orang guru matematik Tahun Enam terus menggambarkan sifar dalam bentuk tertentu, contohnya, sifar berbentuk bujur bukan bulat, dan bentuk sifar macam objek bulat, seperti kanta, roda kereta, donat, dan telur. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam secara terus menggambarkan sifar berdasarkan pengetahuan sedia ada tentang ciri bagi bentuk sifar.

c. *Penjelasan secara konseptual*. Semua guru matematik Tahun Enam menggambarkan sifar dengan menggunakan pengetahuan konseptual dengan serta merta seperti sifar digunakan dalam sistem nombor; sifar mewakili tiada apa-apa, seperti set kosong, tangan kosong, dan sifar inflasi; sifar merupakan titik permulaan seperti membilang dan melabel garis nombor bermula dari sifar. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan konseptual dan empiris untuk menggambarkan semula sifar.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental bagi kosong dirumuskan kepada dua kategori, iaitu penjelasan secara simbolik dan penjelasan secara konseptual. Berdasarkan kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam melibatkan ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Penjelasan secara simbolik*. Empat daripada enam orang guru matematik Tahun Enam cenderung menulis angka dan perkataan apabila menggambarkan kosong dengan serta merta, seperti kosong untuk bacaan kepada angka "0", dan kosong diwakili dengan perkataan "kosong". Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam mewakilkan semula pengalaman sedia ada tentang kosong dengan serta-merta.

b. *Penjelasan secara konseptual*. Semua guru matematik Tahun Enam menggambarkan kosong dengan menggunakan pengetahuan konseptual dengan serta merta seperti kosong mewakili tiada apa-apa objek dalam sesuatu ruang atau bekas, contohnya dalam kotak tiada objek; kosong mewakili kuantiti, seperti kosong markah. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan konseptual dan empiris untuk menggambarkan semula kosong. Nampaknya guru cuba mengaitkan kosong dengan sifar yang mana kedua-dua juga digambarkan sebagai tiada apa-apa, dan mewakili angka “0”.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental bagi tiada apa-apa dirumuskan kepada dua kategori, iaitu penjelasan secara simbolik dan penjelasan secara konseptual. Berdasarkan kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam melibatkan ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Penjelasan secara simbolik*. Seorang daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggambarkan “tiada apa-apa” dengan angka, iaitu angka “0”. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam mewakilkan semula pengalaman sedia ada tentang “tiada apa-apa” dengan serta-merta. Pada anggapan mereka angka “0” mewakili tiada apa-apa.

b. *Penjelasan secara konseptual*. Semua guru matematik Tahun Enam menggambarkan “tiada apa-apa” dengan menggunakan pengetahuan konseptual dengan serta merta seperti “tiada apa-apa” mewakili kosong, contohnya sesuatu bekas atau ruang tidak diisi objek atau objek telah habis digunakan, beg tangan tiada barang di dalamnya, dan gelas tiada air. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan konseptual dan empiris untuk menggambarkan semula “tiada apa-apa”. Bagi guru matematik Tahun Enam, sifar, kosong dan tiada apa-apa adalah sama, iaitu ketiga-tiga juga mewakili angka “0”, serta sifar dan kosong juga mewakili tiada apa-apa.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental bagi bahagi dirumuskan kepada dua kategori, iaitu penjelasan secara simbolik, dan penjelasan secara prosedural. Penjelasan secara simbolik merupakan tingkah laku yang dominan dalam kalangan guru matematik Tahun Enam apabila memberi gambaran secara spontan tentang bahagi. Berdasarkan kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam melibatkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Penjelasan secara simbolik*. Semua guru matematik Tahun Enam cenderung menulis simbol dan angka apabila menggambarkan bahagi. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam mewakilkan semula pengalaman sedia ada atau empiris tentang bahagi dengan serta-merta.

b. *Penjelasan secara prosedural.* Terdapat lima orang guru matematik Tahun Enam menggambarkan bahagi berdasarkan pengetahuan prosedural, seperti pembahagian dengan kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan dengan serta merta. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam terus berfikir ke arah cara melakukan aktiviti bahagi.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan gambaran mental bagi ayat matematik bahagi seperti "dua belas bahagi tiga" dan "lima bahagi dua" dirumuskan kepada dua kategori, iaitu penjelasan secara simbolik, dan prosedural. Berdasarkan kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam melibatkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Penjelasan secara simbolik*. Semua guru matematik Tahun Enam cenderung menulis angka, perkataan dan ayat matematik apabila menggambarkan ayat matematik bahagi. Tingkah laku ini menunjukkan bahawa guru matematik

Tahun Enam mewakilkan semula pengalaman sedia ada atau empiris tentang ayat matematik bahagi dengan serta-merta.

b. *Penjelasan secara prosedural.* Semua guru matematik Tahun Enam menggambarkan nombor bulat berdasarkan pengetahuan prosedural, seperti pembahagian dengan kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan, dan operasi tolak berulang dengan serta merta. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam berfikir berdasarkan pengalaman sedia ada dan konsep, serta melakukan pengagihan secara berperingkat dan sistematik yang berkaitan dengan ayat matematik.

Secara keseluruhannya, gambaran mental mengenai pembahagian nombor bulat yang melibatkan nombor bulat, nombor nombor lapan, nombor dua belas, sifar, kosong, tiada apa-apa, bahagi, lapan bahagi empat, dua belas bahagi tiga, dan lima bahagi dua, dikelaskan kepada lima kategori, iaitu simbolik, konseptual, prosedural, praktikal, dan figuratif, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.1. Kategori simbolik melibatkan 4 aspek, iaitu angka, perkataan, simbol dan ayat matematik, manakala kategori konseptual melibatkan 16 aspek, iaitu kuantiti, sejenis nombor, nombor bermula dari 0, ciri nombor, tertib nombor, nombor genap, pembundaran, faktor bagi nombor, gandaan, sistem pernomboran, alat membilang, tiada apa-apa, titik permulaan, nilai wang, nilai tempat, dan kosong. Selain itu, kategori prosedural melibatkan tujuh aspek, iaitu cara belajar matematik, pembahagian dengan kaedah pengukuran tanpa mengambil kira baki, pembahagian dengan kaedah pengukuran mengambil kira baki, pembahagian dengan kedah pemetakan tanpa mengambil kira baki, pembahagian dengan kaedah pemetakan mengambil kira baki, cerakin nombor dan operasi tolak berulang. Seterusnya, kategori figuratif hanya melibatkan aspek bentuk. Akhirnya, kategori praktikal melibatkan tiga aspek, iaitu peristiwa, kepercayaan dan perkara khusus.

Dalam kajian ini, kategori penjelasan secara simbolik, konseptual dan prosedural adalah dominan kerana semua responden memberikan gambaran mental melibatkan ketiga-tiga kategori ini, manakala kategori figuratif adalah sederhana kerana hanya ada lima daripada enam orang responden memberikan gambaran mental melibatkan kaategori ini. Akhirnya, kategori praktikal adalah paling kurang kerana hanya empat orang daripada enam orang responden memberikan gambaran mental melibatkan kategori ini.

Soalan 2: Bagaimanakah guru matematik Tahun Enam mewakili pembahagian nombor bulat melibatkan ayat matematik bahagi, dan gambar rajah selanjar?

Guru matematik Tahun Enam mewakili pembahagian nombor bulat melibatkan ayat matematik bahagi dan gambar rajah. Perwakilan ayat matematik bahagi membabitkan ayat matematik bahagi diwakili secara gambar rajah, aktiviti dan cerita, manakala perwakilan gambar rajah melibatkan gambar rajah selanjar dan diskret diwakili dengan ayat matematik dan cerita.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam membabitkan perwakilan ayat matematik bahagi dalam konteks mewakili ayat matematik: “6 ÷ 2”, “7 ÷ 3”, “5 ÷ 5”, “0 ÷ 2”, “4 ÷ 0” dan “0 ÷ 0”, dengan menggunakan pengetahuan nombor dan konsep bahagi yang dimiliki oleh guru, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.2. Sehubungan itu, guru matematik Tahun Enam memberikan penjelasan tentang tindakan yang diambil untuk mewakilkan ayat matematik bahagi dan perkara itu dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.3.

Penjelasan tentang tindakan yang diambil untuk mewakilkan ayat matematik dirumuskan kepada empat kategori, iaitu perwakilan secara figuratif, perwakilan secara operatif, perwakilan secara prosedural dan perwakilan secara simbolik. Dalam pada itu, perwakilan secara prosedural dan simbolik merupakan tingkah laku yang dominan dalam kalangan guru matematik Tahun Enam apabila menentukan ayat matematik bahagi. Berdasarkan kepada kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam membabitkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Perwakilan secara figuratif*. Terdapat empat daripada enam orang guru matematik Tahun Enam menggambarkan suatu ayat matematik bahagi yang spesifik, kemudian melukis dan menunjukkan dengan bahan konkrit mengenai gambar rajah tersebut. Hal ini menunjukkan suatu perwakilan ikonik dalam mana-mana rajah ayat matematik bahagi yang dilukis atau ditunjukkan oleh guru matematik Tahun Enam boleh diperhatikan secara langsung.

b. *Perwakilan secara operatif*. Terdapat dua daripada enam orang guru matematik Tahun Enam mewakilkan suatu ayat matematik yang spesifik secara memanipulatif anggota badan atau bahasa badan berdasarkan ayat matematik bahagi seperti ayat matematik bahagi yang melibatkan sifar, kosong atau tiada apa-apa objek. Hal ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam membina semula ayat matematik bahagi yang pernah melalui pengalaman motor deria sebelumnya. Sehubungan itu, guru matematik Tahun Enam mewakilkan semula konsepsi tentang ayat matematik bahagi berdasarkan ciri khusus bagi nombor atau situasi yang diketahuinya.

c. *Perwakilan secara prosedural*. Semua guru matematik Tahun Enam mewakilkan suatu ayat matematik bahagi yang spesifik berdasarkan pengetahuan prosedural yang melibatkan bahan konkrit dan gambar rajah. Bahan konkrit tersebut melibatkan kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, dan susun atur; manakala gambar rajah melibatkan kaedah pengukuran, kaedah pemetakan dan kaedah analogi. Hal ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam membuat visualisasi dengan bahan konkrit dan gambar rajah mewakili ayat matematik bahagi yang spesifik secara berperingkat dan bersistematik secara serta-merta supaya boleh diwakilkan secara figuratif dan pada masa yang sama memastikan bahawa ayat matematik bahagi yang diwakili itu suatu bentuk atau situasi yang dikenal pasti secara operasi mental membabitkan hubungan konseptual tertentu.

d. *Perwakilan secara simbolik.* Semua guru matematik Tahun Enam mewakilkan suatu ayat matematik bahagi yang spesifik berdasarkan pengetahuan sedia ada dan empiris yang melibatkan angka dan perkataan. Angka melibatkan bentuk pecahan, pembahagian panjang, dan tolak berulang, manakala perkataan melibatkan cerita berayat. Hal ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam membuat visualisasi dengan angka dan perkataan mewakili ayat matematik bahagi yang spesifik berdasarkan konsepsi dan pengetahuan sedia ada.

Penjelasan tentang perwakilan ayat matematik bahagi dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian adalah seperti di bawah:

(a) S*ituasi yang diasimilasikan oleh responden*.
Responden membuat asimilais tentang situasi yang melibatkan ayat matematik bahagi, $a \div b = c$, yang mana a diasimilasikan sebagai jumlah objek/selang/garisan, pengangka, nombor yang dibahagi, dan b sebagai saiz kumpulan, bilangan kumpulan objek/selang/garisan, kuantiti objek yang dikeluarkkan, penyebut, nombor bahagi, dan c sebagai bilangan kumpulan, kuantiti objek/selang/garisan, bilangan kali objek dengan kuantiti yang sama dikeluarkan, hasil bahagi. Hal ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam membuat pentafsiran masalah yang diberi dan membentuk

atau menghasilkan matlamat khusus yang kemudiannya mengarahkan dan menyelaraskan bahagian kedua, dengan pengabstrakan empirik yang membabitkan pengabstrakan tentang ciri pembahagian nombor bulat daripada ayat matematik bahagi yang diberi atau pengabstrakan corak (pola) figuratif bagi pembahagian nombor bulat daripada pengalaman motor deria. Bahagian pertama ini membolehkan responden mengecam atau mengenal pasti keadaan permulaan sebagai suatu situasi yang membolehkannya menjalankan tindakan (aktiviti fizikal atau figuratif) atau operasi (aktiviti mental atau operatif) tertentu terhadap pembahagian nombor bulat (Piaget, 1977). Asimilasi yang dibentuk menunjukkan responden mengingat kembali pengalamannya tentang pembahagian nombor bulat dan mereka mengaitkan skim berkaitan pembahagian nombor bulat terbentuk pada masa lalunya (Nik Azis, 1999).

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.
Responden melukis gambar rajah, menulis algoritma, menyusun atau mengagih bahan konkrit, dan mereka cerita untuk mewakili ayat matematik bahagi melibatkan: kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, kaedah susun atur, tolak berulang, pecahan, garis nombor, analogi, algoritma pembahagian panjang, dan manipulatif bahan konkrit. Ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam menjalankan aktiviti membabitkan tindakan motor deria yang melibatkan bahan deria, dan pergerakan motor, dan operasi pemikiran, yang mana responden menggunakan pengetahuan sedia ada tentang pembahagian nombor bulat mewakilkan ayat matematik bahagi, $a \div b = c$ dengan pelbagai cara setelah situasi masalah pembahagian nombor bulat telah diasimilasikan di bahagian pertama (Nik Azis 1999).

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.
Hasil yang diharapkan oleh responden termasuk gambar rajah, susunan atau agihan bahan konkrit, bilangan kali kuantiti yang sama dikeluarkan, pecahan, bilangan selang, kuantiti objek/selang/garisan dalam satu kumpulan, bilangan kumpulan dan cerita yang mewakili ayat matematik bahagi, $a \div b = c$. Ini menunjukkan responden mempunyai pelbagai pola pemikiran tentang perwakilan ayat matematik bahagi, $a \div b = c$. Dalam bahagian ini, responden berusaha mengintegrasikan hasil diperoleh ke dalam hasil yang dijangka (matlamat yang dijangka) (Nik Azis, 1999)

Pemahaman guru matematik Tahun Enam dalam perwakilan gambar rajah selanjar dan diskret. Bagi gambar rajah selanjar melibatkan gambar 15 jalur diasingkan tiga-tiga dengan garis putus-putus, garis nombor yang dilabelkan dari angka 0 hingga 20 dan anak panah melengkung dilukis dari 20 ke 15, 15 ke 10, 10 ke 5, dan 5 ke 0, garis nombor yang dilabelkan dari angka 0 hingga 8 dan panah melengkung dilukis dari 8 ke 5, kemudian 5 ke 2; manakala gambar rajah diskret melibatkan gambar lapan ekor arnab yang dibulatkan dua-dua, 12 buah bekas disusun tiga-tiga dalam lajur dengan lajur pertama dan ketiga berlorek dan lajur kedua dan keempat tidak berlorek dan gambar sembilan bulatan disusun empat-empat dalam lajur dan lajur ketiga hanya ada satu bulatan. Perwakilan tersebut menggunakan pengetahuan nombor dan konsep operasi aritmetik serta pengalaman sedia ada yang dimiliki oleh guru, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.4 Sehubungan itu, guru matematik Tahun Enam memberikan penjelasan tentang tindakan yang diambil untuk mentafsirkan gambar selanjar dan diskret dan perkara itu dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.5.

Perwakilan tentang gambar rajah selanjar dan diskret, dan diterjemahkan dalam bentuk ayat matematik dirumuskan dalam satu kategori sahaja, iaitu perwakilan secara simbolik. Dalam pada itu, perwakilan secara simbolik merupakan tingkah laku yang dominan dalam kalangan guru matematik Tahun Enam apabila mentafsirkan gambar rajah dalam bentuk selanjar dan bentuk diskret. Berdasarkan kepada kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam membabitkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

Perwakilan secara simbolik. Semua guru matematik Tahun Enam mentafsirkan gambar rajah dalam bentuk selanjar dan bentuk diskret yang spesifik dan diterjemahkan dalam bentuk ayat matematik berdasarkan konsepsi, pengetahuan sedia ada dan empiris dirumuskan kepada satu kategori sahaja yang melibatkan angka dan perkataan. Ayat matematik dalam bentuk angka melibatkan kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, operasi darab, operasi tambah berulang, mencari beza antara kumpulan lengkap dan baki, operasi tolak, operasi tolak berulang, gabungan operasi tolak dan bahagi, gabungan operasi darab dan tambah, gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurung, manakala ayat matematik dalam bentuk perkataan melibatkan kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan. Hal ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan sedia ada dan empiris serta konsepsi untuk mentafsirkan gambar rajah dalam bentuk selanjar dan diskret yang spesifik. Di samping itu, pemerhatian dan penggunaan pancaindera dijadikan tindakan utama apabila menjalankan pentafsiran tersebut.

Penjelasan tentang perwakilan gambar rajah selanjar dan diskret dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian adalah seperti di bawah:

(a) S*ituasi yang diasimilasikan oleh responden*.

Responden membuat asimilais tentang situasi yang melibatkan susunan atau agihan objek atau bahagian dalam gambar rajah selanjar dan diskret dengan:

(i) ayat matematik bahagia, $a \div b = c$ baki d. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang pembahagian pada masa lalu membabitkan keadah pengukuran dan kaedah pemetakan untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan jumlah bilangan objek/bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang dibahagi, a; kuantiti objek/bahagian atau bilangan kumpulan objek/bahagian yang diagihkan diasimilasikan sebagai nombor bahagi, b; bilangan kumpulan atau kuantiti objek dalam setiap kumpulan yang didapati diasimilasikan sebagai hasil bahagi, c; dan bahagian/objek yang tidak cukup membentuk satu kumpulan diasimilasikan sebagai baki, d;

(ii) ayat matematik darab, $a \times b = c$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang pendaraban pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan bilangan objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang didarab, kuantiti objek/ bahagian yang dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai nombor darab, dan jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil darab;

(iii) ayat matematik tambah berulang, $a + a + a + a = b$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang operasi tambah berulang pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan kuantiti objek/ bahagian dalam kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tambah, bilangan kumpulan objek/ bahagian diasimilasikan sebagai bilangan petambah, dan jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil tambah. Ini juga menunjukkan responden mengakomodasikan skim pengukuran sebagai skim operasi tambah berulang;

(iv) ayat matematik tolak melibatkan kuantiti yang kurang sebagai nombor tolak, $a - b = c$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang operasi tolak melibatkan kuantiti yang kurang pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan jumlah objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian yang tidak cukup untuk membentuk satu kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tolak, dan jumlah objek/bahagian yang ada diasimilasikan sebagai hasil tolak;

(v) ayat matematik tolak, $a - b = c$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang operasi tolak pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan jumlah objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian yang sama jenis diasimilasikan sebagai nombor tolak, dan kuantiti objek/bahagian yang lain jenis diasimilasikan sebagai hasil tolak;

(vi) ayat matematik tolak berulang, $a - b - b - b = c$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang operasi tolak berulang dan konsep bahagi pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan kuantiti objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian dalam kumpulan diasimilasikan sebagai petolak, dan bilangan kumpulan objek/bahagian diasimilasikan sebagai bilangan nombor tolak;

(vii) ayat gabungan operasi darab dan tambah, $(a - d) \div b = c$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang operasi tolak dan operasi bahagi pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan kuantiti objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang ditolak, kuantiti objek/ bahagian yang tidak cukup satu kumpulan diasimilasikan sebagai nombor tolak, bezanya diasimilasi sebagai nombor yang dibahagi dan bilangan kumpulan objek/bahagian diasimilasikan sebagai nombor bahagi, serta kuantiti objek/bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai hasil bahagi;

(viii) ayat matemaitk gabungan operasi darab dan tambah, $a \times b + d = c$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang operasi darab dan operasi tambah pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan bilangan kumpulan objek/ bahagian diasimilasikan sebagai nombor yang didarab, kuantiti objek/ bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai pedarab, baki diasimilasi sebagai petambah, jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil operasi bergabung;

(ix) ayat matematik gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurung, $(a \times b) + (a \times b) = c$. Ini menunjukkan responden menggunakan pengetahuan sedia ada dan pola pemikiran umum tentang operasi darab, operasi tambah dan penggunaan tanda kurung pada masa lalu untuk mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan bilangan kumpulan objek/ bahagian yang sama jenis diasimilasikan sebagai nombor yang didarab, kuantiti objek/ bahagian dalam setiap kumpulan diasimilasikan sebagai nombor darab, jumlah objek/bahagian diasimilasikan sebagai hasil gabungan operasi.

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.

Responden menjalankan aktiviti: (1) Mewakilkan gambar rajah selajar dan diskret dengan ayat matematik melibatkan angka dengan: (a) kaedah pengukuran, (b) kaedah pemetakan, (c) operasi darab, (d) operasi tambah berulang, (e) operasi tolak dengan mencukupkan kumpulan yang tidak lengkap, (f) operasi tolak, (g) operasi tolak berulang, (h) gabungan operasi tolak dan bahagi, (i) gabungan operasi darab dan tambah, dan (j) gabungan operasi darab dan tambah melibatkan tanda kurungan. (2) Mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskret dengan cerita yang melibatkan kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan. Ini menunjukkan responden telah dicetuskan oleh rangsangan daripada bahagian pertama tentang sesuatu pola pemikiran umum bagi mencapai matlamat yang ditetapkan atau aktviti khusus yang berkaitan dengan situasi yang telah diasimilasikan. Bahagian ini membabitkan aktiviti, tindakan, opersi, atau prosedur yang khusus (Nik Azis, 2014).

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.

Ayat matematik dan cerita yang mewakili situasi melibatkan susunan atau agihan objek atau bahagian dalam gambar rajah selanjar dan diskret: ayat matematik bahagia, $a \div b = c$ baki d, $a \times b = c$, $a + a + a + a = b$, $a - b = c$, $a - b - b - b = c$, $(a - d\,) \div b = c$, $a \times b + d = c$, dan $(a \times b) + (a \times b) = c$. Ini menunjukkan responden mempunyai pelbagai pola pemikiran umum tentang perwakilan gambar rajah selanjar dan diskret yang membabitkan perwakilan semula pengalaman. Dalam bahagian ini, responden berusaha mengintegrasikan hasil diperoleh ke dalam hasil yang dijangka (matlamat yang dijangka) berdasarkan pengalamannya menggunakan skim tersebut pada masa lalu (Nik Azis, 1999).

Soalan 3: Apakah makna yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat?

Dalam kajian pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat yang membabitkan makna dibahagikan kepada empat bahagian, iaitu makna tentang pembahagian, makna tentang nombor bahagi, makna tentang hasil bahagi dan makna tentang nombor yang dibahagi.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam membabitkan makna pembahagian dalam konteks situasi nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk ke dalam silinder dan nombor 5 keluar. Pentafsiran tersebut menggunakan pengetahuan nombor dan konsep operasi aritmetik serta pengalaman sedia ada yang dimiliki oleh guru, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.6. Sehubungan itu, guru matematik Tahun Enam memberikan penjelasan tentang tindakan yang diambil untuk pentafsiran situasi tersebut dan perkara itu dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden, seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.7.

Pentafsiran tentang situasi nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk ke dalam silinder dan nombor 5 keluar diterjemahkan dalam bentuk ayat matematik dirumuskan dalam satu kategori sahaja, iaitu pentafsiran secara prosedural yang melibatkan kaedah pengukuran, tolak berulang, kaedah pemetakan dan songsangan darab. Berdasarkan kepada kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam membabitkan beberapa ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Pentafsiran secara prosedural*. Dalam konteks nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk ke dalam silinder dan nombor 5 keluar, semua guru matematik Tahun Enam mentafsirkan pembahagian sebagai sesuatu yang mengasingkan sejumlah objek secara kumpulan, dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama; menolak suatu nombor secara berulang kali dengan nombor tertentu sehingga habis; mengagihkan sejumlah objek ke dalam bilangan kumpulan tertentu dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga habis; dan sama dengan songsangan darab. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan prosedural yang dibina daripada pengalaman sendiri tentang pembahagian. Ini juga menunjukkan guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan tentang cara bertindak dalam situasi yang dialaminya bagi menentukan fungsi silinder ajaib dan hasil yang diperoleh adalah bersifat logikal. Hasil kajian ini juga menunjukkan bahawa semua guru matematik Tahun Enam bertindak dengan cara yang berlainan untuk menentukan fungsi silinder ajaib dan mempunyai pentafsiran yang berbeza tentang pembahagian. Hal ini juga menunjukkan pengetahuan prosedural tentang pembahagian yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam bukan mewakilkan kebenaran atau sepadan dengan realiti ontologi tetapi ia menggambarkan realiti bagi aspek pembahagian yang dibina sendiri melalui pengalaman masing-masing. Guru matematik Tahun Enam juga mentafsirkan tindakan untuk menentukan fungsi silinder ajaib secara berlainan berdasarkan pengalaman, kematangan, dan konsepsi masing-masing.

Pentafsiran tentang makna pembahagian dalam konteks situasi nombor 4 masuk silinder dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk silinder dan nombor 5 keluar dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian adalah seperti di bawah:

(a) S*ituasi yang diasimilasikan oleh responden*.

Responden mengasimilasikan *output* dan *input* dalam pentafsiran makna bahagi berdasarkan pengetahuan sedia ada dan skim yang terbentuk pada masa lalu, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, skim operasi tolak berulang dan skim songsangan darab.

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.

Responden menjalankan aktiviti yang dicetuskan di bahagian pertama untuk mencapai matlamat yang ditetapkan atau aktiviti khusus yang berkaitan dengan situasi yang telah diasimilasikan di bahagian pertama (Nik Azis, 1999, 2014), iaitu:

(i) mencari gandaan input kepada output dengan songsangan darab, iaitu output didarab dengan suatu nombor supaya mendapat input;
(ii) menentukan kumpulan objek yang sama dengan output dengan mengasingkan sejumlah objek yang mewakili input kepada beberapa kumpulan objek yang sama bilangan dengan nombor output sehingga habis;
(iii) menentukan kuantiti objek dalam satu kumpulan dengan mengagihkan sejumlah objek yang mewakili input ke dalam bilangan kumpulan yang mengikut output dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga sifar;
(iv) menentukan bilangan kali penolakan output daripada input sehingga habis.

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.

Dalam bahagian ini, responden berusaha mengintegrasikan hasil diperoleh ke dalam hasil yang dijangka (matlamat yang dijangka) berdasarkan pengalamannya menggunakan skim tersebut pada masa lalu (Nik Azis, 1999, 2014).Ini menunjukkan responden membuat pertimbangan, pentafsiran, dan pengecaman hasil yang diperolehi adalah bergantung kepada pola pemikiran umum tentang makna bahagi berlandaskan pengalamannya mengecamkan, mentafsirkan atau mempertimbangkan hasil yang diperolehi pada masa lalu.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam membabitkan makna nombor bahagi ditafsirkan dalam konteks situasi nombor 4 masuk ke dalam silinder ajaib dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk ke dalam silinder dan nombor 5 keluar. Pentafsiran tersebut menggunakan pengetahuan nombor dan konsep operasi aritmetik serta pengalaman sedia ada yang dimiliki oleh guru, yang mana mereka menggunakan pengetahuan sedia ada mereka tentang operai bahagi, sifir darab, operasi tolak untuk mentafsirkan situasi yang diberi, tingkah laku mereka seperti ditunjukkan dalam Jadual 4.8. Sehubungan itu, guru matematik Tahun Enam memberikan penjelasan tentang tindakan yang diambil untuk mentafsirkan situasi tersebut dan perkara itu dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden, seperti ditunjukkan dalam 4.9.

Pentafsiran tentang situasi nombor 4 masuk silinder dan nombor 2 keluar; dan nombor 10 masuk silinder dan nombor 5 keluar dirumuskan dalam satu kategori sahaja, iaitu pentafsiran secara prosedural tentang nombor bahagi yang melibatkan angka dan gambar rajah. Pentafsiran melibatkan gambar rajah terbahagi kepada dua, iaitu kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan, manakala pentafsiran melibatkan angka terbahagi kepada kaedah pengukuran, operasi bahagi, dan tolak berulang .Berdasarkan kepada kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam membabitkan ciri tertentu seperti di bawah:

Pentafsiran secara prosedural. Dalam konteks nombor 4 masuk dan nombor 2 keluar dari silinder; dan nombor 10 masuk dan nombor 5 keluar dari silinder, semua guru matematik Tahun Enam mentafsirkan nombor bahagi sebagai bilangan kali suatu nombor ditolak oleh nombor tertentu sehingga sifar; bilangan nombor atau kumpulan objek apabila mengasingkan nombor atau sejumlah objek kepada beberapa nombor kecil yang sama atau kumpulan objek yang sama bilangan sehingga habis; kuantiti objek dalam satu kumpulan dengan mengagihkan jumlah objek ke dalam bilangan kumpulan tertentu dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga habis; faktor pendaradan bagi suatu nombor. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan prosedural yang dibina daripada pengalaman sendiri tentang nombor bahagi. Ini juga menunjukkan guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan tentang cara bertindak dalam situasi yang dialaminya bagi menentukan fungsi silinder ajaib dan hasil yang diperoleh adalah bersifat logikal.

Hasil kajian ini juga menunjukkan bahawa semua guru matematik Tahun Enam bertindak dengan cara yang berlainan untuk menentukan fungsi silinder ajaib dan mempunyai tafsiran yang berbeza tentang nombor bahagi. Hal ini juga menunjukkan pengetahuan prosedural tentang nombor bahagi yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam bukan mewakilkan kebenaran atau sepadan dengan realiti ontologi tetapi ia menggambarkan realiti bagi aspek pembahagian yang dibina sendiri melalui pengalaman masing-masing. Guru matematik Tahun Enam juga mentafsirkan tindakan untuk menentukan fungsi silinder ajaib secara berlainan berdasarkan pengalaman, kematangan, dan konsepsi masing-masing, seperti pengalaman mengajar pembahagian nombor bulat, telah mempelajari operasi bahagi dari sekolah rendah, sekolah menengah, maktab atau di universiti yang melibatkan pelbagai bentuk masalah, dan konsepsi yang telah dibina terhadap operasi bahagi.

Pentafsiran tentang makna nombor bahagi dalam konteks situasi nombor 4 masuk silinder dan nombor 2 keluar, dan nombor 10 masuk silinder dan nombor 5 keluar dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian seperti di bawah:

(a) S*ituasi yang diasimilasikan oleh responden*.

Responden mengasimilasikan *output* dan *input* dalam pentafsiran makna nombor bahagi berdasarkan pengetahuan sedia ada dan skim yang terbentuk pada masa lalu, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, skim operasi tolak berulang, dan skim songsangan darab.

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.

Responden menjalankan aktiviti yang dicetuskan di bahagian pertama untuk mencapai matlamat atau aktiviti khusus yang berkaitan dengan situasi yang telah diasimilasikan di bahagian pertama untuk menentukan makna nombor bahagi (Nik Azis, 1999, 2014), iaitu:

(i) menentukan bilangan kali nombor input perlu ditolak oleh nombor output sehingga sifar;
(ii) menentukan bilangan nombor atau kumpulan objek yang sama dengan output dengan mengasingkan nombor atau sejumlah objek yang mewakili input kepada beberapa nombor kecil yang sama atau kumpulan objek yang sama bilangan dengan nombor output sehingga habis;
(iii) menentukan kuantiti objek dalam satu kumpulan dengan mengagihkan jumlah objek mewakili input ke dalam bilangan kumpulan yang mewakili output dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga habis;
(iv) mencari faktor pendaraban dengan menggunakan songsangan darab dengan menghafal sifir bagi output sehingga mendapat hasil darab sama dengan output;

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.

Dalam bahagian ini, responden berusaha mengintegrasikan hasil diperoleh ke dalam hasil yang dijangka (matlamat yang dijangka) berdasarkan pengalamannya menggunakan skim tersebut pada masa lalu (Nik Azis, 1999, 2014). Ini menunjukkan responden membuat pertimbangan, pentafsiran, dan pengecaman hasil yang diperolehi adalah bergantung kepada pola pemikiran umum tentang makna nombor bahagi berlandaskan pengalamannya mengecamkan, mentafsirkan atau mempertimbangkan hasil yang diperolehi pada masa lalu.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat membabitkan makna nombor bahagi dalam konteks situasi nombor 6 dan 10 masuk ke dalam silinder berfungsi "÷ 3" ditafsirkan dengan menggunakan pengetahuan nombor dan konsep operasi aritmetik serta pengalaman sedia ada yang dimiliki oleh guru. Sehubungan itu, guru matematik Tahun Enam memberikan penjelasan tentang tindakan yang diambil untuk mentafsir situasi tersebut dan perkara itu dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden.

Pentafsiran tentang situasi nombor 6 dan 10 masuk ke dalam silinder berfungsi "÷ 3" dirumuskan dalam satu kategori sahaja, iaitu pentafsiran secara prosedural tentang hasil bahagi yang melibatkan angka dan gambar rajah. Pentafsiran melibatkan gambar rajah terbahagi kepada dua, iaitu kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan, manakala pentafsiran melibatkan angka terbahagi kepada kaedah pemetakan, operasi bahagi, tolak berulang, gabungan operasi tolak dan darab, dan operasi tambah berulang. Berdasarkan kepada kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam membabitkan ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Pentafsiran secara prosedural*. Dalam konteks nombor 6 dan 10 masuk ke dalam silinder berfungsi "÷ 3", semua guru matematik Tahun Enam mentafsirkan hasil bahagi sebagai: (a) kuantiti objek dalam satu kumpulan bagi beberapa kumpulan yang mempunyai kuantiti yang sama; (b) nombor tambah yang sama apabila bilangan nombor tambah tersebut sama dengan nombor bahagi, jumlahnya tanpa atau termasuk baki sama dengan nombor yang diberi; (c) nombor darab apabila menggunakan songsangan darab; dan (d) bilangan nombor tolak yang sama dengan nombor bahagi, apabila ditolak daripada suatu nombor bezanya sifar atau kurang daripada nombor bahagi. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan prosedural yang dibina daripada pengalaman sendiri tentang hasil bahagi. Ini juga menunjukkan guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan tentang cara bertindak dalam situasi yang dialaminya bagi menentukan hasil daripada nombor masuk ke dalam silinder berfungsi "÷ 3" dan hasil yang diperolehi bersifat logikal. Hasil kajian ini juga menunjukkan bahawa semua guru matematik Tahun Enam bertindak dengan cara yang berlainan untuk menentukan hasil daripada nombor masuk ke dalam silinder berfungsi "÷ 3" dan mempunyai tafsiran yang berbeza tentang hasil bahagi, kerana mereka mentafsir berdasarkan pengalaman, kematangan, dan konsepsi masing-masing.

Pentafsiran tentang makna hasil bahagi dalam konteks situasi nombor 6 dan 10 masuk ke dalam silinder berfungsi "÷3" dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian adalah seperti di bawah:

(a) S*ituasi yang diasimilasikan oleh responden*.

Responden mengasimilasikan *input* dan operasi "÷ 3" dalam pentafsiran makna hasil bahagi berdasarkan pengetahuan sedia ada dan skim yang terbentuk pada masa lalu, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, skim operasi tolak berulang, skim songsangan darab, gabungan skim operasi tolak dan skim operasi darab, skim operasi tambah berulang.

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.

Responden menjalankan aktiviti yang dicetuskan di bahagian pertama untuk mencapai matlamat atau aktiviti khusus yang berkaitan dengan situasi yang telah diasimilasikan di bahagian pertama untuk menentukan makna nombor hasil bahagi (Nik Azis, 1999, 2014), iaitu:

(i) mencari bilangan kumpulan yang mempunyai kuantiti objek/bahagian/angka/selang yang sama dengan mengasingkan sejumlah objek/bahagian/angka/selang yang mewakili input secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek/bahagian/angka/selang yang sama dengan nombor bahagi;

(ii) mencari kuantiti objek dalam satu kumpulan dengan mengagihkan jumlah objek diskret/selanjar yang mewakili input ke dalam bilangan kumpulan yang mewakili nombor bahagi dengan satu demi satu secara bergilir-gilir sehingga habis atau berbaki;

(iii) mencari nombor tambah yang sama apabila bilangan nombor tambah tersebut sama dengan nombor bahagi, jumlahnya tanpa atau termasuk baki sama dengan input;

(iv) mencari nombor darab apabila didarab dengan nombor bahagi, hasil darabnya ditolak dengan input akan mendapat beza sifar atau kurang daripada nombor bahagi; dan

(v) mencari bilangan nombor tolak yang sama dengan nombor bahagi yang ditolak daripada input agar bezanya sifar atau kurang daripada nombor bahagi.

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.

Dalam bahagian ini, responden berusaha mengintegrasikan hasil diperoleh ke dalam hasil yang dijangka (matlamat yang dijangka) berdasarkan pengalamannya menggunakan skim tersebut pada masa lalu (Nik Azis, 1999, 2014).Ini menunjukkan responden membuat pertimbangan, pentafsiran, dan pengecaman hasil yang diperolehi adalah bergantung kepada pola pemikiran umum tentang makna hasil bahagi berlandaskan pengalamannya mengecamkan, mentafsirkan atau mempertimbangkan hasil yang diperolehi pada masa lalu.

Pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat yang membabitkan makna nombor yang dibahagi ditafsirkan dalam konteks situasi nombor 8 keluar dari silinder berfungsi "÷ 3" dengan menggunakan pengetahuan nombor dan konsep operasi aritmetik serta pengalaman sedia ada yang dimiliki oleh guru. Sehubungan itu, guru matematik Tahun Enam memberikan penjelasan tentang tindakan yang diambil untuk pentafsiran situasi tersebut dan perkara itu dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden.

Pentafsiran tentang situasi nombor 8 keluar dari silinder berfungsi "÷3" dirumuskan dalam satu kategori sahaja, iaitu pentafsiran secara prosedural tentang nombor yang dibahagi yang melibatkan angka dan gambar rajah. Pentafsiran melibatkan gambar rajah terbahagi kepada dua bahagian, iaitu kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan, manakala pentafsiran melibatkan angka terbahagi kepada tiga bahagian, iaitu operasi darab, songsangan darab dan operasi tambah berulang. Berdasarkan kepada kategori tersebut, pemikiran guru matematik Tahun Enam membabitkan ciri tertentu seperti di bawah:

a. *Pentafsiran secara prosedural*. Dalam konteks situasi nombor 8 keluar dari silinder berfungsi "÷3", semua guru matematik Tahun Enam mentafsirkan nombor yang dibahagi sebagai: jumlah objek yang diagihkan secara sama banyak ke dalam bilangan kumpulan tertentu;

jumlah objek yang diagihkan secara kumpulan dengan setiap kumpulan mempunyai kuantiti objek yang sama; hasil tambah bagi sebilangan nombor yang sama; hasil darab dengan songsangan ayat matematik bahagi; dan hasil darab yang didapati dengan mendarabkan bilangan kumpulan agihan yang mempunyai kuantiti objek yang sama dengan kuantiti objek dalam satu kumpulan. Hal ini menunjukkan bahawa guru matematik Tahun Enam menggunakan pengetahuan prosedural yang dibina daripada pengalaman sendiri tentang nombor yang dibahagi. Hasil kajian ini juga menunjukkan bahawa semua matematik Tahun Enam bertindak dengan cara yang berlainan untuk menentukan fungsi silinder ajaib dan mempunyai tafsiran yang berbeza tentang pembahagian. Hal ini menunjukkan pengetahuan prosedural tentang nombor yang dibahagi digunakan oleh guru matematik Tahun Enam bukan mewakilkan kebenaran atau sepadan dengan realiti ontologi tetapi ia menggambarkan realiti bagi aspek nombor yang dibahagi yang dibina sendiri melalui pengalaman, kematangan, dan konsepsi masing-masing.

Pentafsiran tentang makna nombor yang dibahagi dalam konteks situasi nombor 8 keluar dari silinder berfungsi "÷ 3" dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian seperti di bawah:

(a) S*ituasi yang diasimilasikan oleh responden*.

Responden mengasimilasikan *output* dan operasi "÷ 3" dalam pentafsiran makna nombor yang dibahagi berdasarkan pengetahuan sedia ada dan skim yang terbentuk pada masa lalu, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, skim songsangan darab, skim operasi darab, skim operasi tambah berulang. Dalam hal ini, responden tidak mengaitkan situasi dengan skim operasi tolak berulang kerana mereka menganggap nombor yang dibahagi merupakan jumlah objek, maka hanya berkaitan dengan tambah dan darab jarang dikaitkan dengan operasi tolak.

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.

Responden menjalankan aktiviti yang dicetuskan di bahagian pertama untuk mencapai matlamat atau aktiviti khusus yang berkaitan dengan situasi yang telah diasimilasikan di bahagian pertama untuk menentukan makna nombor yang dibahagi (Nik Azis, 1999, 2014), iaitu:

(i) mengira jumlah objek dalam bilangan kumpulan yang sama dengan nombor bahagi dengan kuantiti objek dalam setiap kumpulan sama dengan output;
(ii) mengira jumlah objek dalam bilangan kumpulan sama dengan *output* dengan kuantiti objek dalam setiap kumpulan sama dengan nombor bahagi;
(iii) mengira hasil tambah bagi bilangan nombor yang sama dengan nombor bahagi dan nilai nombor tersebut sama dengan output;
(iv) mengira hasil darab dengan songsangan darab dengan nombor yang didarab sama dengan output dan nombor darab sama dengan nombor bahagi;
(v) mengira hasil darab dengan nombor yang didarab sama dengan nombor bahagi dan nombor darab sama dengan *output*.

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.

Dalam bahagian ini, responden berusaha mengintegrasikan hasil diperoleh ke dalam hasil yang dijangka (matlamat yang dijangka) berdasarkan pengalamannya menggunakan skim tersebut pada masa lalu (Nik Azis, 1999, 2014).Ini menunjukkan responden membuat pertimbangan, pentafsiran, dan pengecaman hasil yang diperoleh adalah bergantung kepada pola pemikiran umum tentang makna nombor yang dibahagi berlandaskan pengalamannya mengecamkan, mentafsirkan atau mempertimbangkan hasil yang diperoleh pada masa lalu.

Soalan 4: Apakah jenis penaakulan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat?

Kajian tentang jenis penaakulan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat melibatkan tiga soalan:

(1) Ali dan Ah Seng menyertai acara maraton. Setiap kali Ali berlari 2 km, Ah Seng akan berlari 3 km. Jika Ali berlari sejauh 12 km, berapa jauhkah Ah Seng berlari?;
(2) 6 orang kanak-kanak berkongsi 43 biji gula-gula. Berapa bijikah gula-gula diperlukan lagi supaya setiap kanak-kanak itu mendapat bilangan gula-gula yang sama?; dan
(3) Pak Kassim ada 27 biji durian. Setelah dia mengagihkan durian itu kepada beberapa orang jirannya dengan bilangan yang sama, dia masih tinggal 3 biji durian. Berapa orangkah jiran Pak Kassim mendapat durian?

Dalam menyelesaikan masalah seperti di atas, semua guru matematik Tahun Enam menggunakan penaakulan. Penaakulan tersebut boleh dirumuskan dalam satu kategori sahaja, iaitu penjelasan secara prosedural. Penjelasan tersebut dibahagikan kepada dua bahagian, iaitu penaakulan deduktif dan penaakulan induktif seperti ditunjukkan dalam Jadual 5.1.

Jadual 5.1
Perbandingan antara cara penaakulan deduktif dan induktif yang digunakan oleh responden untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat.

Penaakulan Deduktif	**Penaakulan Induktif**
(i) Konsep kadaran	(i) Konsep kadaran
(ii) Konsep gandaan	(ii) Konsep gandaan
(iii) Pecahan setara	(iii) Pecahan setara
(iv) Kaedah pengukuran:	(iv) Kaedah pengukuran :
1. garis nombor	1. gambar rajah
2. operasi tambah berulang	2. baki yang ditetapkan
3. senarai kes demi kes	
4. gambar rajah	
5. operasi tambah berulang	
6. angka	
7. garisan	
(v) Gandaan yang lebih besar dan terdekat	(v) Gandaan yang lebih besar dan terdekat
(vi) Gabungan operasi bahagi dan tolak	(vi) Gabungan operasi bahagi dan tolak
(vii) Gandaan yang lebih kecil dan terdekat	(vii) Gandaan yang lebih kecil dan terdekat
(viii) Baki dalam ayat matematik bahagi	(viii) Baki dalam ayat matematik bahagi
(ix) Operasi tolak berulang	(ix) Operasi tolak berulang
(x) Faktor dalam ayat matematik bahagi	(x) Faktor dalam ayat matematik bahagi
(xi) Faktor dalam ayat matematik darab	(xi) Faktor dalam ayat matematik darab
(xii) Kaedah pemetakan	

Daripada Jadual 5.1, didapati responden menggunakan pengetahuan sedai ada dan pengabstrakan empirik tentang pembahagian nombor bulat (Nik Azis, 1999, 2014; Piaget 1977). Responden membuat pengabstrakan empirik yang membabitkan pengabstrakan suatu ciri pembahagian nombor bulat atau pengabstrakan corak (pola) figuratif daripada pengalaman motor deria melibatkan pembahagian nombor bulat. Responden menggunakan cara penaakulan deduktif dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat dengan pengetahuan sedia ada dan skim-skim yang telah dibentuk pada masa lalu, iaitu mereka membuat kesimpulan khusus berdasarkan pernyataan umum yang melibatkan rumusan, konsep, atau kes umum, iaitu konsep kadaran, konsep gandaan, pecahan setara, kaedah pengukuran, gandaan yang lebih besar dan terdekat, gabungan operasi bahagi dan tolak, gandaan yang lebih kecil dan tersekat, kaedah pemetakan, faktor dengan operasi bahagi, faktor dengan operasi darab, dan baki dengan operasi bahagi.

Daripada kajian, didapati lima daripada enam responden cenderung menggunakan kaedah pengukuran dan gandaan yang lebih besar dan terdekat dalam penaakulan deduktif untuk menyelesaikan masalah. Ini menunjukkan responden menggunakan semula skim pengukuran dan skim mencari gandaan yang lebih besar dan terdekat dengan jumlah yang diberi. Ini juga menunjukkan responden mempunyai pengetahuan sedia ada tentang pembahagian nombor bulat dan mengetahui pembahagian nombor bulat berkaitan dengan gandaan dan pengagihan secara kumpulan dengan kuantiti yang sama. Cara penaakulan melibatkan gabungan operasi bahagi dan tolak merupakan cara kedua banyak responden gunakan, iaitu terdapat empat daripada enam orang responden. Ini menunjukkan responden menggunakan gabungan skim bahagi dan skim tolak dalam penaakulan untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Ini juga menunjukkan responden faham selain operasi bahagi, operasi tolak juga ada perkaitan dengan pembahagian nombor bulat. Seterusnya, terdapat tiga daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan melibatkan konsep gandaan, dan faktor dalam ayat matematik bahagi. Ini menunjukkan responden membuat penaakulan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat juga melibatkan gandaan dan faktor. Ini juga menunjukkan responden faham gandaan dan faktor adalah komponen penting dalam pembahagian nombor bulat. Cara yang kurang responden gunakan adalah konsep kadaran, pecahan setara, dan faktor dalam ayat matematik darab, iaitu terdapat dua daripada enam orang responden menggunakannya, manakala gandaan yang lebih kecil dan terdekat, kaedah pemetakan, dan baki dalam ayat matematik bahagi, hanya terdapat seorang daripada enam orang responden menggunakannya. Ini menunjukkan responden jarang mengaitkan pembahagian nombor bulat dengan konsep kadaran, konsep gandaan, gandaan yang lebih kecil dan terdekat, kaedah pemetakan, faktor dalam ayat matematik darab dan baki dalam ayat matematik bahagi. Cara tersebut hanya digunakan bergantung kepada masalah pembahagian nombor bulat yang diberi.

Selain itu, responden menggunakan cara penaakulan induktif dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat juga dengan pengetahuan sedia ada dan skim-skim yang telah dibentuk pada masa lalu, iaitu membuat rumusan/ kesimpulan melibatkan konsep kadaran, konsep gandaan, pecahan setara, kaedah pengukuran, gandaan yang lebih besar dan terdekat, gabungan operasi bahagi dan tolak, gandaan yang lebih kecil dan tersekat, kaedah pemetakan, faktor dengan operasi bahagi, faktor dengan operasi darab, dan baki dengan operasi bahagi. Ini menunjukkan skim membolehkan operasi mental dilakukan secara berulang kali kerana skim terdiri daripada sebarang perkara yang boleh diulang-ulang dan digeneralisasikan dalam sesuatu tindakan.

Daripada kajian, didapati lima daripada enam orang responden cenderung menggunakan kaedah pengukuran dan gandaan yang lebih besar dan terdekat dalam penaakulan induktif untuk menyelesaikan masalah. Ini menunjukkan responden juga menggunakan semula skim pengukuran dan skim mencari gandaan yang lebih besar dan terdekat dengan jumlah yang diberi dalam penaakulan induktif. Ini juga menunjukkan responden sanggup menggunakan pengetahuan sedia ada tentang pembahagian nombor bulat dan mengaitkannya dengan gandaan dan pengagihan secara kumpulan dengan kuantiti yang sama. Cara penaakulan melibatkan gabungan operasi bahagi dan tolak merupakan cara kedua banyak, iaitu terdapat empat daripada enam orang responden. Ini menunjukkan responden menggunakan gabungan skim bahagi dan skim tolak dalam penaakulan untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Ini juga menunjukkan responden faham selain operasi bahagi, operasi tolak juga ada perkaitan dengan pembahagian nombor bulat. Seterusnya, terdapat tiga daripada enam orang responden menggunakan cara penaakulan melibatkan konsep gandaan, dan faktor dalam ayat matematik bahagi. Ini menunjukkan responden membuat penaakulan induktif dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat melibatkan gandaan dan faktor. Ini juga menunjukkan responden faham gandaan dan faktor ialah komponen penting dalam pembahagian nombor bulat.

Cara yang kurang responden gunakan ialah pecahan setara, dan faktor dalam ayat matematik darab, iaitu terdapat dua daripada enam orang responden menggunakannya, manakala konsep kadaran, gandaan yang lebih kecil dan terdekat, kaedah pemetakan, dan baki dalam ayat matematik bahagi, hanya terdapat seorang daripada enam orang responden menggunakannya. Ini menunjukkan responden jarang mengaitkan pembahagian nombor bulat dengan konsep kadaran, konsep gandaan, gandaan yang lebih kecil dan terdekat, faktor dalam ayat matematik darab dan baki dalam ayat matematik bahagi. Cara tersebut hanya digunakan bergantung kepada masalah pembahagian nombor bulat yang diberi.

Dari kajian didapati cara penaakulan deduktif dan induktif yang digunaakan tidak banyak beza, yang mana guru matematik Tahun Enam boleh menggunakan cara penaaakul deduktif yang melibatkan kaedah tertentu dalam penyelesaian masalah melibatkan pembahagian nombor bulat contohnya kaedah pengukuran, maka beliau juga boleh menggunakan kaedah yang sama dalam penaaakukan induktif. Ini menunjukkan guru menguasai kemahiran atau memahami kaedah tersebut dengan baik. Dengan itu, apabila menyelesaikan masalah beliau boleh terus menaakul menggunakan kaedah atau kemahiran tersebut.

Penyelesaian masalah menggunakan penaakulan dijelaskan dalam satu urutan yang mengandungi tiga bahagian seperti di bawah:

(a) *Situasi yang diasimilasikan oleh responden*.
Responden mengasimilasikan masalah pembahagian nombor bulat yang diberi dengan cara penaakulan yang melibatkan penaakulan induktif dan deduktif berdasarkan pengetahuan sedia ada dan skim yang terbentuk pada masa lalu, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, skim operasi darab, konsep kadaran, konsep gandaan, pecahan setara, kes mencari ganda yang lebih besar dan terdekat, gabungan operasi bahagi dan tolak, gandaan yang lebih kecil dan terdekat, mencari faktor dalam ayat matematik bahagi, mencari faktor dalam ayat matematik darab, mencari baki dalam ayat matematik bahagi. Kajian mendapati responden berupaya mengasimilasikan situasi yang dialami untuk menetapkan matlamat bagi mengaktifkan tindakan yang terkandung di dalamnya (Nik Azis, 2014).

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.
Semua responden berupaya membuat penaakulan semasa menyelesaikan masalah berkaitan pembahagian nombor bulat yang melibatkan penaakulan deduktif dan induktif. Mereka berupaya menyelesaikan masalah dengan pelbagai cara penaakulan deduktif, iaitu menggunakan rumusan/formula/kes untuk mendapat kes khusus dengan melibatkan perkara tertentu seperti di Jadual 5.1. Cara penaakulan induktif yang digunakan oleh guru, iaitu menggunakan kes-kes khusus untuk mendapat kes umum dengan melibatkan perkara tertentu seperti di Jadual 5.1. Nampaknya perkara yang terlibat dalam penaakulan deduktif dan induktif adalah lebih kurang sama bergantung pada jenis masalah yang diberi. Dari jadual didapati, kaedah pengukuran adalah dominan dalam penyelesaian masalah melibatkan pelbagai perkara. Ini menunjukkan pengalaman dan pengetahuan sedia ada serta skim atau pola pemikiran guru tentang penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat adalah luas dan pelbagai.

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.
Semua responden dapat menggunakan pelbagai cara penaakulan untuk mendapat hasil yang diharapkan. Ini menunjukkan responden berupaya menggunakan cara penaakulan yang sesuai dan tetap dalam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Ini menunjukkan responden berupaya menggunakan proses pemikiran intuisi dan logik untuk membentuk inferens dan hujah rasional berdasarkan tahap bukti empirikal dan bukti dalam keadaan tertentu. Dari kajian didapati responden hanya menggunakan dua jenis penaakulan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, iaitu penaakulan deduktif dan penaakulan induktif sahaja, tetapi penaakulan abduktif tidak digunakan. Ini kerana masalah yang ditujukan tidak bersifat membuat dan menguji hipotesis dengan menggunakan maklumat terbaik

yang dapat diperoleh pada sesuatu masa, dan masalah yang ditujukan kesemuanya ada jawapan yang tepat bukan sekadar anggaran atau tekaan.

Soalan 5: Bagaimanakah guru matematik Tahun Enam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat?

Kajian tentang cara guru matematik Tahun Enam untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat melibatkan empat soalan: (1) “20 orang murid beratur dalam 4 baris dengan bilangan yang sama. Berapa orangkah murid dalam setiap baris?”; (2) “Sekumpulan pengakap berkongsi seutas tali yang panjangnya 23 m, dengan setiap orang memperoleh 5m. Berapa orangkah pengakap memperoleh tali panjang 5m? Berapa panjang tali yang tinggal?”; (3) “Bapa memberi sejumlah wang kepada Siti dan 5 orang adiknya, dengan setiap orang memperoleh RM7. Berapakah jumlah wang yang diperoleh oleh Siti dan 5 orang adiknya?”; dan (4) Selepas pekedai mengagihkan 17 batang lolipop ke dalam 3 buah beg plastik secara sama rata, bakinya 2 batang. Berapa batangkah lolipop dalam setiap beg plastik?”.

Semua responden dapat menyelesaikan masalah seperti di atas dengan pelbagai cara yang boleh dirumuskan dalam satu kategori, iaitu penjelasan secara prosedural. Penjelasan tersebut meliputi beberapa kaedah seperti dalam Jadual 4.16 Dari kajian didapati kaedah pemetakan yang melibatkan gambar rajah dan angka, kaedah pengukuran yang melibatkan bahan konkrit, garis nombor dan jadual; serta pembahagian panjang adalah kaedah yang dominan digunakan dalam menyelesaikan masalah tentang pembahagian nombor bulat, kerana keenam-enam guru matematik Tahun Enam juga cenderung menggunakan kaedah tersebut dalam menyelesaikan masalah tentang pembahagian nombor bulat. Ini menunjukkan skim pemetakan, skim pengukuran dan pembahagian panjang boleh digunakan berulang kali dan sesuai untuk pelbagai situasi atau masalah. Seterusnya, gabungan operasi tambah dan darab, dan songsangan darab merupakan kaedah yang kedua banyak digunakan oleh guru matematik Tahun Enam, iaitu kedua-dua juga terdapat lima dari enam orang guru yang menggunakannya. Ini menunjukkan responden juga membuat akomodasi skim dalam penyelesaian masalah, iaitu mereka sanggup menggabungkan skim tolak dan skim darab dalam penyelesaian masalah. Kaedah dengan operasi tambah berulang, operasi tolak berulang, dan gabungan operasi tolak dan bahagi masing-masing digunakan oleh tiga daripada enam orang responden. Ini menunjukkan operasi yang memerlukan masa yang lebih dan agak kompleks, oleh itu kurang orang menggunakannya. Kaedah operasi darab dan cerakin nombor pula merupakan kaedah kedua sikit responden menggunakannya kerana hanya ada dua daripada enam orang menggunakannya, Akhirnya, kaedah unitari, dan gandaan lebih kecil dan terdekat merupakan kaedah yang jarang digunakan kerana masing-masing hanya ada seorang daripada enam orang responden menggunakannya.

Di samping itu, cara penyelesaian masalah tentang pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru dijelaskan dalam satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, iaitu situasi yang diasimilasikan oleh responden, aktiviti yang dijalankan oleh responden, dan hasil yang diharapkan oleh responden iaitu:

(a) *Situasi yang diasimilasikan oleh responden*.

Responden mengasimilasikan masalah pembahagian nombor bulat yang diberi dengan pelbagai cara berdasarkan pengetahuan sedia ada dan skim yang terbentuk pada masa lalu, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, pembahagian panjang, kaedah unitari, skim songsangan darab, skim operasi darab, skim operasi tambah berulang, konsep kadaran, konsep gandaan, gabungan operasi tambah dan darab, operasi tambah berulang, gabungan skim operasi darab dan skim tolak, kes cerakin nombor, serta gabungan skim tolak dan skim bahagi. Kajian mendapati responden berupaya mengasimilasikan situasi yang dialami untuk menetapkan matlamat bagi mengaktifkan tindakan yang terkandung di dalamnya.

(b) A*ktiviti yang dijalankan oleh responden*.

Semua responden berupaya menjalankan aktiviti atau tindakan khusus untuk mengatasi gangguan yang dihadapi, iaitu masalah pembahagian nombor bulat. Cara penyelesaian masalah yang digunakan oleh responden adalah seperti di Jadual 4.17.

Ini menunjukkan responden berupaya menggunakan lebih daripada satu cara penyelesaian masalah. Cara penyelesaian yang digunakan bergantung kepada pengalaman dan pengetahuan sedia ada mereka. Daripada kajian didapati, skim pemetakan, skim pengukuran dan pembahagian panjang adalah dominan digunakan dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat. Ini menunjukkan responden cenderung menggunakan kaedah pemetakan, skim pemetakan, dan pembahagian panjang berulang kali untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Dari hasil kajian, didapati responden menggunakan pelbagai aktiviti daripada rangsangan dalam bahagian pertama. Ini juga menunjukkan pengalaman dan pengetahuan sedia ada serta skim atau pola pemikiran responden tentang penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat adalah luas dan pelbagai.

(c) *Hasil yang diharapkan oleh responden*.

Semua responden berupaya mendapat hasil yang diperlukan berdasarkan aktiviti yang dilakukan mereka. Ini menunjukkan responden cekap mentafsir masalah dan menggunakan cara yang sesuai dan tetap dalam penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat. Ini juga menunjukkan responden berupaya mengatasi halangan yang dialami dan menjalankan proses pengabstrakan reflektif dengan berkesan. Seterusnya, hasil kajian juga menunjukkan hasil sesuatu skim terdiri daripada sebarang modifikasi terhadap situasi dialami yang ditimbulkan oleh aktiviti skim (Piaget, 1964; Nik Azis, 2014).

Kesimpulan

Tujuan kajian ini adalah untuk mengenal pasti pemahaman guru Matematik tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat dengan melalui kajian mengenai gambaran mental, perwakilan, makna, cara penaakulan, dan cara penyelesaian masalah tentang pembahagian nombor bulat yang dimiliki mereka. Kesimpulan bagi dapatan kajian ini adalah seperti berikut:

Gambaran Mental. Dapatan kajian mengenai gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat didapati mempunyai kesamaan dengan beberapa dapatan kajian (Nik Azis, 1989, 1995; Faridah, 2009; Fan, 2011) yang mendapati majoriti murid menggambarkan konsep bahagi secara abstrak dengan menulis simbol, iaitu simbol standard bagi operasi bahagi dan simbol bagi pembahagian panjang. Satu penjelasan yang munasabah bagi hasil kajian ini ialah guru juga memilik gambaran mental yang sama dengan murid tentang pembahagian nombor bulat. Perkara ini mungkin disebabkan oleh cara mereka belajar atau pengalaman pembelajaran mereka adalah sama.

Selain itu, Hasil kajian ini secocok dengan beberapa hasil kajian (Nik Azis, 1989, 1995; Faridah, 2009; Fan, 2011; Von Glaserfeld, 1987;Thompson, 1996; Thompson & Siegler, 2010) guru menggambarkan konsep bahagi dengan objek dalam kehidupan harian yang boleh dibahagi seperti gula-gula dan ikan. Ini menunjukkan guru membuat gambaran mental berdasarkan bahan atau benda di persekitaran mereka atau dalam pengalaman mereka. Mereka tidak dapat membayangkan dengan serta-merta benda di luar pengalaman atau persekitaran mereka. Ini sama dengan beberapa kajian (Von Glaserfeld, 1987, 1988; Thompson, 1996; Thompson & Siegler, 2010), operasi mental manusia tidak boleh ditaksirkan sebagai bersifat statik dan tidak dapat disalin daripada mana-mana tempat. Menurut Von Galsersfeld (1988), "gambaran mental" merujuk kepada satu usaha mengadakan atau membentuk semula sesuatu pengalaman lalu tanpa isyarat motor deria. Nik Azis (1999) berpendapat pembentukan gambaran mental membabitkan kebolehan seseorang individu untuk menggambarkan sesuatu yang dikaitkan dengan perkataan khusus yang dilafazkan, apabila dia mendengar pola bunyi bagi perkataan. Gabungan unsur pengalaman yang membentuk sesuatu konsep yang dikaitkan dengan perkataan khusus oleh seseorang individu sebenarnya terdiri daripada gabungan pengabstrakan yang dibuat oleh individu tersebut berdasarkan pengalamannya. Menurut kajian Thompson dan Siegler (2010), gambaran mental guru dan murid bergantung kepada imej-imej yang berada dalam pengetahuan sedia ada mereka tentang situasi yang diberikan serta-merta tersebut. Dengan itu, guru menggambarkan semula apa yang telah mereka alami pada suatu ketika.

Seterusnya, hasil kajian gambaran mental tentang “sifar” juga sama dengan dapatan beberapa kajian (Knifong, & Burton,1980; Wheeler, & Feghali, 1983; Crespo, & Nicol, 2006; Levenson, Tsamir &Tirosh, 2007; Robert, Teruni,& John, 2010; Russell, & Chernoff, 2010, 2011; Faridah, 2009) yang mendapati murid dan guru mentafsirnya sebagai kosong, keadaan tiada apa-apa, keadaan yang tidak ada sebarang nombor. Ini menunjukkan pemahaman guru dan murid tentang sifar adalah sama. Ini juga menunjukkan ada perkaitan pemahaman murid dengan guru.

Dapatan kajian ini juga mendapati guru Matematik Tahun Enam mewakilkan sifar, kosong dan tiada apa-apa dengan kaedah analogi, manipulatif dengan bahan seperti tangan, situasi tertentu seperti bilik kosong mewakili tiada apa-apa, kehabisan kuantiti sesuatu objek mewakili sifar, atau menjustifikasikan jawapan dengan menggunakan hujah logik yang membabitkan idea pengukuran, pemetakan, tolak berulang atau algoritma pembahagian panjang. Ini adalah berbeza dengan dapatan kajian Faridah (2009) mendapati semua murid tidak dapat menggunakan lukisan untuk menyokong jawapan mereka secara konkrit kerana mereka tidak dapat melukis kosong. Ini dapat menunjukkan pemahaman berkaitan dengan kematangan dan pengalaman pembelajaran. Ini juga mungkin murid tidak diajar kaedah analogi untuk menggambarkan sesuatu yang abstrak. Menurut Nik Azis (1999) gambaran mental merupakan imej tentang sesuatu yang terbentuk secara spontan apabila murid menggunakan skim yang khusus pada waktu tertentu untuk mentafsirkan perkataan atau simbol yang diberikan.

Gambaran mental tentang pembahagian nombor bulat yang dimilki oleh guru matematik Tahun Enam terbahagi kepada lima kategori, iaitu simbolik, konseptual, prosedural, praktikal, dan figuratif. Ini menunjukkan guru bertindak kepada sesuatu rangsangan dengan serta-merta dalam mindanya berdasarkan benda-denda atau perkara yang pernah mereka alami, di persekitaran mereka atau diamalkan dalam kehidupan harian. Benda-benda yang berkaitan dengan nombor dan ayat matematik bahagi juga terbayang dengan serta-merta dalam minda mereka, ini mungkin kerana mereka selalu menggunakan nombor tersebut setiap hari, serta selalu menulis dan melihat ayat matematik dalam kelas matematik. Meraka juga bertindak mengikut pemahaman mereka terhadap perkara tersebut, contohnya pemahaman konseptual terdiri daripada hubungan yang dibina secara internal dan dihubungkan dengan idea yang telah wujud dalam pemikiran kita (Mohamad Johari, 2007; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012). Ia melibatkan pemahaman tentang idea dan prosedur matematik dan juga pengetahuan tentang fakta aritmetik asas.

Perwakilan. Dapatan kajian mengenai perwakilan tentang pembahagian nombor bulat, didapati guru matematik Tahun Enam membuat perwakilan berdasarkan pengalaman dan pengetahuan sedia ada mereka, ini selaras dengan beberapa pandangan (Lesh, Post, & Behr, 1987; Steffe, 2000, 2007; Von Glasersfeld 1995; Von Glasersfeld & Larochelle, 2007; Turner, 2007, 2008; Roche, & Clarke, 2013) bahawa guru membina pengetahuan berdasarkan pengalaman yang mereka alami sendiri. Menurut Von Glasersfeld (1995), perwakilan ialah pengetahuan seseorang yang diwakili semula dalam pelbagai konteks. Guru Matematik Tahun Enam mewakilkan semula sesuatu nombor, perkataan atau ayat matematik mengikut pengalaman dan pengetahuan mereka, contohnya semua guru Matematik dapat mewakilkan "bahagi" dengan simbol bahagi yang digunakan setiap hari dalam kelas matematik mereka.

Hasil kajian juga sepadan dengan pandangan pengikut Teori Pemprosesan Maklumat seperti Paivio (1986), perwakilan berbahasa adalah terdiri daripada beberapa subsistem deria yang diterima dari deria motor; ini seterusnya menghasilkan perwakilan yang berbentuk imej dalam mental seseorang. Menerusi ingatan, seseorang itu berupaya menggambarkan semula objek tersebut seperti mana deria rangsangan menerimanya. Mereka menganalogikan perwakilan yang dihasilkan oleh manusia sebagai proses yang berlaku dalam sebuah komputer yang bermula daripada tindakan menerima input, memprosesnya ke dalam bentuk yang difahami, dan akhirnya mengeluarkan output sebagai mana yang diterima dan diingati oleh seseorang murid. Mereka berpendapat manusia sebagai suatu organisma hidup menerima dan mengeluarkan kembali pengetahuan tersebut apabila dikehendaki.

Dapatan kajian mendapati guru matematik Tahun Enam mewakili nombor dan ayat matematik bahagi melibatkan enam kategori, iaitu figuratif, simbolik, prosedural, konseptul, manipulatif, dan pratikal secocok dengan beberapa pandangan yang diutarakan dalam Teori Tingkah Laku berkaitan perwakilan luaran yang terdiri daripada lima bentuk perwakilan secara khusus, iaitu: situasi dunia sebenar, bahan manipulatif, piktorial, simbol, dan simbol penulisan (Lesh, Post & Behr, 1987; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012; Lesh & Fennewald, 2013; Roche & Clarke, 2013). Guru menggunakan lakaran, simbol, bahan konkrit, situasi, manipulasi anggota badan untuk mewakili sesuatu perkara atau situasi tentang nombor dan pembahagian nombor bulat. Ini menunjukkan kebolehan seseorang guru matematik memilih, mewakili, menterjemah, mengaplikasikan perwakilan menggambarkan tahap pemahaman mereka tentang pembahagian.

Perwakilan yang pelbagai bagi guru juga mungkin disebabkan perbezaan dari segi pengalaman, pengetahuan sedia ada, dan kematangan. Hasil kajian ini juga menepati kajian von Glasesfeld (1989) bahawa suatu keadaan atau kuantiti yang tidak diketahui boleh diwakili dengan huruf, perkataan, simbol, graf dan tanda rekaan.

Hasil kajian ini juga secocok dengan pandangan Teori Konstruktivisme Radikal yang berlandaskan memainkan semula pengalaman yang dimiliki mereka dalam bentuk imej mental dan ianya boleh diwakilkan semula berasaskan batasan pengalaman masing-masing. Hasil kajian menunjukkan guru matematik Tahun Enam mewakili semula apa yang pernah mereka alami sebelum ini, contohnya mewakilkan ayat matematik bahagi, “6 ÷ 2”, mereka boleh mewakilinya dengan mengagihkan enam objek secara dua-dua, keadaan ini berlaku semasa mereka mengajar murid pembahagian di dalam kelas.

Cara perwakilan yang digunakan oleh guru matematik Tahun Enam dikelaskan kepada empat kategori: (i) kategori figuratif melibatkan penggunaan bahan konkrit dan melukis gambar rajah dalam perwakilan, (ii) kategori manipulatif melibatkan penggunaan anggota badan dalam perwakilan, (iii) kategori prosedural melibatkan penggunaan langkah demi langkah dalam perwakilan, seperti dalam kaedah pengukuran, kaedah pemetakan, kaedah susun atur, dan kaedah analogi, dan (iv) kategori simbolik melibatkan angka dan perkataan dalam perwakilan, seperti perwakilan dalam bentuk pecahan, pembahagian panjang, operasi tolak berulang, dan cerita berayat yang melibatkan pembahagian dengan kaedah pengukuran dan kaedah pemetakan. Ini menunjukkan guru mempunyai kemahiran dan pengetahuan yang pelbagai dalam perwakilan pembahagian nombor bulat yang mengikut pengetahuan dan pengalaman masing-masing. Ini juga menunjukkan guru menggunakan pemahaman formal untuk bertindak terhadap sesuatu rangsangan ialah pemahaman mengaitkan simbol matematik dan tata tanda dengan idea matematik yang relevan dan menggabungkan semua idea ini dengan rantaian alasan yang logik (Skemp, 1978, 1989), ,seperti dalam kategori simbolik. Selain itu guru juga mempunyai pemahaman konseptual, iaitu pemahaman menghubungkan atau mengaitkan sesuatu prosedur atau peraturan dengan lebih umum (Skemp, 1978, 1989), seperti dalam kategori prosedural.

Guru matematik Tahun Enam boleh mewakilkan gambar rajah selanjar dan diskrit kepada ayat matematik bahagi, dan sebaliknya. Ini menunjukkan mereka mempunyai pemahaman yang boleh dihuraikan kepada tiga perspektif: keupayaan untuk mengenal pasti konsep dalam pelbagai sistem perwakilan, keupayaan untuk memodelkan konsep tersebut kepada salah satu sistem perwakilan dan boleh mewakilkan konsep tersebut dari satu sistem perwakilan kepada perwakilan yang lain (Lesh, Post & Behr, 1987; Steffe & Thompson, 2000). Sistem perwakilan yang dimaksudkan ialah situasi sebenar, model manipulatif, gambar rajah, secara lisan dan perwakilan simbolik.

Makna. Dapatan kajian daripada kajian mengenai makna tentang pembahagian nombor bulat, didapati makna bahagi adalah tidak sama dengan hasil beberapa kajian (Brown, 1992; Squire & Bryant, 2002; Haylock, 2007; Gregg, & Gregg, 2007; Haylock,& Cockburn, 2010; Lamon, 2001; Neuman, 1999; Reys, 2007; Tirosh & Graeber, 1989, 1990; Downton,2009; Roche, & Clarke, 2009;) yang menyimpulkan bahawa bahagi terdiri daripada pengukuran dan pemetakan. Ini mungkin pengkaji tersebut telah mencantumkan konsep bahagi yang lain ke dalam pengukuran dan pemetakan. Ini juga mungkin mereka menganggap songsangan darab dan operasi tolak berulang dianggap sebagai pembahagian dengan kaedah pengukuran.

Selain itu, dapatan kajian ini juga sama dengan dapatan beberapa kajian (Mooney, Ferrie, Fox, Hansen, & Wrathmell, 2014; Nik Azis, 1989, 1995; Haylock & Cockburn, 2010; Van de Walle, 2010; Olive, & Vomvoridi, 2006; Nusrat Fatimah & Lawson, 2007; Van deWalle, 2007; Faridah, 2009; Fan, 2011) yang menyatakan bahawa bahagi merangkumi pemetakan, pengukuran, songsangan darab dan tolak berulang. Ini menunjukkan konsep bahagi dibahagikan kepada empat seperti di atas. Konsep bahagi ditakrifkan mengikut cara penyelesaiannya atau cara perwakilannya.

Makna yang diberikan terhadap sesuatu situasi yang berhubungan dengan struktur kognitif guru. Ini selaras dengan Pendekatan Konstruktivisme Radikal menganggap pengetahuan matematik sebagai skim tindakan dan skim operasi yang dikoordinasi dan dibina oleh seseorang pada masa tertentu. Menurut mereka skim merupakan aktiviti mental yang menjadi bahan bagi proses refleksi dan pengabstrakan. Mereka juga menyatakan pemahaman matematik membabitkan proses pengabstrakan yang kompleks. Dalam konteks ini, makna bagi simbol matematik adalah berkaitan dengan tindakan tertentu. Sehubungan itu, seseorang boleh mempelajari konsep matematik melalui pengabstrakan yang dibuat berlandaskan tindakan dan aktiviti deria yang khusus.

Guru dapat memberikan pelbagai makna bagi bahagi, nombor yang bahagi, nombor bahagi dan hasil bahagi, ini menunjukkan makna mereka terbentuk apabila hubungan dengan pengetahuan matematik dengan pengetahuan matematik dan pengetahuan lain dalam struktur kognitif dapat dijelaskan dan difahami dengan baik. Ini secocok dengan pandangan Naquib (1991, 2001). Guru dapat mentafsirkan situasi-situasi berkaitan dengan pembahagian nombor bulat yang diberi menunjukkan dengan ketibaan makna melalui proses ilham, seseorang dapat memahami tempat yang sebenar bagi sesuatu perkara dalam urutan dan fitrah kejadian Naquib (1991, 2001).

Hasil kajian menunjukkan guru matematik Tahun Enam dapat mentafsirkan sesuatu situasi mengikut pengalaman dalam pembahagian nombor bulatnya. Ini selaras dengan pandangan Steffe (2007), iaitu pentafsiran makna dalam aritmetik ialah suatu kehendak untuk bertindak, yang mana seseorang perlu memahami sesuatu simbol seharusnya membolehkannya menjalankan operasi tersebut secara minda.

Penaakulan. Dapatan kajian daripada kajian mengenai cara penaakulan tentang penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, didapati guru matematik Tahun Enam menggunakan penaakulan semasa menyelesaikan masalah tentang pembahagian nombor bulat melibatkan penaakulan deduktif dan induktif dengan menggunakan pelbagai cara. Ini sama dengan beberapa dapatan kajian (Calvin, & Duane, 2003; Watson, Callingham, & Donne, 2008; Son, & Crespo, 2009; Kaasila, Pehkonen & Hellinen, 2010; David Tall, 2012; DeWolf, Bassok, & Holyoak, 2013) mendapati guru pelatih menggunakan penaakulan dalam menyelesaikan masalah tentang pembahagian nombor bulat melibat gabungan operasi tolak dan bahagi, gabungan operasi darab dan bahagi, dan mencari faktor. Ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam boleh membuat pertimbangan dan penilaian dengan menggunakan akal, yang membabitkan kebolehan untuk menggunakan proses pemikiran intuisi dan logik untuk membentuk inferens dan hujah rasional berdasarkan tahap bukti empirikal dan bukti dalam keadaan tertentu; dan membabitkan proses menggunakan pengetahuan sedia ada untuk membuat kesimpulan, ramalan, atau memberikan penjelasan yang tertentu, ini seperti yang dinyatakan oleh Nik Azis (2014a).

Walau bagaimana pun, dapatan kajian ini tidak sama dengan dapatan kajian R.E. Reys dan D. A. Grouws (1975) mendapati tiada seorang murid pun menjustifikasikan jawapan secara konkrit dengan menggunakan hujah logik yang membabitkan pengukuran, pemetakan, tolak berulang dan pembahagian panjang. Ini mungkin disebabkan murid tidak cukup pengalaman dan pengetahuan untuk memberi hujah yang logik. Mereka mungkin tidak dilatih memberi justifikasi untuk setiap hasil aktiviti atau idea yang dicetuskan.

Penyelesaian masalah. Dapatan kajian daripada kajian mengenai cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, didapati guru lebih cenderung menggunakan kaedah pemetakan dalam menyelesaikan masalah tentang pembahagian nombor bulat tanpa baki atau berbaki. Dapatan ini adalah sama dengan hasil beberapa kajian (Fishbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Silver, 2010; Berenson & Vidakovic, 1995; Squire & Bryant, 2002; Kaasila, Laine, Hannula, & Pehkonen, 2005) yang mendapati kebanyakan murid dan guru pelatih memikirkan tentang kaedah pemetakan apabila berurusan dengan pembahagian nombor bulat. Ini menunjukkan mereka beranggap pembahagian itu lebih kepada pengagihan kepada sebilangan kumpulan dengan kuantiti yang sama. Ini juga mungkin disebabkan pengagihan secara pemetakan berlaku dalam kehidupan harian dan diamalkan setiap hari, contohnya mengagihkan kek atau duit kepada beberapa orang anak dengan cara mengagihkan seorang demi seorang secara adil, iaitu sama banyak. Murid yang mempunyai kecenderungan ini mungkin dipengaruhi oleh guru yang mengajar mereka, ini menunjukkan pengajaran guru atau amalan guru sangat mempengaruhi murid. Satu kemungkinan ialah murid cenderung menyelesaikan masalah matematik menggunakan teknik menghafal prosedur dan operasi matematik, menggunakan angka-angka dan istilah yang menjadi kata kunci (Mohd Uzi, 1999; Hassan, 1998).

Hasil kajian ini juga berbeza dengan hasil kajian Mulligan (1992) dan Faridah (2009) yang mendapati murid menyukai kaedah pemetakan dan kaedah pengukuran bagi pembahagian nombor bulat. Ini mungkin disebabkan murid telah didedahkan dengan kedua-dua cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat. Walaupun guru mengetahui kedua-dua kaedah ini, tetapi mereka cenderung menggunakan kaedah pemetakan, ini mungkin disebabkan amalan kehidupan harian yang menggunakan cara pengagihan ini.

Dapatan kajian ini juga mendapati guru matematik Tahun Enam menggunakan pelbagai cara untuk menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat, seperti tolak berulang, pembahagian panjang, songsangan darab, ini adalah secocok dengan hasil beberapa kajian (Neuma, 1999; Heirdsfield, Cooper, Mulligan, & Irons, 1999; Mulligan & Wright, 2000; Tsamir, Sheffer & Tirosh, 2000; Anghileri, Beishuizen & van Putten, 2002; Laine, Huhtala, Kaasila, Hannula & Pehkonen, 2004; Stickles, 2006; Zembat, 2007; Downtown, 2009; Yimer, 2009; Duri, 2011; Faridah, 2011, Fan, 2011; Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim, 2012; Faridah & Nik Azis, 2014) bersetuju bahawa pengetahuan tentang pembahagian nombor bulat mungkin terhasil daripada penyusunan semula pemahaman membilang, menambah atau menolak yang dimiliki oleh mereka serta terbentuk berlandaskan idea penjujukan, penggabungan, pengukuran atau pemetakan. Selain itu, dapatan kajian ini secocok dengan dapatan kajian Rugayyah (2007) yang mendapati murid Tingkatan Empat menyelesaikan masalah dengan menggunakan cara melukis gambar rajah, menggunakan konsep nisbah dan kadaran, pembentukan persamaan (ayat matematik) atau perkaitan. Ini menunjukkan guru matematik Tahun Enam mempunyai pengetahuan dan kemahiran yang luas tentang kaedah penyelesaian masalah matematik melibatkan pembahagian nombor bulat. Ini juga mungkin disebabkan mereka ada pengalaman mengajar topik pembahagian nombor bulat dan menggunakan cara-cara penyelesaian tersebut.

Seterusnya, dapatan kajian ini juga mendapati pemahaman kaedah pemetakan lebih berdaya maju daripada kaedah pengukuran dan kaedah lain, ini adalah berbeza dengan kajian Anghileri (2001) dan Nik Azis & Faridah (2011) mendapati kaedah pengukuran mempunyai daya maju yang sama dengan kaedah pemetakan. Ini mungkin kerana kaedah telah diamalkan dari awal lagi, iaitu mengagihkan objek kepada beberapa orang dengan kuantiti yang sama.

Di samping itu, dapatan kajian ini tidak sama dengan kajian An (2009) mendapati guru menggunakan anggaran dalam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat. Ini mungkin disebabkan guru matematik jarang menggunakan teknik ini dalam kehidupan harian. Ini mungkin disebabkan mereka beranggap penyelesaian matematik mesti mendapat kuantiti atau jawapan yang tepat.

Dapatan kajian ini mendapati empat skim tentang pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru Matematik Tahun Enam, iaitu skim pemetakan, skim pengukuran, skim songsangan darab, dan skim tolak berulang. Dapatan kajian ini adalah sama dengan dapatan kajian Nik Azis (1989, 1995), Faridah (2009) dan Fan (2011) yang mana murid menggunakan empat skim tersebut dalam penyelesaian masalah pembahagian. Skim pemetakan mentafsirkan ayat matematik $a \div b = c$, apabila a, b dan c ialah nombor bulat, a adalah lebih besar atau sama dengan b, dengan a mewakili jumlah objek yang diberi, b mewakili bilangan kumpulan atau bahagian yang perlu dibentuk, c mewakili kuantiti objek dalam setiap kumpulan atau bahagian. Skim pengukuran pula mentafsirkan ayat matematik $a \div b = c$, apabila a, b c adalah nombor bulat, dan a adalah lebih besar atau sama dengan b, dengan a mewakili jumlah objek yang diberi, b mewakili kuantiti objek yang perlu ada dalam setiap kumpulan atau saiz kumpulan yang perlu dibentuk, c mewakili bilangan kumpulan yang dibentuk. Selain itu, skim songsangan darab mentafsirkan ayat matematik $a \div b = c$, apabila a, b, dan c ialah nombor bulat, a adalah lebih besar atau sama dengan b, dengan a mewakili hasil darab, b dan c mewakili nombor darab, dan ayat matematik bahagi ditafsirkan sebagai songsangan darab. Akhirnya, skim tolak berulang mentafsirkan ayat matematik a ÷ b = c, apabila a, b c adalah nombor bulat, a adalah lebih besar atau sama dengan b, dengan a mewakili jumlah objek atau bahagian yang diberi, b mewakili kuantiti objek atau bahagian yang dikeluarkan setiap kali, c mewakili bilangan kali kuantiti objek atau bahagian dikeluarkan.

Dapatan kajian ini selari dengan dapatan kajian Faridah (2009) terhadap murid Tahun Empat tentang pembahagian nombor bulat, yang mana dapatan menunjukkan responden mempunyai empat skim dalam pembahagian nombor bulat. Guru matematik sekolah rendah akan lebih yakin dalam mengajar topik pembahagian nombor bulat selepas mereka merujuk dapatan kajian ini kerana mereka akan lebih memahami konsep pembahagian nombor bulat terutamanya tentang skim pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam.

Hasil kajian ini mendapati penyelesaian masalah merupakan usaha untuk mengatasi gangguan dengan mengubah suai atau membina skim tindakan dan skim operasi yang baru, dan bertumpu kepada kebolehan individu untuk membina pengetahuan yang berdaya maju dengan menggunakan proses asimilasi dan akomodasi. Hasil kajian ini selari dengan padana Von Glasersfeld, (1995).

Pemahaman. Daripada hasil kajian didapati pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat boleh dikenal pasti melalui beberapa perkara seperti gambaran mental, perwakilan, pemberian makna, penaakulan dan penyelsaian masalah mereka dalam pembahagian nombor bulat. Ini secocok dengan pandangan beberapa pengkaji (Von Glasersfeld, 1995; Steff, 2009), yang mana konsepsi seseorang boleh dikenal pasti daripada pemikiran mereka tentang beberapa perkara seperti gambaran mental, perwakilan, pemberian makna, penaakulan dan penyelesaian masalah. Ini menunjukkan dengan melalui aktiviti yang tertentu kita boleh melihat pola pemikiran seseorang seperti pemahamannya tentang perkara tersebut. Ini boleh dilihat dari satu urutan yang mempunyai tiga bahagian, situasi yang diasimilasikan, aktiviti yang dijalankan, dan hasil yang diharapkan.

Implikasi

Kajian ini memberi implikasi kepada beberapa aspek yang dua daripadanya adalah implikasi kepada amalan pendidikan dan implikasi kepada kajian lanjut.

Implikasi Kepada Amalan Pendidikan. Dalam implikasi kepada amalan pendidikan terdapat dua bahagian, iaitu amalan bilik darjah dan kurikulum matematik.

Amalan Bilik Darjah. Epistemologi yang mendasari kajian ini ialah guru matematik Tahun Enam membina pengetahuan nombor bulat, makna pembahagian nombor bulat yang melibatkan makna bahagi, nombor bahagi, hasil bahagi dan nombor yang dibahagi, jenis penaakulan dan kaedah khusus bagi menyelesaikan masalah membabitkan pembahagian nombor bulat. Pengetahuan ini dapat dimodelkan dengan mengkoordinasi tindakan dan operasi. Dalam perspektif ini, proses pengajaran dan pembelajaran pembahagian nombor bulat merujuk bimbingan yang diberikan oleh guru matematik supaya murid dapat membina pemahaman pembahagian nombor bulat sendiri, bukannya menyalurkan pengetahuan guru kepada mereka. Daripada dapatan kajian ini, guru matematik akan memahami konsep pembahagian nombor bulat dengan lebih mendalam dan membina keyakinan dalam pengajaran pembahagian nombor bulat, yang mana dapatan kajian ini menunjukkan terdapat pelbagai cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, skim yang melibatkan pembahagian nombor bulat, iaitu skim pengukuran, skim pemetakan, skim songsangan darab dan skim tolak berulang. Dengan demikian, guru tidak akan merasa operasi bahagi itu suatu operasi yang susah dan sukar untuk dipelajari atau mengajar.

Guru perlu mengetahui bentuk pemikiran murid, tidak kira betapa primitif bentuk pemikiran tersebut sekali pun, agar dapat memberi bimbingan yang sesuai supaya aktiviti yang dirancang dapat membantu murid mengubah suai dan membina pengetahuan baru (Steffe, 2009). Dalam kajian ini, beberapa bentuk pemikiran dan corak pemikiran guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat telah dijelaskan. Walaupun pemikiran tersebut bukan suatu model yang dimiliki oleh guru, tetapi ia adalah bentuk pemikiran berdaya maju yang dapat memberi gambaran tentang pemikiran guru secara umum yang berkaitan dengan pembahagian (Cobb & Steffe, 2011; Steffe, 2008). Bentuk dan corak pemikiran itu juga penting dalam membantu pensyarah matematik di Institut Pendidikan Guru untuk mentafsir tingkah laku guru pelatih semasa mereka menghadapi kesukaran menyelesaikan tugasan yang membabitkan pembahagian nombor bulat. Seterusnya, pensyarah matematik boleh mengalihkan tumpuan pengajaran mereka pada pemahaman tentang pembahagian nombor bulat yang lebih bersepadu. Oleh itu, mereka boleh menggayakan lagi pengetahuan dalam penyampaian kuliah matematik kepada bakal guru dan membekalkan panduan asas dalam penyelidikan pemahaman guru pelatih atau guru terlatih tentang pembahagian nombor bulat.

Reka bentuk pengajaran guru seharusnya mengambil kira bentuk pemikiran dan pengetahuan pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh murid. Adalah tidak wajar bagi guru mengandaikan bahawa murid membina pengetahuan pembahagian nombor bulat berasaskan kelaziman dalam pengetahuan guru. Ini bermaksud, perancangan pengajaran dan pembelajaran seharusnya dirancang berasaskan inferens guru tentang cara murid belajar berdasarkan pengetahuan sedia ada mereka.

Misalnya, penggunaan kaedah penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat, guru menggunakan kaedah yang berbeza berdasarkan kebiasaan, kematangan dan pengalaman masing-masing. Ini adalah kerana tindakan guru melakukan operasi adalah berbeza secara kualitinya dari perspektif mereka sendiri. Perubahan paradigma guru daripada pengetahuan mereka ke pengetahuan murid tidak dapat membantu meningkatkan proses pengajaran dan pembelajaran, kecuali guru dapat menyediakan situasi instruksional yang sesuai. Ini seterusnya memberi kuasa kepada guru mereka bentuk pengajaran dan pembelajaran mereka dan bukan bergantung pada buku teks semata-mata.

Kurikulum Matematik. Kajian ini mendapati guru mempunyai tafsiran yang pelbagai tentang konsep pembahagian nombor bulat. Tafsiran ini menunjukkan pemahaman sebenar guru matematik Tahun Enam. Oleh itu, penggubal kurikulum harus mengambil kira tafsiran guru tersebut untuk dijadikan sebagai rujukan dalam proses penambahbaikan kurikulum sedia ada. Sebagai contoh, penggubal kurikulum boleh memasukkan tafsiran pembahagian nombor bulat yang nyata dan jelas dalam topik.

Kurikulum matematik sekolah rendah bagi topik pembahagian nombor bulat memberi penekanan pada konsep dan pengiraan (BPK, 2014), tetapi kurang memberi penekanan pada cara berfikir secara penaakulan dalam penyelesaian masalah. Semua responden cenderung menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat dengan menggunakan penaakulan deduktif dan induktif, tetapi tidak menggunakan penaakulan secara abduktif. Bahagian Buku Teks dari Kementerian Pendidikan Malaysia perlu menyediakan buku teks dengan pelbagai aktiviti dan masalah mengenai pembahagian nombor bulat agar murid dapat berfikir secara penaakulan merangkumi penaakulan deduktif, induktif dan abduktif. Selain itu, Bahagian

Pembangunan Kurikulum dari Kementerian Pendidikan Malaysia juga perlu membangunkan kurikulum bagi guru pelatih yang menekankan penaakulan dalam penyelesaian masalah melibatkan pembahagian nombor bulat.

Bagi membolehkan guru pelatih membina pengetahuan mereka tentang pembahagian nombor bulat, mereka perlu diberikan tugasan yang bukan sahaja berfokus pada operasi tambah, tolak, darab, dan bahagi, malah juga berunsur aplikasi dalam kehidupan seharian dan berfikir secara penaakulan. Misalnya, tugasan penaakulan yang membabitkan pencarian jarak, kuantiti gula-gula yang diperlukan lagi, bilangan jiran dan kuantiti durian yang diperolehi oleh setiap jiran, ini dapat memberi peluang kepada murid membina pengetahuan mereka, di samping berfikir dari perspektif kehidupan sebenar dan menaakul.

Implikasi lain yang membabitkan gambaran mental yang dipunyai oleh responden. Majoriti responden mempunyai gambaran mental yang berkaitan dengan pengetahuan sedia ada dan pengalaman dalam kehidupan harian. Contohnya guru menggambarkan bahagi sebagai memotong kek kepada beberapa bahagian yang sama, sifar digambarkan sebagai angka “0” . Dengan itu, semasa mengajar sesuatu konsep atau kemahiran, guru perlu mengajar berdasarkan pengetahuan sedia ada guru pelatih dan menerang dengan menggunakan contoh yang berkaitan dengan kehidupan harian murid. Dengan demikian, murid dapat membina pengetahuan baru dari pengetahuan sedia ada mereka.

Implikasi Kepada Teori. Kajian ini berlandaskan teori konstruktivisme radikal untuk mengenal pasti pemahaman guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Dalam kajian ini, pengkaji mengkaji corak pemikiran guru Matematik Tahun Enam dengan mengenal pasti gambaran mental, perwakilan, makna, cara penaakulan dalam penyelesaian masalah, cara penyelesaian masalah dimiliki oleh responden. Dapatan kajian ini memberi implikasi kepada teori bahawa dengan berlandaskan teori ini, kita boleh mengenal pasti corak atau pola guru matematik Tahun Enam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat dengan lebih mendalam.

Dapatan kajian ini juga memberi implikasi kepada teori, yang mana berlandaskan teori ini, kita boleh mengkaji cara guru matematik Tahun Enam membina skim mengenai pembahagian nombor bulat dengan lebih mendalam dan terperinci. Kajian ini memberi sumbangan kepada pembentukan konsep atau skim untuk menjelaskan, mengkonsepsikan, dan menganalisis pengetahuan dan pemahaman guru Matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat dari perspektif mereka sendiri. Dengan meneliti tindakan dan operasi yang dijalankan oleh responden untuk menangani situasi bermasalah yang membabitkan pembahagian nombor bulat, kajian ini membekalkan idea yang berguna tentang gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan, penyelesaian, dimensi, perkaitan, dan pola fikiran guru tentang pembahagian nombor bulat.

Teori konstruktivisme radikal sebagai teori latar belakang kajian memudahkan proses mengumpul, menganalisis dan mentafsir data kajian. Hasil kajian dikumpulkan melalui temu duga klinikal dengan protokol yang direka berdasarkan teori konstruktivisme radikal untuk mengenal pasti corak pemikiran responden tentang pembahagian nombor bulat. Teori ini juga membantu dalam menganalisis data, yang mana analisis data disusun mengikut tema yang spesifik berkaitan dengan pemahaman, iaitu komponen pemahaman seperti gambaran mental, perwakilan, makna, penaakulan dan penyelesaian masalah. Selain itu, teori ini juga membantu dalam mentafsirkan data secara terperinci mengikut tema yang khas direka berdasarkan komponen pemahaman berdasarkan teori konstruktivisme radikal.

Selain itu, teori konstruktivisme radikal membantu dalam meningkatkan kebolehyakinan hasil kajian. Teori ini membekalkan rangka temu duga klinikal untuk mengumpul data, kemudian dianalisis secara teliti daripada perspektif berlainan. Seterusnya, setiap temu duga dan tingkah laku responden dirakam, disusun dan dianalisis satu per satu untuk mengawal kesahan dalaman kajian ini. Tambahan pula, keteraturan kajian ini disemak dan diubahsuai mengikut pandangan panel pakar teori ini dan rakan penyelidik yang pernah mengaji tentang teori ini. Penilaian reflektif secara teliti dan penjelasan tentang proses kajian secara terperinci membantu meningkatkan lagi kebolehyakinan hasil kajian ini.

Implikasi Kepada Kajian Lanjutan. Kajian ini bertujuan mengenal pasti cara guru matematik Tahun Enam membina pengetahuan tentang nombor bulat dan pembahagian, makna bahagi, dan pembahagian nombor bulat dan mempelajari sifat semula jadi guru membina dan mengubah suai pengetahuan sedia ada mereka. Pengubahsuaian merujuk usaha guru mengatasi gangguan dengan mengasimilasikan dan mengakomodasikan pemahaman pembahagian nombor bulat sedia ada mereka (von Glasersfeld, 1983, 1987, 1998, 2001, 2005; Steffe, 2007, 2008; Faridah, 2009; Nik Azis, 2014).

Dari beberapa kajian (Ernest, 2000; Schackow, 2007; Green, Piel, & Flowers, 2008) telah menggariskan beberapa panduan bagi mengubah sikap murid terhadap matematik dalam buku mereka. Antara panduan yang mereka huraikan buku mereka adalah supaya matematik dijadikan satu subjek yang menyeronokkan dengan menggunakan lebih banyak bahan maujud dalam pengajaran. Oleh yang demikian, pensyarah matematik perlu lebih kreatif dalam menggunakan bahan maujud terutama semasa mengajar tajuk “bahagi”, supaya guru pelatih lebih memahami konsep bahagi.

Kajian lanjut perlu dijalankan bagi menjawab beberapa persoalan seperti, “Apakah pemahaman pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh pelajar sekolah menengah”. Kajian lanjut juga perlu dijalankan ke atas guru matematik sekolah rendah dan sekolah menengah untuk mengenal pasti bagaimana pemahaman pembahagian berkembang. Selain itu, kajian lanjut terhadap pensyarah matematik di Institut Pendidikan Guru untuk mengenal pasti perbezaan pemahaman pembahagian nombor bulat yang dimiliki mereka berbanding dengan pemahaman pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru pelatih matematik mereka.

Kajian yang dijalankan ke atas guru matematik Tahun Enam didapati mereka menggunakan pelbagai cara dalam menyelesaikan masalah pembahagian nombor bulat, termasuk kaedah pengukuran, pemetakan, operasi tolak berulang, songsangan darab dan sebagainya. Kajian tentang cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat guru sekolah rendah dan menengah perlu dijalankan untuk mengetahui cara penyelesaian masalah pembahagian nombor bulat mereka secara mendalam dan terperinci.

Kajian ini dijalankan secara teknik temu duga klinikal bagi mengenal pasti pemahaman pembahagian nombor bulat yang dimiliki oleh guru matematik Tahun Enam. Teknik temu duga klinikal mampu menjawab beberapa persoalan asas tentang pembahagian nombor bulat, namun persoalan bagaimana guru matematik dapat membina pemahaman yang mereka miliki itu masih belum dijawab. Sehubungan itu, teknik eksperimen mengajar dianggap lebih sesuai bagi mengenal pasti cara subjek membina pemahaman yang mereka miliki, seperti yang dilakukan oleh Selter (1997) dan Ang, Ramlah, & Hazalizah (2014). Maka, kajian lanjut perlu dijalankan menggunakan teknik eksperimen mengajar bagi mengenal pasti bagaimana pemahaman pembahagian nombor bulat dibina oleh guru matematik sekolah rendah.

Secara umumnya, ramai pengkaji seperti Steffe dan Olive (2010), Muligan dan Wright (2000), dan Neuman (1999) bersetuju bahawa pengetahuan sedia ada murid atau guru tentang pembahagian nombor bulat mungkin disebabkan oleh penyusunan semula skim pengiraan, penambahan atau penolakan yang dimiliki oleh mereka dibangunkan berdasarkan idea penjujukan, penggabungan, pengukuran atau pemetakan. Sebagai langkah ke hadapan, pemahaman guru matematik sekolah rendah tentang pembahagian nombor bulat mungkin boleh ditingkatkan dengan melalui mengenal pasti cara pembinaan skim pembahagian nombor bulat guru dan faktor-faktor utama yang mempengaruhi pembinaan skim ini.

Penutup

Pada keseluruhannya, kajian ini menunjukkan pemahaman guru matematik Tahun Enam tentang pembahagian nombor bulat. Dapatan kajian ini boleh dimanfaatkan kepada pihak penggubal kurikulum, pendidik, penyelidik pendidikan dan lain-lain lagi untuk memantapkan lagi keupayaan mereka dalam aktiviti pembangunan, perkembangan, dan pengajaran dalam pembahagian nombor bulat. Dapatan kajian ini juga membekalkan tingkah laku yang terperinci tentang pemahaman pembahagian nombor bulat yang boleh dijadikan rujukan untuk tindakan lanjut yang relevan.

RUJUKAN

Abd Razak. Samad. (2007). *Physics problem solving activities among prospective graduate teachers.* PhD thesis tidak diterbit, Faculty of Education National University of Malaysia. Bangi.

Abdul Jalil Othman & Bahtiar Omar. (2005). Aplikasi pembelajaran secara konstruktivisme dalam pengajaran karangan berpandu. *Makalah Pendidikan*, 4: 6- 8

Addussakir. (2011). “Pembelajaran geometri sesuai teori Van Hiele”. *Jurnal Kependidikan dan Keagamaan.* ISSN: 1693-1499 Tahun 2010. Vol VIII Nombor 2, Januari 2010.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198.

Al-Ghazali. (1993). *Rahasia Haji dan Umroh* [Secrets of ḥajj and ‘umrah] (trans. by Muḥammad al-Bāqir; 4th print. 1997). Bandung, Indonesia: Karisma.

Andreasen, J. B. (2006). *Classroom mathematical practices in a preservice elementary mathematics education course using an instructional sequence related to place value and operations*. Unpublished Dissertation, University of Central Florida, Orlando.

Andreasen, J. B., Roy, G. J., Safi, F., Tobias, J. M., & Dixon, J. K. (2008, January). *Prospective teachers’ development of mathematical knowledge for teaching related to number and operations*. Research presented at the annual conference of Association of Mathematics Teacher Educators. Tulsa, Oklahoma.

Ang, M. C., Ramlah, J., & Hazalizah, H. (2014). *Keberkesanan kaedah mental matematik dalam pencapaian murid di sebuah sekolah.* Universiti Pendidikan Sultan Idris, Perak.

Anghileri, J. (2000). *Teaching Number Sense*. London.: Continum.

Anghileri, J., Beishuizen, M., & van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the ga*p*!. *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 149–170.

Anghileri, J. & Johnson, D.C. (1992). Arithmetic operations on whole numbers: multiplication and division. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K8: Research based methods* (Second ed., pp. 157-200). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Anon. (2004). *Problem solving for tomorrow’s world. First measures of cross-curricular competencies from PISA 2003*. OECD. Available in: http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2966,en_32252351_32236359_1_1_1_1_1,00.html.

An, S. (2009). Chinese teachers' knowledge of teaching multi-digi division. *Journal of Mathematics Education, 2*(1), 27-54.

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, 9, 278–291

Askew, M. B. (2007). *Effective teachers of numeracy*. London: School of Educational.

Ball, D. L.(1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2),132 – 144.

Ball, D. L. (1990b). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90* (4), 449 – 466.

Ball, D. L. (2002). *Mathematics proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education*. RAND Education/ Science and Technology Policy Institute.

Ball, D. L. (2003). *What mathematical knowledge is necessary for teaching mathematics*. USA: US Development od Education.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.) *A Research Companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bahagian Pembanguan Kurikulum. (2015). *Dokumen standard kurikulum dan pentaksiran*. Putrajaya: Bahagian Pembangunan Kurikulum, Kementerian Pendidikan Malaysia.

Bahagian Pendidikan Guru. (1998).*Pengajaran dan pembelajaran matematik: nombor bulat untuk sekolah rendah*. Selangor: Percetakan Dewan Bahasa dan Pustaka.

Baker, V. C., Aufmann, R. N., & Lockwood J. S. (2006). *Essential Mathematics with applications*. New York: Houghton Mifflin Company.

Bansford, J. D., Linda Z., Daniel S., Brigid B., Nancy V. & The Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1996). Fostering Mathematical Thinking in Middle School Students: Lessons from Research. Dalam R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Ed.), *The Nature of Mathematical Thinking*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates

Barmby, P., Bolden, D., & Harries, T., (2011). A representational approach to developing primary ITT students' confidence in their mathematics. In Smith, C. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *31*(1) March 2011.

Berenson, S.B. and Vidakovic, D.: (1996), ‘Children's word meanings and the development of division concepts’, in L. Puig and A. Gutierrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, University of Valencia, Valencia, Spain, Vol. 2, pp. 75–80.

Brendefur and Pitingo. (1998). Dividing Fractions by using the ratio table. In L. J Morrow. & M. J. Kenny (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Brown, S. (1992). Second-grade children’s understanding of the division process. *School Science and Mathematics*, 92(2), 92-95

Bynner, J. (2006). *Does Numeracy Matter More?* London: National Research and Development Centre for adult literacy and Numeracy Retrieved.

Cai, J. & Silver, E.A. (1995). Solution processes and interpretations of solutions in solving a division-with-remainder story problem: Do Chinese and U S.. students have similar difficulties? *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (5), 491 – 497.

Callingham, R. (2005). A whole-school approach to developing mental computation strategies. In H. L. Chick & J. L. Vincent, (Eds), *Proceedings of the 29thAnnual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 2, pp. 201-208). Melbourne: PME.

Calvin, T. L. & Duane, W. D. (2003). *Mathematical reasoning for elementary teachers, third edition*. US: Pearson Education, Inc.

Campbell, S. (1996). On preservice teachers’ understandings of division with remainder. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2. pp. 177-184). Valencia: Universitat de Valencia.

Campbell, S. R., & Zazkis, R. (2002). Toward number theory as a conceptual field. In Campbell, S. R, & Zazkis, R. (Eds.) *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 1-14). *Journal of Mathematical Behavior Monograph.* Westport, CT: Ablex Publishing.

Caplan, J. B. and Caplan, P. J. (2005) The perseverative search for sex differences in mathematics abilities. In A. M. Gallagher & J. C. Kaufman (eds.) *Gender differences in mathematics: An integrative psychological approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cengiz, N., & Rathouz, M. (2011). Take a bite out of fraction division. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *17*(3), 146-153.

Chapman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 341–349.

Chua, Y.P. (2006). *Kaedah penyelidikan: Kaedah dan Statistik Penyelidikan – Buku 1*. Malaysia: McGraw-Hill (Malaysia) Sdn. Bhd.

Cobb, P. (2005). Mathematics instcriptions and the reflexive elaboration of understanding: An ethnography of graphing and numeracy in a fish hatchery. In W. M. Roth, *Mathematical Thinking and Learning* (p. 75-100). London: Taylor's Francis.

Cobb, P. & Steffe, L. P. (2011). The Constrctivist research as teacher and model builder. *A Journey in Mathematics education Research*, 14(2), 19-30.

Crespo, S. & C. Nicol. (2006). "Challenging preservice teachers' mathematical understanding: the case of division by zero" dalam *School Science and Mathematics*, *106*(2), 84-97.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 395-415.

Creswell, J. W. (2008). *Qualitation inquiry & research design: Choosing among five approaches* (2nd ed.). London: Sage.

Creswell, J. W. (2012). *Educcation research: Planing, conduction and evaluating quantitative and qualitative research* (4th ed.). Lincoln, London: Pearson Education, Inc.

David Tall. (2008a). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 2008, 20 (2), 5-24 [A summary of the framework of three worlds of mathematics as applied to the shift to formal thinking].

David Tall. (2008b).A life-time's journey from definition and deduction to ambiguity and insight. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 7 (2), 183–196.

David Tall (2012). Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. Plenary at *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground: A Symposium in Honor of Ted Eisenberg, April 29-May 3, 2012.*

De Castro, B. V. (2008). Cognitive models: The missing link to learning fraction multiplication and division. *Asia Pacific Education Review*, 9(2), 101-112.

DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K.J. (2013). Analogical reasoning with rational numbers: semantic alignment based on discrete versus continuous quantities. In M. Knauf, M. Pauven, N. Sebanz, & I. Wachsmuth (Eds.), *Proceedings of the 35th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 388-393). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education,* 34, 12-25

Dixon, J. A., & Moore, C. F. (1996). The developmental role of intuitive principles in choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology*, *32*(2), 241-253.

Downton, A. (2009). It seems to matter not whether it is partitive or quotitive division when solving one step division problems. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides (proceedings of the 32nd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 161–168). Palmerston North, NZ: MERGA.

Duru, A. (2011). Pre-service primary school teacher's preference of the problem solving strategies for word problems, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *15* (2011) 3463–3468.

Dykstra, D. I. (2007). The Challenge of Understanding Radical Constructivism. *Constructivist Foundations*, 2(2-3) , 50-57.

Effandi Zakaria & Norliza Zaini. 2009. Conceptual and procedural knowledge of rational numbers in trainee teachers. *European Journal of Social Sciences*, *9*(2), 202-207.

Effandi Zakaria, Norazah M. N. dan Sabri Ahmad. (2007). *Trend pengajaran dan pembelajaran matematik*. Kajang: Utusan Publications dan Distributors Sdn Bhd.

Enns, J. T. (2004). *The Thinking Eye, the Seeing Brain: Explorations in visual cognitif*. New York: W.W.Norton &Company.

Ernest, P. (2000). "Why teach mathematics?", in *Bramail, S. and White, J. Eds. Why Learn Maths?* London: Bedford Way Papers, 2000, 1-14.

Fan. (2011). *Pemahaman murid tingkatan satu tentang pembahagian pecahan* (Tesis doktor falsafah yang tidak diterbit). Fakulti Pendidikan, Universiti Malaya.

Fazura, Sharifah Norul Akmar,& Leong. (2015). Penaakulan Perkadaran Murid Tahun Lima: Strategi Penyelesaian Masalah *Missing-Value*. Journal Kurikuum & Pengajaran Asia Pasifik. *3* (3). 1-7.

Faridah (2009). *Skim pembahagian nombor bulat bagi murid tahun empat* (Tesis doktor falsafah yang tidak diterbit), Fakulti Pendidikan, Universiti Malaya.

Faridah, M. I. & Nik Azis, N. P. (2014). Year four pupils' understanding of division of whole numbers. *Proceedings of the 21st National Symposium on Mathematical Sciences.*AIP Conf. Proc.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 3–17.

Fraenkel, J. R., & Wallen, N.E. (2009). *How to design and evaluate research in education* (ed. ke-7). New York: MCGraw-Hill.

Gagne R.M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*, Fourth Edition. New York: Holt, Rinehart, & Winston.

Gall, M. D. Gall, J. P., & Borg, W. R. (2010). *Appling educational research* (6th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

George. (2008). *Prospective Teachers' Development Of Whole Number Concepts And Operations During A Classroom Teaching Experiment*. Electronic Theses and Dissertations. Paper 3562.

Glidden, P. L. (2008). Prospective Elementary Teachers' Understanding of Order of Operations. *School Science and Mathematics*, *108*(4), 130-136.

Goulding, M., Rowland, T., & Barber, P. (2002). Does It Matter? Primary Teacher Trainees' Subject Knowledge in Mathematics. *British Educational Research Journal, 28*(5), 689 – 704.

Graeber, A., Tirosh, T., & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 95–102.

Gray, E. (2007). *The number line as metophor of the number system: A case study of a primary school*. United kingdom: University of Warwick United kingdom.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair sharing models for division of fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Green, M., Piel, J. A., & Flowers, C. (2008). Reversing education majors' arithmetic misconceptions with short-term instruction using manipulatives. *Journal of Educational Research*, *101*(4), 234–242.

Hackenberg A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, *26* (1), 27–47.

Halim Jajuli. (2000). *Tahap Kesediaan Penggunaan Komputer di kalangan guru-guru Sekolah Rendah (Daerah Kota Setar).* Tesis Master, Universiti Teknologi Malaysia, Skudai, Johor.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102, 395–406. doi: 10.1037/a0017486.

Hartnett, J.(2007). Categorisation of Mental Computation Strategies to Support Teaching and to Encourage Classroom Dialogue. In Watson, Jane and Beswick, Kim, Eds. *Proceedings 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia - Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, Vo 1 345-352, Hobart, Tasmania.

Hartnett, J. (2015). Teaching computation in primary school without traditional written algorithms In M. Marshman, V. Geiger, & A. Bennison (Eds.). Mathematics education in the margins. *Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*), pp. 285–292. Sunshine Coast: MERGA.

Hassan Pardi (1998). *Pola kesilapan murid tahun tiga menyelesaikan masalah bercerita dalam matematik: satu kajian kes*. Laporan kajian yang diserahkan untuk memenuhi sebahagian daripada keperluan bagi Ijazah Sarjana Pendidikan tidak diterbitkan. Kuala Lumpur. Fakulti Pendidikan Universiti Malaya.

Haylock, D (2007). *Key concepts in teaching primary mathematics*. Los Angeles: Sage Publications.

Haylock, D., & Cockburn, A. (2010). *Understanding mathematics in the lower primary years* (4th. ed.). London: Paul Chapman Publishing.

Heflin, L.J., & Alaimo, D.F. (2007). *Students with Autism Spectrum Disorders: Effective instructional practices*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall.

Heirdsfield, A., Cooper, T., Mulligan, J., & Irons, C. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 89–96). University of Haifa.

Hellinen, A., & Pehkonen, E. (2008). On high school students' problem solving and argumentation skills. In T. Fritzlar (Ed.), Problem Solving in Mathematics Education. *Proceedings of the ProMath conference Aug 30 – Sept 2, 2007 in Lüneburg* (pp. 105–120). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook Of Research On Mathematics Learning And Teaching* (pp. 65–97). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1– 27). Hillsdale: Erlbaum.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding and skill in multidigit addition and instruction. *Cognition and Instruction*, *14*(3), 251- 283.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406.

Hope, M. (2006). *Preservice teacher procedural and conceptual understanding of fractions and the effects of inquiry based learning on this understanding*. Unpublished Doctoral Dissertation. Clemson University.

Horton, L. (2007). *Understanding the concept of division*. Unpublished Doctoral Dissertation. East Tennessee StateUniversity.

Huinker, D., Freckman, J. L., & Steinmeyer, M. B. (2003). Subtraction strategies from children's thinking: Moving toward fluency with greater numbers. *Teaching Children Mathematics*, 9,347-353. Retrieved http://www.jstor.org/stable/41198173

Hunting, R.P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145–165.

Hu, H.W. & Hsiao, W.Y. (2013). Developing Pre-Service Teachers' Understanding in Division of Fractions by Using TPACK. In R. McBride & M. Searson (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2013* (pp. 4801-4805). Chesapeake, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).

Isiksal, M., (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers" subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplication and division of fractions*. Unpublished doctoral dissertation, Middle East Technical University, Turkey.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(3), 213–230.

Isik & Kar. (2012). Analysis of problems posed by pre-service primary teachers about adding fractions in terms of semantic structures. *Mathematics Education,* 2014, 9(2), 135-146.

Isleyen T. dan Isik Ahmet. (2003). Conceptual and procedural learning in mathematics. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education,* 7(2):91-99.

Ismail, Zaleha, Hamzah, Nurul Ain (2008). *Pengintegrasian teknologi dalam pendidikan matematik.* In: Isu Pendidikan Sains dan Matematik: Ke Arah Meningkatkan Kualiti Pengajaran dan Pembelajaran. Penerbit UTM , Johor, pp. 127-142.

Kaasila, R., Pehkonen, E., & Hellinen, A. (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 247–261

Kaasila, R., Laine, A., Hannula, M. & Pehkonen, E. (2005). Pre-service elementary teachers' understanding on division and strategies used. In E. Pehkonen (Ed.) Problem Solving in Mathematics Education. *Proceedings of the ProMath meeting June 30 – July 2, Lahti* (pp. 83–94). University of Helsinki, Facultyof Behavioral Sciences. Research report 261.

Kalder, R. S. (2007). Teaching preservice secondary teachers how to teach elementary mathematics concepts. *Mathematics Teacher*, *101*(2), 146-149.

Kaplan, R. (1999). *The nothing that is: A natural history of zero*. New York: Oxford University Press.

Kamii, C. K., Lewis, B. A., & Livingston, S. J. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher*, 41, 200-203. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/41195981

Kamii, C. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. Dlm A. A. Cucuo (Ed), *The roles of representation in school mathematics*: 2001 Year book (pp. 24-34). Reston, Virginia: NCTM.

Keengwe, J. & Georgina, D. (2012) The digital course training workshop for online learning and teaching. *Education and Information Technologies*, 17(4), 365-379.

Knifong, J.D. & G.M. Burton. (1980). "Intuitive definitions for division with zero" dalam *Mathematics Teacher*, *73*(3), 179-186.

Knott, L. (2010). Problem posing from the foundations of mathematics. *The mathematics Enthusiast*, 7(2) 413-431.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing from fraction to rational numbers. Dlm A. A. Cuocu & Curcio, F. R. (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (ms 146-165). Reston, Virginia:NCTM.

Lamb, J., & Booker, G. (2004). The impact of developing teacher conceptual knowledge on students' knowledge of division. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference*, *3*(1), 177-182. Bergen: PM.E., Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, *3*(4), 305-342.

Leah. N (2003). Division of Faction: Preservice Teachers' Understanding and Use of Problem Solving Strategies. *The mathematics Educator*. *7* (2), 96-113.

Lee, J. F. (2007). Making sense of the traditional long division algoritma. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 48-59.

Leonard, M. K., Steve, T. & Johnson, A. (2008). *Guiding children's learning of mathematics.* US: Thomson Wadsworth.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R,. & Fennewald, T. (2013). Introductions to part 1 modeling: What is it? Why do it? In Lesh, R., Landau, P. L., Haines, C. R. & Hurford, A. (Eds). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp 5-10). New York: Springer.

Leung, R. Wong and W. Pang. (2006). *Departing from the traditional long division algorithm: An experimental study*. Paper presented at the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Reserach Group of Australia, Australia, 2006.

Levenson, E., P. Tsamir & D. Tirosh. (2007). "First and Second Grades Use of Mathematical- Based and Practically-Based Explanations for Multiplication with Zero" dalam *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *29*(2), 21-40

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 546 –552.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM Mathematics Education*, *40*(5) 833–843.

Li, Y & Smith. D (2007). Prospective middle school teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching - the case of fraction division. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education*. Vol. 3. 185-192. Seoul: PME.

Lial, M. L. & Salzman, S. A. (2010). *Essential Mathematics, Third Edition*. US: Pearson Education, Inc.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481–500.

Lofland, J. & Lofland, L. H. (1995). *Analyzing Social Settings: a guide to qualitative observation and analysis.* Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.

Lutovac, S. (2008). Prevalence of division model and its implication in mathematical textbooks. *Mehtodological Horizon, 3*(2), 31-47.

Ma, Liping (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martin, M.O., Mullis, I.V.S. and Foy, P. with Olson, J.F., Erberber, E., Preuschoff, C. and Galia, J. (2008). *TIMSS 2007 International Science Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades Chestnut Hill*, MA: Boston College, TIMSS and PIRLS International Study Center.

Martinez, M. E. (1998). What is Problem Solving? *Phi Delta Kappan*, *79*(8), 605-609.

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative Research Design: An Interactive Approach* (2nd Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Maxwell, J. A. (2013). *Qualitative Research Design, An Interactive Approach* (Third ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Mayer, R. E. (1985). Mathematical ability. Dalam R. J. Sternberg (Ed.), *Human Ability: An Information-Processing Approach*. New York: Freeman.

Mayer, R. E. (1987). *Educational psychology: A cognitive approach*. Boston: Little Brow

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (3rd. ed.). Hoboken, NJ: Jossey-Bass.

Mesut Butun. (2009). Elementary matehamatics teachers' pedagogical content knowledge structures of division concept. *Education Science*, 4(4)

Micah, Kathleen,Tamara & Catherine. (2014). Changing Pre-Service Elementary Teachers' Beliefs about Mathematical Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, *16*(2), 4-24.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook* (3 th ed). Thousand Oaks, CA: Sage.

Mohamad Johari. (2007). *Pengetahuan konseptual dalam matematik dan hubungannya dengan pencapaian matematik pelajar matrikulasi*. Projek Sarjana Pendidikan. Universiti Kebangsaan Malaysia.

Mohd. Uzi Dollah (1999). *Penyelesaian Masalah Matematik: Satu kajian kes pelajar tingkatan dua.* Tesis yang tidak diterbitkan: Pusat Pengajian Ilmu Pendidikan, Universiti Sains Malaysia, Pulau Pinang

Mok, Cai & Fung. (2008). Missing learning opportunities in classroom instruction: evidence from an analysis of a well-structured lesson on comparing fractions. *The Mathematics Educator*. *11*(1/2). 111-126.

Mooney, C., Ferrie, Fox, S., Hansen, A., & Wrathmell, R. (2014). *Primary mthematics: Knowledge and understanding*, (7th. ed.). Los Angeles: Sage Publications.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children 's understanding of the rational number: A few model and experiment curriculum. *Journal of Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122-147.

Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, *4*(1), 24-42.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children"s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematical Education*, *28* (3), 309 – 330.

Mulligan, J.T & Wright, R. J.(2000) "An assessment framework for early multiplication and division", in *Proceedings of the 24th Annual Conference of the International Group for the Psychology of MathematicsEducation*, edited by T.Nakahara and M. Koyama, Hiroshima, Japan: Program Committee, 4, 17–25.

Murray,H., Olivier, A & Human, P. (1992). "The development of young students' division strategies," in *Proceeding of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* edited by W. Geeslin, & K. Graham, Durham, NH: PME, pp 152–159.

Nasarudin Abdullah, Effandi Zakaria & Lilia Halim. (2012). *The effect of a thinking strategy approach through visual representation on achievement and conceptual understanding in solving mathematical word problem*. Canadian Center of Science and Education. Doi: 10.5539/ass.v8n16p30.

Natcha P. dan Satoshi N. (2006). Analysis of Mathematics Performance of Grade Five Students in Thailand Using Newmann Procedure. *Journal of International Cooperation in Education*, 9(1), 111-122.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Research Council. (2001). *Knowing and learning mathematics for teaching: Proceedings of a workshop.* Washington, DC: National Academy Press. Available: http://books.nap.edu/catalog/10050.html. [July 10, 2001].

Naquib, S. M. (1991). *The concept of education in Islam*. Kuala Lumpur: International Institute of Islamic Thought and Civilization.

Naguib, S.M. (2001). *Prolegomena to the Metaphysics of Islam: An Exposition of the Fundamental Elements of the Worldview of Islam*. Kuala Lumpur: ISTAC.

Neuman, D. (1999). Early Learning and awareness of division: A phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 101 – 128.

Nicole, P. (2007). *Linking procedural and conceptual understandings of fractions during learning and instruction with fifth- and sixth-grade students : an evaluation of Herbert's Sites approach.* Masters thesis, Concordia University.

Nik Azis Nik Pa. (1987). *Children's fractional schemes*. Unpublished doctoral dissertation. University of Georgia, Athens.

Nik Azis Nik Pa. (1999). *Pendekatan konstruktivisme radikal dalam pendidikan Matematik.* Kuala Lumpur: Universiti Malaya.

Nik Azis Nik Pa. (2008). *Isu-isu kritikal dalam pendidikan Matematik*. Kuala Lumpur: Universiti Malaya.

Nik Azis Nik Pa. (2009). *Nilai dan etika dalam pendidkan matematik*. Kuala Lumpur: Universiti Malaya.

Nik Azis Nik Pa. (2014a). *Penghasilan disertasi berkualiti dalam pendidikan matematik*. Kuala Lumpur: Penerbit Universiti Malaya.

Nik Azis Nik Pa. (2014b). *Pengembangan nilai dalam pendidikan matematik dan sains*. Kuala Lumpur: Penerbit Universiti Malaya.

Nik Azis & Faridah. (2011). Konsepsi murid berumur 10 tahun tentang pembahagian melibatkan sifar. *Atikan*, *1*(1) 94-104.

Noraini Idris. (2004). *Teknologi dalam pendidikan sains dan matematik*. Kuala Lumpur: Penerbit Universiti Malaya.

Noraini Idris. 2006. *Teaching and Learning of Mathematics: Making Sense and Developing Cognitive Abilities*. Kuala Lumpur: Utusan Publications & Distributors Sdn. Bhd.

Noraini Idris, (2009). *Penyelesaian masalah daya penggerak dalam pengajaran dan pembelajaran*. Persidangan Kebangsangan Pendidikan Matematik. Sungai Petani: Institusi Pendidikan Guru malaysia.

Noraini Idris, & Norjoharuddeen (2008). *Assessing mathematics thinking in primary school in Malaysia.* Kuala Lumpur: McGrawHill

Nor'ain, Rahani, Wan Zah & Mohd, (2007). The use of Graphic Calculator in Teaching and Learning of Mathematics: Effects on Performance and Metacognitive Awareness. *American International Journal of Contemporary Research*, *1*(1), 59-72.

Nusrat Fatimah & Lawson, (2007). Prospective Teachers' Knowledge: Concept of Division. *International Education Journal*, *8*(2). 377-392.

Olive J. & Steffe L. P. (2002) The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior*. 20: 413–437.

Olive J. & Vomvoridi, E. (2002) Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*. *25*(1) 18-45.

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. New York: Oxford University Press.

Parmar, R.S. (2003). Understanding the concept of "division": Assessment considerations. *Exceptionality, 11*(3), 177 – 189.

Parmjit, S. (2005). An exploring into children mathematics thinking: Implication for teaching. In Parmjit, S. & Lim, C. S (Eds), *Improving teaching and learning of mathematics from research to practice* (ms. 81-108). Shah Alam: UTM.

Patton, M. Q. (2014). *Qualitative evaluation and research methods* (4th. ed.). Newbury Park, CA: Sage Publication.

Perkin, D. (1993). Teaching for understanding. American Educator: *The Professional Journal of the American Federation of Teachers*; *17*(3), 8,28-35.

Perlwitz. M. (2005). Dividing fractions: reconciling self-generated solutions with algorithmic answers. *Teaching Children Mathematics 10*(6). 278-283.

Peter, O. I., Abiodun, A. P. & Jonathan, O. O. (2010). Effect of constructivism instructional approach on teaching practical skills to mechanical related trade students in western nigeria technical colleges, *International NGO Journals*, 5(3), 59-64.

Piaget, J. (1929). *The Child's Conception of the world.* New York: Harcourt & Brace.

Piaget, J. (1950). *Introduction a l'epistemologie genetique*, Presses Univ. de France, Paris.

Piaget, J. (1969). *The mechanism of perception*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget J. (1976). *The Grasp of Consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Piaget, J. (1977). *Recherches Sur L'absraction Reflechissante* (Research on reflective abstraction). Paris: Press Universitaires de France (terjemahan oleh von Glasersfeld).

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How we can characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*(2–3), 165–190.

Putnam, R. T., Heaton, R. M., Prewat, R. S., & Remillard, J. (1992). Teaching mathematics for understanding. *Elementary School Journal*, *93*(1993), 213-228.

Redmond, A. (2009). *Prospective elementary teachers' di vision of fractions understanding*: A mixed methods study. Unpublished doctoral dissertation, Oklahoma State University.

Redmond, A., & Utley, J. (2007). *Prospective elementary teachers understanding of and attitudes towards the division of fractions*. Paper presented at the Research Council on Mathematics Learning Annual Convention, Oklahoma City, OK.

Reys, R.E. & D.A. Grouws. (1975). "Division Involving zero: Some revealing thoughts from interviewing children" dalam *School Science and Mathematics*, *75*(7), 593-605.

Rey, R., (2007). *Helping Children learn matehmatics* (9 ed). New York: John Wileys & Son.

Riney, M. R. & Froeschle, J. (2014). Socialization processes of engineering students: Differences in the experiences of females and males. *Administrative Issues Journal*, 2(1), 96-106.

Rittle-Johnson, B. & Koedinger, K. R. (2009). Iterating between lessons concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79, 483–500.

Rizvi, N. F. (2004). Prospective teachers' ability to pose word problems. *International Journal for mathematics teaching and learning*, 166-22.

Robert, J. Q., Teruni D. L., & John R. P.(2010). Teacher Perceptions of Division by Zero.*The Clearing house: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, 81(3), 101-104.

Roche, A., & Clarke, D. M. (2013). Primary teachers' representations of division: assessing mathematical knowledge that has pedagogical potential. *Mathematics Education Research Journal*, 25(2), 257-278.

Roche, A., & Clarke, D. (2009). Making sense of partitive and quotitive division: a snapshot of teachers' pedagogical content knowledge. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides (proceedings of the 32nd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 467–474). Palmerston North: MERGA.

Rodriguez, Lago, Hernandez, Jimenez, & Caballero. (2009). How do secondary students approach different types of division with remainder situations? Some evidence from Spain. *European Journal of Psychology of Education*. 24(4), 529-543.

Rousselle, L. & Noel, M. (2008). Mental arithmetic in children with mathematics leraning diasbilities. *Journal of Learning Disabilitis*, 41(6), 498-513.

Roy, G. J. (2008). *Prospective teachers' development of whole number concepts and operations during a classroom teaching experiment*. (Unpublished doctoral dissertation). University of Central Florida, Orlando, Florida.

Rugayyah, A. (2007). *Penyelesaian masalah kebarangkalian oleh murid tingkatan empat*. (Disertasi Sarjana tidak dicetak). Universiti Malaya.

Rule, A. C., & Hallagan, J. E. (2006, June). *Preservice elementary teachers use drawings and make sets of materials to explain multiplication and division by fractions.* Paper presented at the 2nd Annual Preparing Mathematicians to Educate Teachers (PMET) Conference at Oswego, New York.

Rule, Sobierajski, & Schell, (2005). The effect of beauty and other perceived qualities of curriculum materials on mathematical performance. *Journal of Authentic Learning*, 2 (2), 26- 41.

Russell, G., & Chernoff, E. J. (2010). Beyond nothing: Teachers' conceptions of zero. In P. Brosnan, D. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the Thirty-Second Annual Meeting of the North-American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*6(1),1039-1046. Columbus, OH: Ohio State University.

Russell, G., & Chernoff, E. J. (2011). Seeking more than nothing: Two elementary teachers conceptions of zero. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(1-2), 77-112.

Rutherford J, Ahlgren A. (1989). *Science for All Americans*. New York: Oxford University Press.

Safi, F. (2009). *Exploring the understanding of whole number concepts and operation: A case study analysis of prospective elementary school teachers* (Disertasi kedoktoran tidak diterbitkan). University of Central Florida, Orlando, Florida.

Sajadi, M. , Amiripour, P. & Mohsen, R. (2013). The examining mathematical word problems solving ability under efficient representation aspect. *Mathematics Education Trends and Research* 2013 (2013) 1-11.

Saldana, J. (2011). *The coding manual for qualitative researchrs*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Schackow, J. B. (2007). Using virtual manipulatives to model computation with fractions. *Online Journal of School Mathematics, 5*(1), 1-11.

Schneider, M. & Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: a knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 92–101..

Schneider, M. & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: a multimethod approach. *Developmental Psychology*, 46, 178– 192.

Seidelmann, A. (2001). *Algebra students' conceptions of zero*. Normal, Illinois, USA: Mathematics Department ISU [Illinois State University].

Sengul, A. & Katranci, Y. (2012). Problem solving and problem posing skills of prospective mathematics teachers about the 'sets' subject. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *69* (2012) 1650 – 1655.

Selter, Ch. (1997). *Instructional Design for Reform in Mathematics Education*. In M. Beishuizen et al. (Eds), The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures. Utrecht: Cds Press, pp. 55–77.

Sharp & Adams. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after. Solving Realistic Problems. *The Journal of Educational Research*. *95*(6). 333-347.

Silver, E. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181–198). Hillsdale: Erlbaum.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135.

Silver, E., Shapiro, L., & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 117–135.

Silver, E.(2010). *The misunderstood child, fourth edition: Understanding and coping with your child's learning disabilities*. USA:Harmony

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 233–254.260 R. Kaasila et al.

Siti Rahaimah & Noraini (2014). *Numerasi sekolah rendah*. Perak: Universiti Pendidikan Sultan Idris.

Siti Rahaimah, (2013). A model to identify the level of numeracy understanding pf primary school pupils: A case study. *International Journal of Computer Application* (0975-8887) (Journal Elecronic) Vol.67 no.5, April 2013.

Son, J., & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematical Teacher Education, 12*, 235–261.

Squire & Bryant. (2002). The influence of sharing on children's initial concept of division. *Journal od experimental child psychology*. 81(1) 1-43.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher. 26*(3), 9-15.

Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge.

Stake, R. E. (2000). Case studies. Dalam N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (eds.), *Handbook of qualitative research* (2nd, ed.). (h. 435-454). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Steffe, L. (1995). Alternative epistemologies: An educator's perspective. In L. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 489–523). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L.P. (2000). *Zero: The biography of a dangerous idea*. New York: Viking Penguin

Steffe, L.P., & Thompson. P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. Dalam A. Kelley & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (hIm. 267-307). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L.P. (2007). Radical constructivism and "school mathematics". Dalam M. Larochelle (Ed.). *Key works in Radical Constructivism* (hlm. 279-289). The Netherlands: Sense Publishers.

Steffe L.P. (2008). Mathematical schemes as instruments of interaction. *Constructivist Foundtions,* 3(2), 74–76.

Steffe L. P. (2009). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds). *Children's fractional knowledge* (pp. 1-12). NY: Springer.

Steffe, L. .P. & J. Olive. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Stickles, P. R. (2006). *An analysis of secondary and middle school teachers' mathematical problem posing*. Unpublished doctoral dissertation, Graduate Faculty, Indiana University.

Suhaidah Tahir. (2006) *Pemahaman konsep pecahan dalam kalangan tiga kelompok pelajar secara keratan lintang.* Tesis doktor falsafah yang tidak diterbit, Fakulti Pendidikan, Universiti Teknologi Malaya.

Thanheiser, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 251–281.

Thanheiser, E. (2010). Investigating further preservice teachers' conceptions of multidigit whole numbers: Refining a framework. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 241–251.

Thanheiser, E. (2012). Understanding multidigit whole numbers: The role of knowledge pieces, connections, and context in understanding regrouping 3+ digit numbers. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(2), 220–234.

Thanheiser, E., Whitacre, I., & George, R. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Whole Number Concepts and Operations. *The Mathematics Enthusiast*, 11(2), 217-266.

Thompson, P. W. (1996). Imagery and the development of mathematical reasoning. In L. P. Steffe, B. Greer, P. Nesher, P. Cobb, & G. Goldin (Ed.), *Theories of learning mathematics* (pp. 267-283). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thompson, P.W., Lambdin, D. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic Teacher*, (May), 556-558.

Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2010). Linear numerical magnitude representations aid children's memory for numbers. *Psychological Science*, 21, 1274–1281.

Tirosh, D., & Graeber, A. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 79–96.

Tirosh, D., & Graeber, A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 98–108.

Tirosh, D. (2000). Enhancing pre-service teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (1), 5-25.

Trigueros, M., Ivoone, S. & Lozano, M., (2013). Integrating technology in the primary school mathematics classroom: The role of the teacher. *Mathematics Education in the Digital Era*, 2(1), 111-138.

Toluk-Ucar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem-posing. Teaching and Teacher Education: *An International Journal of Research and Studies*, 25(1), 166–175.

Tsang, E. W., & Williams, J. N. (2012). Generalization and induction: Misconceptions, clarifications, and a classification of induction. *Management Information System Quarterly*, *36*(3), 729-748.

Tsamir, P., R. Sheffer & D. Tirosh. (2000). "Intuition and undefined operations: the case of division by zero" dalam *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *22*(1), ms.116-.

Turner, F. 2007. Beginning teachers' use of representations. In *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, November 2007*, ed. D. Küchemann, 102-107.

Turner, F. (2008). Beginning elementary teachers' use of representation in mathematics teaching. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 209-210.

Van de Walle, J. A. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (7th Ed.). Boston: Pearson.

Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical Thinking. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present* and future, 51-82

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.577–628). Charlotte, NC: Information Age.

Vighnarajah, Wong, & Kamariah Abu Bakar. (2008). The shift in the role of teachers in the learning process. *European Journal of Social Sciences*, 7 (2).

Von Glasersfeld, E. (1983). "Learning as constructive activity". In J.C. Bergeron & N. Herscovics (eds). *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA*, 41-69, Montreal, Canada.

Von Glasersfeld, E. (1987). *The construction of knowledge: Contributions to conceptual semantics*. Seaside, CA: Intersystems Publications.

Von Glasersfeld, E. (1988). The reluctance to change a way of thinking. *Irish Journal of Psychology*, *9*(1), 83–90.

Von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese*, 80, 121-140.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing*. London: Falmer Press.

Von Glasersfeld, E. (1998). Questions and answers about radical constructivism. In K. G Tobin (ed.), *The Practice of Constructivism in Science Education*. AAAS, Washington, DC.

Von Glasesrfeld (2001). The radical constructivisme view of science. *Foundation of Science*. 6(1-3), 31-43.

Von Glasersfeld, E. (2005). Thirty years radical constructivism*: Constructivist Foundations 1 (1), 9-12.*

Von Glasersfeld & Larochelle, M., (2007). *Key works in radical construtivism*. New York: Sense Piblishers.

Wahaida, (2008). *Tahap kesediaan guru menggunakan teknologi dalam pengajaran dan pembelajaran (p&p) di sekolah menengah kebangsaan*. Disertasi sarjana yang tidak dicetak. Universiti Utara Malaysia.

Watanabe, T. (2002). Representations in teaching and learning fractions. *Teaching Children Mathematics*, *8*(8), 457-463.

Watson, J.M. (1991). "Models to show the impossibility of division by zero" dalam *School Science and Mathematics*, *91*(8), 373-376.

Wheeler, M.M. & I. Feghali. (1983). "Much ado about nothing: preservice elementary school teachers' conception of zero" dalam *Journal for Reserach in Mathematics Education*, *14*(3),147-155.

Whitacre, I., & Nickerson, S. D. (2012). *Prospective elementary teachers' justifications for their nonstandard mental computation strategies*. Paper presented at the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Reno, NV.

Wisconsin Department of Public Instruction. (2007). *Wisconsin's Model Academic Standards for Mathematics*. Retrieved March 1st, 2010 from http://dpi.wi.gov/standards/matintro.html

Wun, T. Y., & Sharifah Norul Akmar, S. Z. (2012, September). *Mathematical problem solving ability of preservice secondary school mathematics teachers*. Paper presented at the Mathematics and Science Education Colloquium, 12-13 September 2012, University of Malaya, Kuala Lumpur.

Wun, T. Y., Sharifah Norul Akmar, S. Z., & Lim, H. L. (2013, September). *Assessing preservice teachers' problem solving abilities: A case study*. Paper presented at the Seminar Kebangsaan Majlis Dekan Pendidikan IPTA 2013, 23-25 September 2013, Universiti Islam Antarabangsa Malaysia (UIAM), Gombak, Selangor.

Wun, T. Y., Lim, H. L., & Chew, C. M. (2015, September). *Assessing primary school teachers' mathematical problem solving ability: A case study.* Paper presented at the Seminar Kebangsaan Majlis Dekan-Dekan Pendidikan Universiti Awam 2015, 14-15 September 2015, Fakulti Pendidikan Teknikal dan Vokasional, Universiti Tun Hussein Onn Malaysia, Johor.

Yang, D. C. (2007). Investigating the strategies used by pre-service teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics*, *107*(7), 293–301.

Yim, J. (2010). Children 's strategies for division by fractions in the context of the area of a rectangle. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 105–120.

Yimer, A. (2009) Engaging in-service teachers in mathematical problem-solving activities during professional development programs. J*ournal of Mahematics Education*, *2*(1), 99-144.

Yin, R. K. (2013). *Case study research: Design and methods (5th ed.*). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2010). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem-posing abilities. In B. Sriraman, & K. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics, xx-xy.* Retrieved from http://cas.umt.edu/math/reports/sriraman/YuanSriraman_22_2010.pdf at 16.12.2012.

Zainal Abidin dan Afrinaleni. (2009). *Keberkesanan Kaedah Konstruktivisme Dalam Pengajaran dan Pembelajaran Matematik.* Bachelor's thesis, Universiti Teknologi Malaysia.

Zazkis, R., & Campang, S. (1996). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540–563.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: Primes and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 207–218.

Zazkis, R. (2008). Divisibility and transparency of number representations. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 81-92).

Zembat, İ. Ö. (2007). Working on the same problem-Concepts; with the usual subjects- pre-service elementary teachers. *İlköğ- retim Online*, *6* (2), 305-312. http://ilkogretim-online.org.tr/ vol6say2/v6s2m22.pdf adresinden 25 Haziran 2011 tarihinde edinilmiştir.

Zoolaiha Abd Rahman. (2006). *Penguasaan konsep dan sikap terhadap algebra di kalangan pelajar sekolah menengah*. Projek Sarjana Pendidikan. Universiti Kebangsaan Malaysia.

Zhu, Z. (2007). Gender differences in mathematical problem solving patterns: A review of literature. *International Education Journal*, *8*(2),187-203.